BIBLIOTEKA MATEMATYCZNO-FIZYCZNA
WYDAWANA PRZEZ A. CZAJEWICZA I S. DICKSTEINA Z ZAPOMOGI KASY POMOCY DLA OSÓB PRACUJĄCYCH NA POLU NAUKOWEM IMIENIA JÓZEFA MIANOWSKIEGO.
SERYI III NR. 3.

ZASADY FIZYKI

NAPISAŁ
AUGUST WITKOWSKI
PROFESOR UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO

TOM PIERWSZY

FIZYKA OGÓLNA. — DYNAMICZNE WŁASNOŚCI MATERYI. — AKUSTYKA

WYDANIE CZWARTE

OPRACOWAŁ
DR STANISŁAW LORIA
DOCENT PRYWATNY UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO

WARSZAWA
SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI E. WENDEGO I SP.
1915.

Rok 1915. — Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego pod zarządem Józefa Filipowskiego.

SPIS RZECZY

tomu pierwszego.

Część pierwsza.

FIZYKA OGÓLNA.

Część druga.

DYNAMICZNE WŁASNOŚCI MATERYI.

PRZEDMOWA

do wydania pierwszego.

Wezwany przed kilku laty przez kolegę M. A. Baranieckiego, ówczesnego redaktora »Biblioteki matematyczno-fizycznej«, do napisania podręcznika fizyki dla seryi trzeciej tego wydawnictwa, podjąłem się pracy tej z ochotą, gdyż od dawna było życzeniem mojem przyswoić polskiej literaturze pedagogicznej celniejsze metody i sposoby wykładu elementarnego fizyki, które w piśmiennictwie zagranicznem tak znacznie się udoskonaliły i upowszechniły. Książka ta miała zapoznawać uczących się z zasadami fizyki nowoczesnej, wykładem przystępnym, opartym na początkowych wiadomościach matematycznych, a jednak ile możności ścisłym i wyczerpującym; należało przytem uwzględnić tych czytelników, którzyby zamierzali uczyć się bez pomocy nauczyciela. Założenia te nadały pracy mej rozmiary większe, aniżeli pierwotnie zamierzano. Zajęcia mego powołania nie dozwoliły mi dotychczas wykończyć dzieła; zważywszy jednak, że materyał wyłożony w niniejszej książce jest dość jednolity i stanowi dział odrębny, wydaję ją jako tom oddzielny, nie czekając ukończenia całości.

Na usprawiedliwienie tytułu »zasady fizyki«, który książka ta nosi, należy zauważyć, że nauka zwana fizyką »doświadczalną« zmieniła znacznie dawniejszą swą postać; przeważna część jej zadań przeniosła się w dziedzinę fizyki »praktycznej«, obok której rozwija się potężnie fizyka »teoretyczna« (angielska: natural philosophy), rugując coraz bardziej fizykę matematyczną, więcej formalną abstrakcyjną, ze stanowiska silnego, jakie dawniej zajmowała, zwłaszcza w literaturze francuskiej. Wykład fizyki teoretycznej może dosięgnąć kresów nauki, podawać ją ogólnie, ściśle i wszechstronnie; może jednak być także elementarny, najelementarniejszy. W tym drugim razie właściwą dlań nazwą jest »zasady fizyki«, jak tego przykładem dobrze znana w Polsce książka A. Daniella.

Zdaje mi się, że zmiana nazwy i zmiana sposobu wykładu jest dostatecznie uzasadniona, z jednej strony wielkim rozwojem nauki i jej zastosowań, (np. w zakresie elektryczności), z drugiej zaś strony ściślejszem niż dawniej określeniem zasadniczych pojęć i wyników. Treść samejże nauki urosła do tego stopnia, że w podręczniku mającym podać czytelnikowi choćby tylko jej elementy, nie zostaje już miejsca na szczegółowe opisywanie przyrządów, albo bawienie się ciekawościami fizycznemi. Nawet przy ważnych zastosowaniach fizyki ograniczyć się trzeba do wskazania zasad naukowych, na których one polegają, odsyłając czytelnika po wiadomości szczegółowe do licznych, wydawanych obecnie w tym kierunku dzieł popularnych.

Wykład elementarny fizyki, na którym poprzestaje zazwyczaj, kto pragnie zaznajomić się tylko z jej zasadami, czy to dla uzupełnienia wykształcenia swego, czy dla zastosowań, nie jest bez pożytku i dla tych, którzy zajmują się fizyką z powołania, powiedziałbym nawet, dla nauki samej. Mniej co prawda ogólny, nie obejmuje całości zjawisk pewnej kategoryi; skupia natomiast uwagę na jednym przedmiocie, wpaja w pamięć i wyobraźnię główne jego rysy — powinien zaś być taki, żeby na szczególe uczył ogólnych zasad nauki. Nawzajem, dobrze jest i specyaliście rzucić czasem ogólną teoryę, a przyjrzeć się zblizka jednemu z zawartych w niej przypadków, bez osłony symbolów i znaków matematycznych; niezawodnie rzuci on światło w górę i na ogólną teoryę.

Obok dążenia do rozpowszechnienia wiedzy jest to zapewne jeden z motywów, iż tacy mistrze nauki jak Thomson, Helmholtz, Tait, Maxwell i wielu innych, poświęcają sporo czasu wypracowaniu elementarnych metod wykładu i układaniu podręczników pisanych sposobem przystępnym, zrozumiałym dla nie-matematyków. Dzieła te, mające rozgłos i szeroką sławę, służyły mi za wzór przy układaniu niniejszej książki; wiele przedmiotów wprost z nich zaczerpnąłem, inne starałem się utworzyć ich wzorem. Czytelnik pragnący rozszerzyć i pogłębić wiadomości swoje powinien dzieła te poznać. Treści tego tomu pierwszego odpowiadają następujące: Maxwella: »materya i ruch«, książka znana w przekładzie polskim; tegoż: »teorya ciepła«; Thomsona i Taita: »wykład elemementarny fizyki teoretycznej«; Taita znakomite podręczniki o »własnościach materyi«, o »cieple« i o »świetle«; Helmholtza: »odczyty popularne«, tudzież klasyczne dzieło o »dźwiękach« (Lehre von den Tonempfindungen). W nauce o jednostkach, która nastręcza początkującym zazwyczaj pewne trudności, pomocą będzie książka Everetta »o jednostkach i stałych fizycznych« (wydana po polsku przez J. J. Boguskiego).

Nakoniec winien jestem podziękować serdecznie wszystkim, którzy wspierali mnie czynem lub życzliwą radą przy wydaniu niniejszej książki: przedewszystkiem redaktorowi »Biblioteki matematyczno-fizycznej« p. Czajewiczowi i profesorowi Gosiewskiemu za trud przy wydaniu i przejrzeniu jej i za uprzejme uwzględnienie wszelkich życzeń moich; niemniej kolegom Baranieckiemu, Malinowskiemu i Natansonowi za cenne wskazówki i rady.

A. Witkowski.

Kraków, w lutym 1892.

PRZEDMOWA

do wydania drugiego.

Drugie wydanie tomu pierwszego »Zasad fizyki« pojawia się jednocześnie z ukończeniem druku tomu drugiego, podczas gdy ostatni tom, trzeci, pozostaje jeszcze do opracowania. W tych warunkach nie zdawało mi się rzeczą stosowną wprowadzać w nowem wydaniu znaczniejsze zmiany w układzie lub treści; poprzestałem na uważnem przejrzeniu tekstu, tudzież na dopełnieniach i poprawkach, zmierzających głównie do powiększenia jasności i poczytności wykładu.

Opierając się na doświadczeniach zrobionych od czasu pierwszego pojawienia się tej książki, radbym dorzucić jeszcze słowo do czytelników. Niechaj nikt nie sądzi, żeby można było się nauczyć fizyki z książek. Kto dąży do istotnego opanowania zasad tej nauki, czy to dla niej samej, czy dla jej zastosowań w innych dziedzinach wiedzy teoretycznej lub praktycznej, niechaj nie poprzestaje na zaznajomieniu się z abstrakcyjnem jej ujęciem, jakie daje książka. Fizyki można nauczyć się tylko na doświadczeniach praktycznych. Komu nie byłaby dana możność korzystania z ułatwień, jakich dostarcza dobrze wyposażona pracownia fizyczna, niechaj stara się mieć oczy otwarte na przyrodę otaczającą; znajdzie tam obszerne pole do zastosowania i pogłębienia swych wiadomości.

Początkującym radziłbym też przerabiać starannie zadania, których znajdzie w tej książce kilka setek — nie pomijając nawet takich, których rozwiązanie wydawałoby się mu prostem i oczywistem. Nabędzie tym sposobem sprawności w stosowaniu teoryi do zagadnień praktycznych, jakoteż niezbędnej w tym celu wprawy rachunkowej.

A. W.

Zakopane, w sierpniu 1904 r.

PRZEDMOWA

do wydania trzeciego.

Trzecie wydanie tomu pierwszego oddaję obecnie do druku jednocześnie z drugiem wydaniem tomu drugiego. Tom pierwszy będzie niezmienionym niemal przedrukiem wydania poprzedzającego; w tomie drugim natomiast uczyniłem różne zmiany i poprawki i rozszerzyłem rozdział traktujący o termodynamice, uwzględniając zwłaszcza chemiczne jej zastosowania. Staram się usilnie o rychłe doprowadzenie do końca rękopisu tomu trzeciego, który obejmować będzie naukę o elektryczności i magnetyzmie i zakończy dzieło.

A. W.

Kraków, w lutym 1907 r.

PRZEDMOWA

do wydania czwartego.

Wkrótce po śmierci ś. p. A. W. Witkowskiego zwrócili się do mnie wydawcy Biblioteki matematyczno-fizycznej z wezwaniem, abym przygotował do druku nowe wydanie I tomu »Zasad Fizyki«. Zamierzałem pierwotnie przedrukować treść wydania trzeciego bez zmiany. Niebawem jednak znalazłem w papierach Zmarłego, użyczonych mi łaskawie przez panią Witkowską, egzemplarz trzeciego wydania, zaopatrzony uwagami i poprawkami, które Autor postanowił był widocznie uwzględnić w przygotowywanem już wydaniu czwartem. Należało więc, w myśl wskazówek samego autora, zamiar ten w czyn wprowadzić. Ale zdając sobie sprawę z odpowiedzialności, którą na siebie biorę, zmieniając tu i ówdzie czy tylko uzupełniając tekst tego klasycznego dzieła polskiej literatury dydaktyczno-naukowej, postanowiłem kierować się jak można było najściślej wskazówkami i życzeniami autora, a tam gdzie ich brakło, ograniczyć się do zmian tylko najniezbędniejszych. To też naogół treść tomu pierwszego w wydaniu czwartem nie różni się istotnie od treści wydania trzeciego, zmiany zaś i uzupełnienia ważniejsze starałem się uwidocznić wyraźnie, ujmując odnośne ustępy w nawias prosty ([). Sądzę, że wstrzemięźliwość ta, podyktowana pietyzmem dla autora i jego wieloletniej pracy, była przy pierwszem wydaniu pierwszego tomu jego dzieła tem bardziej uzasadniona, iż tom ten obejmuje przedewszystkiem klasyczne podstawy mechaniki, które pod wpływem rozwoju współczesnych badań naukowych stosunkowo małym tylko i nader powolnym ulegają zmianom.

Pożądane natomiast byłoby niewątpliwie szersze uwzględnienie zastosowań technicznych. Wszelako próby w tym względzie czynione pouczyły mnie, że konsekwentne wykonanie takiego przedsięwzięcia zwiększyłoby znacznie rozmiary książki, a nadto zmieniłoby jej — w tytule już zaznaczony — charakter. Ograniczyłem się więc i pod tym względem tylko do kilku drobnych uzupełnień.

Nieznaczne zmiany w stylizacyi twierdzeń ogólnych, budzących często, u początkującego zwłaszcza czytelnika, wątpliwości natury metodologicznej, zostały dokonane w duchu poglądów, którym autor dawał niejednokrotnie wyraz w ciągu ostatnich lat życia w wykładach fizyki teoretycznej, oraz w odczytach popularnych.

Tom niniejszy miał ukazać się jeszcze w jesieni r. 1914. Z powodu okoliczności odemnie niezależnych, związanych z wybuchem wojny światowej, musiałem druk przerwać na czas dłuższy.

Nakoniec winien jestem podziękować tym, którzy mi życzliwie pomagali przy opracowaniu niniejszego wydania: pani Witkowskiej za łaskawe użyczenie papierów ś. p. Autora; p. Dicksteinowi za trud przy przeglądaniu korekt.

St. Loria.

Kraków, w październiku 1915.

August Wiktor Witkowski.

12. X. 1854—21. I. 1913.

August Wiktor Witkowski pochodził z rodziny mieszczańskiej, zamieszkałej w Galicyi; był synem urzędnika banku w Brodach. Urodził się 12 października 1854. Pierwsze lata młodości spędził w domu rodzinnym. Prawdopodobnie też z domu rodzicielskiego wyniósł wielką, szczerą skromność i prostotę, zalety, które mu zdobywały zawsze powszechną sympatyę i nader mile harmonizowały z pełną skupienia pracowitością i powagą uczonego.

Kształcił się niemal wyłącznie w szkołach publicznych. Szkołę ludową oraz cztery pierwsze klasy niemieckiego podówczas gimnazyum realnego ukończył w Brodach; wyższe klasy w polskiej już szkole realnej we Lwowie. W r. 1872 uzyskał świadectwo dojrzałości i rozpoczął studya techniczne na wydziale inżynieryi w ówczesnej Akademii technicznej we Lwowie. Wcześnie jednak odezwało się w młodym tecnniku zamiłowanie do pracy teoretycznej. Więc już w pierwszych latach studyów zajmował się gorliwie matematyką pod kierunkiem prof. Żmurki, a korzystając z prywatnie udzielonego pozwolenia, uczęszczał równocześnie na wykłady prof. Fabiana w Uniwersytecie. O systematyczności i gruntowności tych studyów świadczą wymownie pochodzące z lat 1875—1877, znalezione w papierach Zmarłego, rękopiśmienne opracowania całych kursów lub działów matematyki. Znajdują się tam n. p. traktaty o »Teoryi najmniejszych kwadratów« (1876), »o Szeregach i całkach Fouriera« (1877) o »Teoryi funkcyi potencyalnej« (1877) i t. p.

Powziąwszy widocznie, jeszcze przed ukończeniem studyów technicznych, zamiar porzucenia zawodu inżynierskiego, objął w r. 1877 obowiązki asystenta przy katedrze geodezyi u prof. Zbrożka, równocześnie zaś zapisał się jako słuchacz nadzwyczajny na uniwersytet lwowski i natychmiast po uzyskaniu dyplomu inżyniera, zdał egzamin na nauczyciela fizyki i matematyki w szkołach realnych. Wkrótce potem otrzymał stypendyum naukowe wydziału krajowego i udał się na dalsze studya za granicę.

Dwuletni pobyt w Berlinie, w pracowni Hermanna Helmholtza i w seminaryum Gustawa Kirchhoffa pozostawiły niezatarte ślady w umysłowości Witkowskiego. Przejawiają się one i w późniejszej jego działalności, zarówno w zakresie zagadnień, do których ze szczególnem zwracał się upodobaniem, jak nawet i w sposobie pracy, oraz w formie wykładu.

Z Niemiec podążył Witkowski na dalsze studya naukowe do Anglii. Uzyskawszy mianowicie w r. 1880 drugie, większe stypendyum na podróż naukową, wyjechał do Glasgowa do laboratoryum największego podówczas mistrza fizyki nowoczesnej, Sir Williama Thomsona, późniejszego Lorda Kelvina. W r. 1881 powrócił do kraju i jako docent fizyki w wyższej szkole rolniczej w Dublanach, rozpoczął działalność nauczycielską. W rok później habilitował się jako docent prywatny fizyki w politechnice lwowskiej, wkrótce potem otrzymał katedrę nadzwyczajną, a w r. 1887 katedrę zwyczajną w tejsamej uczelni. W r. 1888 powołany na opróżnioną po Z. Wróblewskim katedrę fizyki doświadczalnej w Uniwersytecie Jagiellońskim, przeniósł się do Krakowa. W roku szkolnym 1910/11 był rektorem Wszechnicy Jagiellońskiej. a w dwa lata później umarł nagle na udar serca 21 stycznia 1913 r.

Działalność naukowa Witkowskiego dzieli się na dwa okresy: Lata od 1880—1887 stanowią niejako okres przygotowawczy, spędzony w najlepszej podówczas, klasycznej szkole pracy naukowej. Witkowski podejmuje więc i wykonywa zrazu prace naukowe pod kierunkiem Helmholtza i Thomsona, a wyniki swych badań ogłasza w rozprawach:

Über den Verlauf der Polarisationsströme. Wied. Ann. **11**, 759, (1880); po polsku: Rozpr. Akad. Umiejętności t. VII, 191, (1880).

Effect of Strains on Electric Conductivity. Trans. Roy. Soc. Edinb. XXX. (1881); po niemiecku: Wied. Ann. **16**, 161, (1882); po polsku: Rozpr. Akad. Umiejętności t. IX, 156, (1882).

Z tego okresu pochodzą też rozprawy późniejsze, wykonane już w Dublanach i we Lwowie, ale poczęte, w pomyśle przynajmniej, jeszcze podczas studyów za granicą. Są to mianowicie prace z różnych dziedzin fizyki, dotyczące zagadnień, któremi wówczas zajmowali się właśnie Helmholtz, Thomson, oraz ich uczniowie. Do nich zaliczyć też należy rozprawy:

„*Zur Theorie der galvanischen Kette*". Wied. Ann. **19**, 844, (1883).

„*O kilku przypadkach ruchu cieczy, zależnych od spójności*". Pamiętnik A. U. t. XIII, 48, (1887).

„*O cieple, powstającem przy zwilżaniu ciał stałych*". Rozpr. A. U. XVIII, 191, (1888).

Drugi, główny okres naukowej działalności Witkowskiego rozpoczyna się z chwilą objęcia katedry po Wróblewskim i trwa aż do śmierci. Prace Wróblewskiego i Olszewskiego nad gazami zdobyły krakowskiemu Collegium fizycznemu sławę światową. Obejmując katedrę, uznał Witkowski za swój obowiązek przejąć w spadku i teren pracy naukowej swego poprzednika. Z zapałem podjął tradycyę swego nowego laboratoryum i sumiennie a wytrwale pracował przez całe życie w raz obranym kierunku.

Owocem tej ćwierćwiekowej pracy jest następujący szereg cennych rozpraw o termodynamicznych własnościach gazów:

„*O rozszerzalności i ściśliwości powietrza*". R. A. U. t. III Ser. II, 343, (1891); po francusku: Bulletin intern. de l'Acad. des Sciences de Cracovie, 181, (1891).

„*O mierzeniu niskich temperatur*". R. A. U. t. III Ser. II, 380, (1891); po francusku: Bull. de l'Ac. d. Sc. 188, (1891); po angielsku: Phil. Mag. **41**, 312, (1896).

„*O własnościach termodynamicznych powietrza*". R. A. U. t. XII Ser. II, 128, (1896); po francusku: Journ. de Physique t. V. Ser. III, 123, (1896); po angielsku: Phil. Mag. **41**, 288, (1896); **42**, 1, (1896).

„*O oziębianiu się powietrza wskutek rozprężenia nieodwracalnego*". R. A. U. t. XV Ser. II, 247, (1899); po francusku: Bull. de l'Ac. d. Sc. 282, (1898).

„*O prędkości głosu w powietrzu zgęszczonem*". R. A. U. t. XIX Ser. II, 1, (1899): po francusku: Bull. de l'Ac. d. Sc. 138, (1899).

„*O rozszerzalności wodoru*". R. A. U. t. 5A Ser. III, 156, (1905); po francusku: Bull. de l'Ac. d. Sc. Ser. A. 305, (1905); po niemiecku: Zeitschr. f. kompr. u. flüssige Gase **11**, 83, (1905).

Niepodobna w tem miejscu podać w przystępnej dla początkującego formie treści tych trudnych i nader mozolnych badań nad gazami. Trafnie scharakteryzował je K. Zakrzewski[1]) w następujących słowach: »Plon już sam przez się bogaty, tem więcej podziwu godny, że został zdobyty w warunkach pracy pierwotnych, trudnych, nie dających bynajmniej podniety z zewnątrz. Stawia on Witkowskiego w rzędzie wybitnych pracowników nauki i sztuki eksperymentowania, pracowników typu Regnaulta, którzy budują z mrówczą wytrwałością fundamenty gmachu wiedzy i sprawiają, że gmach ten — wraz ze szczytami, do których się może wznieść geniusz tylko — jest mocny«.

Witkowski pozostawił oprócz wymienionych, do jednego wielkiego programu należących prac nad gazami, także szereg innych, drobniejszych rozprawek naukowych. Jeszcze w Dublanach zmierzył był *stałą poziomą magnetyzmu ziemskiego* [Kosmos, 500 (1881)]. Wraz z K. Olszewskim wykonał *pomiary spółczynników załamania światła w ciekłym tlenie* [R. A. U. t. VI Ser. II, 127, (1893), Bull. de l'Ac. d. Sc. d. Cracovie 245, (1894)]. W czasie wakacyi, spędzanych przez długi szereg lat w Zakopanem robił tam *spostrzeżenia magnetyczne* [Prace mat.-fizyczne t. **10**, 102, (1899)] i *pyrheliometryczne* [Spraw. Kom. Fizyogr. A. U. t. **38**, 51, (1905)], oraz *spostrzeżenia nad elektrycznością atmosferyczną* [R. A. U. t. 2A, Ser. III, 22, (1902)].

Praca badawcza zdobyła Witkowskiemu poważne stanowisko w międzynarodowym świecie uczonych i zyskała uznanie w kraju. W r. 1892 został honorowym doktorem filozofii Uniwersytetu Jagiellońskiego, w rok potem czynnym członkiem krakowskiej Akademii Umiejętności. Ponadto był honorowym doktorem praw Uniwersytetu Glasgowskiego, h. c. doktorem »rerum technicarum« politechniki lwowskiej i honorowym członkiem Towarzystwa przyrodników polskich im. Kopernika.

Jeszcze większe niż na polu naukowem były zasługi Witkowskiego jako nauczyciela i profesora Wszechnicy Jagiellońskiej. Podnieść tu przedewszystkiem należy jego wielki talent krasomówczy, który sprawiał, że wykłady jego cieszyły się szczególną popularnością wśród młodzieży. Ludzie, którzy przed 15 czy 20 laty byli uczniami Witkowskiego, zachowali po dziś dzień żywo w pamięci te lekcye zarówno pod względem treści jak i formy zgoła niepospolite. Oprócz obowiązkowego kursu »Fizyki doświadczalnej«

[1]) Wiad. mat. t. XVII str. 224, (1913).

WSTĘP.

1. Zmysły. Przedmiotem badań fizyki są zjawiska, zachodzące w otaczającym nas świecie. Podłoże, na którem je dostrzegamy, nazywamy materyą. Zjawiska odbywają się prawidłowo, dlatego możliwem jest umiejętne ich badanie.

Przez długi czas mniemano jednak, że pomiędzy prawami materyi z jednej, a myśli ludzkiej z drugiej strony, zachodzi stosunek tego rodzaju, iż prawa i własności świata materyalnego mogą być odkryte i zbadane przez samo rozumowanie, oparte na powierzchownych zaledwie spostrzeżeniach. Mniemanie to powstrzymywało przez wiele wieków rozwój nauk zajmujących się przyrodą; zarówno fizyka, jak i inne nauki przyrodnicze, zawdzięczają dzisiejsze swe stanowisko uznaniu tej prawdy, że właściwem źródłem wiedzy o przyrodzie jest spostrzeganie, rozszerzone bezpośredniemi próbami, czyli doświadczeniami.

Wiadomości o zjawiskach, odbywających się w przyrodzie, odbieramy za pośrednictwem osobnych, do tego celu przystosowanych części naszego ciała, zwanych narządami zmysłowymi. Zdrowy organizm posiada sześć dobrze rozwiniętych zmysłów i taka sama jest liczba różnorodnych wrażeń zmysłowych, które jesteśmy zdolni odczuwać. Z m y s ł s i ł y, czyli dotyku, rozsiedlony jest w całem niemal ciele, zwłaszcza na jego powierzchni, jakkolwiek nie wszędzie w równym stopniu wyrobiony; zmysłem tym rozpoznajemy opory rozmaitego rodzaju, jakie materya przedstawia, n. p. ciężar, masowość, sprężystość, twardość, gładkość, szorstkość itp. W z r o k jest zmysłem światła i barwy; siedzibą jego jest dno gałki ocznej, mianowicie płaskie rozgałęzienie nerwu wzrokowego, zwane siatkówką. Wszelkie podrażnienia tego nerwu odczuwamy jako światło; dzięki szczególnej budowie gałek ocznych rozróżniamy za pośrednictwem wzroku postać i wzajemne położenie ciał, wydających i odbijających światło. Zmysł ten, sięgający najdalej ze wszystkich, pospołu ze zmysłem dotyku, daje nam sposobność utworzenia pojęcia przestrzeni, którą materya po części zajmuje i w której odbywają się wszelkie zjawiska, dotyczące materyi. Zmysł ciepła i zimna mieści się, obok dotyku, głównie na powierzchni ciała; zmysłem tym rozpoznajemy temperaturę materyi. Siedzibą słuchu jest osobny przyrząd w uchu umieszczony, który, podobnie jak oko, posiada zawiłą budowę i daje nam wrażenie głosu, ilekroć nań działają szybkie wstrząśnienia. Smak i węch umieszczone są w jamie ustnej i nosowej; zmysły te są wrażliwe na działania chemiczne ciał ciekłych, tudzież gazowych.

Zmysły podają do naszej świadomości wrażenia wywołane zmianami, które zachodzą w naszem otoczeniu. Przez wprawę i doświadczenie uczymy się łączyć z temi wrażeniami pewne określone pojęcia. Takie stanowisko zmysłów zniewala nas do zachowania wielkiej ostrożności w spostrzeżeniach fizycznych, gdyż ono jest powodem rozlicznych złudzeń zmysłowych. Jeżeli jakiekolwiek zjawisko przedstawia się nam w takich warunkach, w jakich nie przywykliśmy czynić spostrzeżeń, wówczas tworzymy nieraz błędny sąd o jego zależności od innych zjawisk, tj. ulegamy złudzeniu zmysłowemu. Jest to jedna z przyczyn, dla których samo spostrzeganie zjawisk nie wystarcza do umiejętnego ich badania, lecz musi być dopełnione spostrzeżeniami, czynionemi w warunkach rozmaicie zmienianych, tak zw. doświadczeniami.

2. Doświadczenia. Wywołując jakiekolwiek zjawisko sztucznie, to jest, wśród warunków dowolnie przez nas wybranych, wykonywamy doświadczenie. Przebieg zjawiska nie jest bynajmniej od naszej woli zależny, nie leży to bowiem w naszej mocy zmieniać prawa lub własności materyi; w doświadczeniu dzieje się zawsze to samo, coby się stało w przyrodzie bez naszej przyczyny, gdyby się zdarzyły też same, co w doświadczeniu, warunki. Wybieranie warunków, w których zjawiska się odbywają, jest jednak od nas zależne i na tem wybieraniu polega umiejętność doświadczenia. Celem doświadczeń jest naprzód dokładne poznanie zjawisk, zarówno co do jakości, jak co do stosunków ilościowych. Drugim celem jest wyróżnienie zjawisk, to jest oddzielenie od zjawiska głównego, które badamy, innych zjawisk ubocznych, towarzyszących pierwszemu. Jeżeli badamy, dajmy na to, ruch ciał spadających ku ziemi, dostrzeżemy zawsze zjawisko uboczne, mianowicie ruch powietrza, towarzyszący spadaniu ciała; czynimy więc doświadczenie w naczyniu, z którego większą część powietrza wydalono za pomocą pompy pneumatycznej i znajdujemy zjawisko znacznie prostsze: gdy bowiem w powietrzu ciała gęste i zbite, n. p. kula ołowiana, spadały szybcej, aniżeli bardziej rozpostarte, jak papier lub pierze, w naczyniu wypróżnionem ruch wszystkich ciał będzie jednakowy.

Do spostrzeżeń umiejętnych i doświadczeń używa się całego szeregu tak zw. przyrządów naukowych i narzędzi. Niektóre służą do powiększenia zdolności naszych zmysłów, jak lunety, mikroskopy i t. p.; inne, jak podziałki, zegary, wagi, miary objętości, barometry, termometry, fotometry, bywają używane do wyznaczania stosunków ilościowych w zjawiskach, t. j. do mierzenia. Do przyrządów zalicza się także takie urządzenia doświadczalne, które, wskutek częstego a wielorakiego użytku, przybrały stałe formy, n. p. pompa pneumatyczna, machina elektryczna, ogniwa galwaniczne i t. p.

Mówiąc o ważności doświadczeń w badaniach przyrodniczych, nie możemy pominąć następującej ważnej uwagi. Przyws zystkich spostrzeżeniach, a w szczególności przy pomiarach rozmaitych własności ciał, popełniamy mniej lub więcej znaczne błędy; pomiar matematycznie dokładny jest niepodobieństwem. Przyczyną tego jest napr zód ograniczenie zmysłów naszych, które nie posiadają zdolności odróżniania zbyt drobnych różnic, przekraczających pewną granicę; naprzykład zdrowe oko nie poznaje różnic długości, mniejszych aniżeli (w przybliżeniu) $^1/_{20}$ millimetra. Drugą przyczyną błędów są nieuniknione wady i niedokładności przyrządów; trzecią, niezupełne wyróżnienie zjawiska badanego od towarzyszących mu zjawisk ubocznych. Jeżeli n. p. wymierzamy temperaturę, w której wrze czysta woda, przy pewnym stanie barometru, natenczas możemy spodziewać się błędu z następujących powodów: popełnimy naprzód błąd, oceniając okiem nieuzbrojonem, a choćby nawet przez szkła powiększające, stan słupka rtęciowego w termometrze; drugi błąd popełnimy z tego powodu, że podziałka w termometrze, choćby najstaranniej wykonana, nie będzie bezwzględnie dobra; wreszcie okaże się cały szereg błędów pochodzących z innych przyczyn: woda zawierać będzie ślady ciał obcych, zmieniających jej temperaturę wrzenia; stan barometru nie będzie dokładnie taki, jaki mieć pragnęliśmy i t. p. W miarę udoskonalenia przemysłu polepszają się przyrządy; w miarę rozwoju nauki poznajemy coraz nowe przyczyny błędów i uczymy się zmniejszać ich doniosłość. W najlepszych wszakże warunkach niemożemy liczyć na zupełnie dokładne spostrzeżenia. Posiadamy natomiast sposoby sprawdzania spostrzeżeń i upewniania się co do granic, w jakich błędy są zawarte; te są: zastosowanie różnorodnych i niezależnych od siebie sposobów badania i powiększenie liczby spostrzeżeń. Jeżeli, dajmy na to, zmierzymy kilkakrotnie długość pewnej linii, to z pomiaru wynikną np. takie liczby: 23·78 centymetrów, 23·79; 23·78; 23·77; 23·77, różniące się między sobą o małe wielkości, w dziesiątych millimetra. Nie mamy powodu, aby jednej z nich przyznać pierwszeństwo przed innemi; natomiast średnia wartość, uzyskana przez dodanie do siebie tych wielkości i podzielenie sumy przez ich liczbę (mianowicie 23·777), mieści w sobie zalety i wady wszystkich pomiarów i będzie prawdopodobnie dokładniejsza, aniżeli każdy pomiar z osobna.

Wypadki pomiaru kilkakrotnie powtórzonego pozwalają nam nadto ocenić, jaka jest jego dokładność. W ogólności, doświadczenie jest tylko wtedy zadowalniające, jeżeli, obok wyniku głównego, upewniliśmy się także, w jakich granicach błąd możebny jest zawarty. Wypadek każdego pomiaru daje się wyrazić liczbą, w której tylko pewna liczba miejsc dziesiętnych mieć będzie istotną wartość, odpowiadającą dokładności doświadczenia; dalsze lepiej opuścić, a podać natomiast granice, w których błąd może być zawarty.

3. Prawa przyrody. Badania doświadczalne, które uznajemy obecnie jako jedyną drogę, wiodącą do poznania przyrody, opierają się na ogólnej zasadzie, nabytej również sposobem doświadczalnym. Doświadczenia wiekowe całej ludzkości utrwaliły w nas przekonanie, że własności materyi są stałe i niezmienne, że w tych samych warunkach materya okazuje zawsze i wszędzie te same objawy. Uznając tę stałość i niezmienność, mówimy o prawach przyrody; one to stanowią istotne usprawiedliwienie metody doświadczalnej, albowiem dają wypadkom doświadczeń cechę ogólnie ważnej prawdy. Jeżeli wyznaczymy raz jeden np. temperaturę, w której żelazo się topi, to możemy być pewni, że w tej samej temperaturze ono topi się w piecach fabrycznych i w ziemi i na słońcu lub gwiazdach; w tej samej topiło się w starożytności i topić się będzie zapewne po wszystkie czasy. Prawa przyrody są wobec nas potęgą, której nie jesteśmy w stanie przełamać, jakkolwiek przez stosowne dobranie warunków możemy się nią posługiwać ku własnej korzyści. Stąd ogromna i ciągle rosnąca doniosłość tych nauk, które zajmują się odkrywaniem praw przyrody.

Prawa fizyczne, stosujące się nietylko do jednego, albo kilku zjawisk, ale obejmujące wielkie obszary nauki, nazywamy także zasadami. Są to zazwyczaj wnioski ogólne, streszczające w sobie wypadki licznych a różnorodnych doświadczeń; takiemi są np. zasady dynamiczne, zasada zachowania energii, zasada Carnota i inne.

4. Zadanie fizyki. Wszystko, co dotąd powiedzieliśmy, stosuje się do nauk przyrodniczych w ogóle, a więc i do fizyki. Zadaniem fizyki (od greckiego *physis,* przyroda) jest badanie własności materyi, bez względu na postać, jaką jej przyroda lub przemysł nadały, to jest bez względu na to, czy materya stanowi składową część wyrobu przemysłowego, czy organizmu żyjącego lub martwego, ziemi, morza lub gwiazd. To samo określenie stosuje się także do chemii; wskutek tego też fizyka razem z chemią stanowią podstawę dla innych nauk przyrodniczych, zajmujących się szczególnemi postaciami, jakie materya przybiera. Rozdział pomiędzy fizyką a chemią nie jest uzasadniony w określeniu tych nauk; powstał on wskutek ich odmiennego rozwoju dziejowego, a utrzymuje się wskutek konieczności podziału pracy na tak obszernem polu badań.

5. Metoda fizyki. Miary. Fizyka opisuje własności materyi w sposób ścisły; zalicza się z tego powodu do t. zw. nauk ścisłych. Podział nauk na ścisłe i nieścisłe nie dałby się pogodzić z pojęciem nauki, wszystkie bowiem są ścisłe, albo dążą do tego, aby były ścisłemi. Nazwa powyższa określa raczej metodę badań i sposób przedstawienia wypadków. Ścisłość tę należy tak zrozumieć, że fizyka opisuje własności materyi zarówno pod względem jakości, jak ilości, i określa prawa w taki sposób, że można je wyrazić wzorami matematycznymi i wyprowadzać z nich wnioski drogą matematycznej analizy.

Opisać jaką rzecz ilościowo, jest to wymierzyć ją, czyli porównać z inną rzeczą tego samego rodzaju, przyjętą za jednostkę miary. Liczba miar różnorodnych, używanych w fizyce do wymierzania rozmaitych wielkości, jest bardzo znaczna. Są np. miary długości, objętości, czasu, masy, ciężaru, gęstości, sprężystości, ciepła, różnych własności elektrycznych, magnetycznych i t. p. Niema jednak konieczności wybierać sobie dowolnie osobnej miary dla każdej z tych wielkości różnorodnych, tak, jak się przyjmuje n. p. metr, łokieć, lub inne dowolne jednostki do mierzenia długości. Pomiędzy różnemi wielkościami fizycznemi zachodzą bowiem zależności i związki, wskazane bądź to przez samo ich określenie, bądź też przez doświadczenie; pozwalają one wyprowadzić cały system miar fizycznych z niewielkiej liczby miar obranych dowolnie. Te miary obrane dowolnie nazywamy z a s a d n i c z e m i; najważniejszemi z nich są miary długości, masy i czasu (centymetr, gram i sekunda). Miary pól i objętości wyprowadza się z miary długości (centymetr kwadratowy, centymetr sześcienny); miarę prędkości ruchu z miar długości i czasu; miara ilości ciepła jest tą samą, co miara pracy — na zasadzie stwierdzonej doświadczeniem ich równoważności wzajemnej i t. p. Systemat miar fizycznych, wyprowadzony konsekwentnie z powyższych trzech miar zasadniczych, nazywa się niekiedy »układem bezwzględnym miar«.

Jednorodność równań fizycznych. Wymiary. Wszelkie równanie stwierdza równość dwu wielkości tego samego rodzaju. Jedna długość może być równa tylko innej długości; objętość, lub ilość ciepła, może równać się znowu tylko objętości lub ilości ciepła, a nigdy długości lub czasowi. W każdem też równaniu, wyrażającem związek między wielkościami fizycznemi, czy też prawo jakieś, strona lewa musi wyrażać wielkość tego samego rodzaju, jak prawa. Tak n. p. liczbę mierzącą długość s drogi przebytej w czasie t oblicza się jako iloczyn z liczb mierzących prędkość v i czas t: $s = vt$. Lewa strona wyraża pewną liczbę centymetrów, przeto i prawa musi mieć to samo znaczenie. Należy tedy wielkość v uważać jako stosunek pewnej długości do pewnego czasu $v = \frac{s}{t}$; powiadamy, że wymiar prędkości wyraża się symbolem cm/sek, podobnie, jak wymiarem pola jest cm^2, objętości cm^3 i t. p. Wymiar jest to formuła, wskazująca, jakie działanie arytmetyczne należy wykonać na danych pierwotnych, wyrażonych w jednostkach zasadniczych, ażeby obliczyć wartość tej lub owej wielkości fizycznej.

6. Miary zasadnicze. Wybór miar zasadniczych jest rzeczą poniekąd dowolną, potrzeba tylko, aby w tej sprawie panowała ogólna zgoda i porozumienie, inaczej bowiem wypadki pomiarów nie byłyby powszechnie rozumianemi. W tym względzie panuje najlepsza zgoda co do miar czasu, wszystkie bowiem narody ukształcone mierzą czas na doby, godziny, minuty i sekundy średnie. Jednostką czasu, używaną w fizyce jest sekunda $= \frac{1}{60}$ minuty $= \frac{1}{3600}$ godziny $= \frac{1}{86400}$ średniej doby. Miarami długości i mas (wagami) najbardziej rozpowszechnionemi są nowe francuskie, czyli metryczne miary. Największą zaletą, która zjednała im takie rozpowszechnienie w życiu praktycznem i nauce, jakiego dawniejsze miary nie miały, jest ich podział dziesiętny, zgodny z używanym powszechnie dziesiętnym sposobem liczenia. Pierwotnymi wzorami tych miar są metr i kilogram, wykonane z platyny i przechowywane w międzynarodowem Biurze Miar i Wag w Paryżu. Do mierzenia długości lub mas, znacznie większych, albo mniejszych, aniżeli metr lub kilogram, używa się często wielokrotności, albo ułamków tych miar pierwotnych, utworzonych zawsze według dodatnich lub ujemnych potęg liczby 10. W następującej tablicy podane są ważniejsze z tych miar, ich znaki skrócone, tudzież porównanie z niektóremi miarami dawniejszemi.

Długości:

1 kilometr (*km*) = 1000 metrów = 0·13473 $\left(\frac{1}{7\cdot422}\right)$ mil geogr. [1]

1 metr (*m*) = 10 decymetrów = 3·078444 $\left(\frac{1}{0\cdot3248394}\right)$ stóp paryskich

= 1·73611 $\left(\frac{1}{0\cdot576}\right)$ łokci nowopolskich

1 decymetr (*dm*) = 10 centymetrów

1 centymetr (*cm*) = 10 millimetrów

= 0·416666 $\left(\frac{1}{2\cdot4}\right)$ cala nowopolsk.

= 0·3694133 $\left(\frac{1}{2\cdot706995}\right)$ cala parysk.

= 0·39370432 $\left(\frac{1}{2\cdot5399772}\right)$ cala angiel.

1 millimetr (*mm*) = 0·5 ($\frac{1}{2}$) linii nowopol.

= 0·4432959 $\left(\frac{1}{2\cdot25583}\right)$ linii paryskiej

= 0·4724451 $\left(\frac{1}{2\cdot116648}\right)$ linii angielsk.

1 mikron (μ) (miara mikroskopowa)

= 0·001 $\left(\frac{1}{1000}\right)$ millimetra

1 mikromillimetr ($\mu\mu$) (miara molekularna)

= 0·000001 $\left(\frac{1}{1000000}\right)$ millimetra

---

[1]) Podajemy tu, jak w wielu dalszych tablicach, wartości wyrażone w ułamkach dziesiętnych, nadto zaś, w nawiasie, te same wartości pod postacią zwyczajnego ułamka; mianownik jego jest odwrotnością ułamka dziesiętnego.

Masy:

1 tonna (t) = 10 centnarów metrycznych = 1000 kilogramów.

1 kilogram (kg) = 100 dekagramów = 1000 gramów =

$$= 2{\cdot}46607 \left(\frac{1}{0{\cdot}405504}\right) \text{ funt. nowop.}$$

1 gram (gr) = 1000 milligramów (mgr).

Używanie miar, będących wielokrotnościami lub ułamkami metra i kilograma, dobranych odpowiednio do wielkości mających się mierzyć długości lub mas, jest z tego powodu dogodne, że można uniknąć zbyt wielkich lub zbyt małych liczb. Przy wykonywaniu rachunków należy jednak wszystkie liczby sprowadzać do tej samej miary. Redukcye te, łatwe dla miar zasadniczych, stają się dość zawiłemi, gdy chodzi o miary pochodne, któremi mierzy się inne wielkości fizyczne. Z tego powodu zgodzono się powszechnie mierzyć rozmaite własności materyi za pomocą miar, utworzonych na podstawie pewnych określonych jednostek dla wielkości zasadniczych, i wybrano w tym celu centymetr, gram i sekundę. Układ miar fizycznych, oparty na tych trzech jednostkach zasadniczych, nazywa się układem centymetr-gram-sekundowym (inaczej także, lub mniej właściwie, układem bezwzględnym); jednostki, należące do tego układu, oznacza się w skróceniu znakiem: *c. g. s.*

W dalszym wykładzie będziemy używali innych jednostek tylko w tym celu, aby jaśniejsze dać wyobrażenie o jakiej wielkości. N. p. odległość ziemi od słońca wynosi około 149·5 milionów kilometrów; do rachunków, w których ta odległość zachodzi, wstawiać będziemy natomiast liczbę:

14 950 000 000 000 centymetrów,

albo krócej $= 1{\cdot}495 \times 10^{13}$ *cm.* Obaczymy później, że niedogodność, wynikająca ze zdarzającej się często potrzeby wypisywania wielu zer, wynagradza się sowicie prostotą rachunku i jasnością związku pomiędzy różnemi miarami.

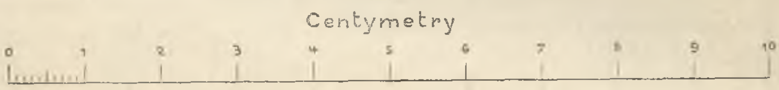
Twórcy układu metrycznego miar zamierzali pierwotnie wziąć za jednostkę mas, czyli wag, masę pewnej określonej objętości wody, mającej tę temperaturę, w której ona jest najgęstsza (blizko 4^0 C). W tej myśli sporządzono wspomniany wyżej platynowy kilogram wzorowy, odważając go tak, żeby ważył (w próżni) tyle, co jeden sześcienny decymetr (zwany także litrem = 1000 sześciennych centymetrów) wody, mającej temperaturę 4° C. Późniejsze dokładniejsze ważenia okazały wprawdzie, że pierwotny kilogram nie został zupełnie ściśle odważony, jednak błąd popełniony jest tak drobny, że dla wszelkich praktycznych celów, nie wymagających najwyższej dokładności, jaką dziś można w ważeniu osiągnąć, możemy przyjąć następujące określenie:

Kilogram jest to masa równa masie wody, mającej pod ciśnieniem atmosferycznem i w temperaturze 4° C[1]) *objętość jednego litra.*

Z tego określenia wynika następująca tabliczka, w której podane są wagi rozmaitych objętości wody (znaki m^3, dm^3, cm^3, mm^3, oznaczają sześcienne metry, decymetry, centymetry i millimetry):

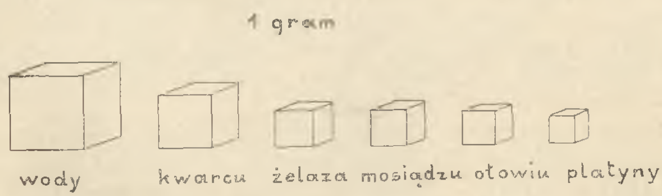
1m^3	wody waży 1 *t*,	1 cm^3	wody waży 1 *gr*,
1dm^3 (litr)	» » 1 *kg*,	1 mm^3	» » 1 *mgr*.

W celu uzmysłowienia zasadniczych miar długości podajemy na ryc. 1-ej odcinek podzielony na 10 centymetrów, z których pierwszy podzielony jest na 10 millimetrów.



Ryc. 1.

Ryc. 2-ga wyobraża, w prawdziwych rozmiarach, ciężarki sześcienne, ważące każdy 1 gram,



Ryc. 2.

wykonane z różnych materyałów.

Celem uzmysłowienia sekundy nadmieniamy, że uderzenia tętna u zdrowego człowieka następują zwykle w przybliżeniu co $\frac{2}{3}$ sek.

---

[1]) C oznacza stustopniową podziałkę termometryczną, wprowadzoną przez Celsyusza.

Podstawą miar czasu są zjawiska astronomiczne, mianowicie dzienny obrót ziemi około osi i jej roczny obieg około słońca. Pierwszy z tych ruchów odbywa się jednostajnie i jest przyczyną pozornego dziennego obrotu kuli niebieskiej, od wschodu ku zachodowi, razem z gwiazdami, które na niej widzimy, ze słońcem, księżycem i planetami.

Drugi ruch ziemi sprawia, że położenie słońca na pozornej kuli niebieskiej zmienia się zwolna a nieustannie; słońce zdaje się posuwać wśród gwiazd stałych i okrąża w ciągu roku pozorną kulę nieba na kole wielkiem, skośnie względem równika niebieskiego leżącem, zwanem ekliptyką. Słońce posuwa się po ekliptyce od zachodu ku wschodowi, a więc w kierunku przeciwnym ogólnemu, codziennemu ruchowi gwiazd, cofa się zatem względem gwiazd ku wschodowi. Dzienny obieg którejkolwiek z gwiazd, mających nieruchome na kuli niebieskiej stanowisko (stałych), jest dokładnem odźwierciedleniem dziennego obrotu ziemi i posiada to samo trwanie; czas odpowiadający jednemu obrotowi nazywamy dniem gwiazdowym. Roczny pozorny obieg słońca na ekliptyce (licząc od wiosennego przejścia przez równik, do następnego przejścia wiosennego) trwa 366·242201 dni gwiazdowych, który to okres nazywamy rokiem zwrotnikowym. Wskutek ciągłego cofania, czyli opóźniania się słońca względem gwiazd, jeden obieg słońca (tak zw. dzień słoneczny prawdziwy) trwa dłużej, aniżeli dzień gwiazdowy. Ponieważ w ciągu roku zwrotnikowego to cofanie się słońca dosięga całego obwodu kuli niebieskiej, przeto łatwo zrozumieć, że liczba obrotów dziennych słońca, przypadających na rok zwrotnikowy, jest o jeden obrót mniejsza (zatem 365·242201), aniżeli liczba obrotów gwiazd. Pojmiemy to najłatwiej, przypuszczając, że słońce się nie cofa, że idzie razem z gwiazdami, a z końcem roku cofa się odrazu o jeden obrót.

Prawdziwa doba słoneczna nie jest stałym okresem czasu, z powodu, że cofanie się słońca na ekliptyce, odźwierciedlające rzeczywisty roczny obieg ziemi około słońca, nie odbywa się jednostajnie. Wyobraźmy sobie jednak, że rok zwrotnikowy podzielono na tyle części równych, ile w tym czasie przypada dziennych obrotów słońca (t. j. na 365·242201), a uzyskamy tym sposobem podział czasu na równe części, mające nadto zaletę, w praktyce nader cenną, że trwanie ich mało się różni od prawdziwych dni słonecznych.

Okresy te nazywamy dobami średniemi, dzielimy je na 24 godzin średnich, mających po 60 minut średnich, z których każda zawiera 60 średnich sekund. Ważną jest rzeczą poznać stosunek pomiędzy dobą średnią a dobą gwiazdową (okresem obrotu ziemi), albowiem dzienny ruch gwiazd stałych najlepiej nadaje się do sprawdzania zegarów. Według poprzedzającego wyjaśnienia 365·242201 dni średnich $= 366{\cdot}242201$ dni gwiazdowych, zatem: 1 dzień średni $= \dfrac{366{\cdot}242201}{365{\cdot}242201}$ dni gwiazdowych; nawzajem, dzień gwiazdowy, czyli okres obrotu dziennego ziemi, trwa $\dfrac{365{\cdot}242201}{366{\cdot}242201}$ dni średnich, t. j.

23 godz. 56 min. 4·091 sekund średn.,
albo 86164·091 sekund średnich.

Miary metryczne długości i mas powstały we Francyi, w ostatnich latach wieku XVIII-go. Wskutek uchwały, powziętej w Zgromadzeniu ustawodawczem francuskiem w r. 1790, Akademia Umiejętności w Paryżu wybrała komisyę, w której skład weszli uczeni Borda, Condorcet, Lagrange, Laplace i Monge, poruczając jej wypracowanie układu miar. Postanowiono, że rzeczywistą jednostką długości ma być długość ćwiartki południka ziemskiego, przechodzącego przez Paryż; do powszechnego zaś użytku służyć ma jednostka mniejsza (metr), będąca dziesięciomilionową częścią tamtej. Celem znalezienia długości metra Méchain i Delambre rozpoczęli w r. 1792 obszerne pomiary geodezyjne, których ostatecznym wypadkiem był wzorowy metr »archiwowy«, sporządzony w r. 1799. Z późniejszych pomiarów i obliczeń okazało się, że pierwotny zamiar, podług którego długość ćwiartki południka ziemskiego miała być rzeczywistą jednostką długości, nie został ściśle spełniony; ćwiartka południka jest w rzeczywistości nieco dłuższa, aniżeli 10 milionów metrów (wynosi ona około 10002000 metrów). Wzorową miarą jest tedy platynowy metr paryski, na rzekomy zaś związek jego z rozmiarami ziemi nie zwraca się już uwagi. (Patrz Baraniecki, Arytmetyka Rozdział IV). [Obrany za podstawę zasadniczej miary długości wzorowy metr »archiwowy« nie odpowiada dwom bardzo ważnym warunkom: nie jest ani zupełnie trwały ani dość niezmienny. Materyał, z jakiego go zrobiono, może ulegać bardzo wolnym zmianom, które usuwają się z pod naszej kontroli. Sprawdzenie jego długości przez ponowny pomiar południka nie dawałby też dostatecznych gwarancyi, ponieważ nie wiemy, jakim zmianom ulegają rozmiary ziemi. Około r. 1870 pojawił się podany przez Goulda projekt, aby za podstawę zasadniczej miary długości użyć wielkości niezależnej od materyi, mianowicie długości fali świetlnej. Projekt ten wykonał uczony amerykański A. A. Michelson. Dziś wiadomo, że metr normalny w powietrzu ma w temperaturze 15° C. pod ciśnieniem atmosferycznem długość taką, iż zmieści się na nim ciąg 1553163·5 fal czerwonych, wysyłanych przez świecącą parę kadmu.

O pochodzeniu kilograma archiwowego i o związku metrycznych wag z miarami długości była już wyżej mowa. Dokładne ważenia, wykonane ostatniemi czasy, wykazały, że waga decymetra sześciennego wody, w temperaturze 4° C., wynosi blizko 0,99996 *kg.*]

7. Teorye. Hipotezy. Na ścisłem wymierzeniu przebiegu zjawiska fizycznego zadanie fizyki bynajmniej jeszcze się nie kończy. Ono należy do fizyki praktycznej; rzeczą fizyki umiejętnej, albo teoretycznej, będzie określić stosunek danego zjawiska do innych zjawisk pokrewnych, tudzież wynaleźć możliwie proste orzeczenie, streszczające w sobie wzajemną zależność tych zjawisk, w sposób tak ścisły i dokładny, iżby na tej zasadzie można było przewidzieć i przepowiedzieć ich przebieg zapomocą logicznego (matematycznego) rozumowania. Zrozumieć zjawiska w taki sposób znaczy to podać ich teoryę, albo wyjaśnić, wytłumaczyć je. Newton okazał, że niesłychanie zawiłe ruchy ciał niebieskich można zrozumieć, wytłumaczyć, skoro się przyjmie orzeczenie, że wszelkie dwie cząstki materyi przyciągają się w stosunku prostym do swych mas, w odwrotnym do kwadratu odległości. Na zasadzie tego prostego orzeczenia można przepowiadać ruchy planet, ono bowiem streszcza w sobie całą teoryę ich ruchu.

Orzeczenie Newtona można było sprawdzić zapomocą prób bezpośrednich, doświadczeń, wykonanych w pracowni. Częstokroć jednak, ażeby znaleźć trafne a dostatecznie ogólne orzeczenie, przydatne do teoretycznego zrozumienia jakiej grupy zjawisk, wypadało sięgać poza obręb bezpośredniego doświadczenia, zmyślać stosunki, nie dające się wprost sprawdzić, które jednak, gdyby rzeczywiście zachodziły, musiałyby wywołać te objawy, jakie istotnie spostrzegamy. Takie domniemane założenia nazywamy hipotezami. Ażeby wytłumaczyć własności chemiczne i fizyczne ciał stworzono hipotezę, że materya składa się z oddzielnych atomów; ażeby zdać sprawę z różnorodnych zjawisk świetlnych przyjęto istnienie niedostrzegalnego ośrodka, eteru, w którym światło rozchodzi się w postaci fal. Jedynym probierzem trafności każdej hipotezy jest to, żeby prowadziła do zjawisk istotnie dostrzeganych, a nie była sprzeczną z żadnem. Pytanie, czy stosunki założone w hipotezie zachodzą rzeczywiście, czy nie, jest małego znaczenia dla fizyki. Możnaby na nie odpowiedzieć wtedy dopiero, gdyby się znalazł jakiś fakt sprzeczny z daną hipotezą, ale wtenczas upadłaby sama hipoteza. Hipotezy nie mają w istocie innego znaczenia, jak kunsztowne a mniej dostępne wyobraźni formuły matematyczne, streszczające w sobie wszystko, co o danym dziale zjawisk powiedzieć można.

8. Podział fizyki. Wykład fizyki można podzielić na dwa główne działy: na fizykę ogólną i szczegółową. Dział pierwszy, będący zarazem wstępem do obszernego działu drugiego, obejmuje te zjawiska i własności materyi, które nie są zależne od rodzaju materyi, t. j. które się stosują jednakowo do drzewa, żelaza, wody, powietrza, do ciał stałych i płynnych, zimnych i gorących, jasnych i ciemnych i t. d. Możemy odjąć ciałom w myśli wszelkie ich cechy szczegółowe, któremi one różnią się od siebie, a pozostawić tylko różnice masy. Zjawiska określające się samą tylko masą ciał, stanowią treść fizyki ogólnej; tu należą zjawiska ruchu, zależność ich od sił działających na ciała, ogólna nauka o energii, ciężkość i grawitacya. W następującym wykładzie dział ten mieści się w części pierwszej.

Fizyka szczegółowa zajmuje się szczególnemi własnościami materyi i zależnemi od nich postaciami energii, mianowicie: część druga obejmować będzie dynamiczne własności materyi czyli zachowanie się różnych ciał wobec sił; część trzecia: ciepło, mianowicie jego działanie na materyę, ruch, teoryę ciepła i naukę o źródłach jego; część czwarta: fizykę molekularną, czyli naukę o budowie materyi i o energii wewnętrznej; część piąta: promieniowanie, t. j. naukę o energii promienistej i o własnościach ciał ze względu na promieniowanie; część szósta: elektryczność i magnetyzm. Część druga, trzecia i czwarta obejmują t. zw. fizykę materyi, piąta i szósta fizykę eteru.

CZĘŚĆ PIERWSZA.

FIZYKA OGÓLNA.

ROZDZIAŁ I.

O ruchu.

9. Prędkość. Pośród nieskończenie różnorodnych ruchów, jakie zdarzają się w przyrodzie, wybierzemy na początek takie, przy których dość jest wiedzieć, w jaki sposób porusza się jeden punkt ciała, aby poznać ruch ciała całego. Jeżeli pociąg kolejowy porusza się po znanym torze, to możemy każdej chwili wskazać położenie pociągu, skoro będzie wiadomo, gdzie znajduje się np. latarnia, umieszczona na przodzie pociągu. Częstokroć możemy całe ciało uważać jakoby punkt, zwłaszcza, jeżeli ciało jest małe, albo jeżeli nie chodzi o rozmiary, a tylko o zmianę położenia względem innych ciał; ruch, dajmy na to, ziarnka śrutu, wystrzelonego w powietrze, możemy dość dobrze określić ruchem punktu. Przy takiem ograniczeniu się wystarczy wiedzieć, gdzie się ciało każdej chwili znajduje, albo, co na jedno wychodzi, znać linię, czyli tor, po którym ono się porusza, tudzież prędkość ruchu.

Wartość prędkości ruchu wynika z porównania długości, czyli dalekości drogi przebytej, z czasem, w ciągu którego to się stało, to jest z trwaniem ruchu. *Jeżeli ciało przebywa równe, choćby najkrótsze, części drogi, w czasach równych, wtenczas ruch nazywa się jednostajnym*, a prędkość ruchu *stałą*. Ruch taki jest ciągłem i jednostajnem posuwaniem się ciała, bez przyśpieszania ani zwalniania biegu; (ruchy skaczące, jakiemi niektóre ciała przebywają jednakowe dalekości w równych okresach czasu, nie są jednostajne, albowiem w tym przypadku równość dróg stosuje się tylko do pewnych określonych, a nie do jakichbądź czasów). Ruchem jednostajnym jest np. ruch opisany w następującej tablicy:

Czas upływający od zaczęcia się ruchu	Długość drogi przebytej
3 *sek*	5·25 *cm*
6 »	10·50 »
9 »	15·75 »
10 »	17·50 »
12 »	21·00 »
i t. d.	i t. d.

albowiem drogi przebyte w ciągu równych czasów mają jednakową długość. W sposób podobny do powyższego tablice dróg żelaznych opisują ruchy pociągów. Łatwo jednak dostrzedz, że długi szereg liczb, objętych powyższą tablicą, daje się sprowadzić do jednej liczby. Dzieląc bowiem długości dróg przez należące do nich czasy, otrzymujemy za każdym razem tę samą liczbę: $= \frac{5·25}{3} = \frac{10·5}{6} = \frac{15·75}{9} = \frac{17·5}{10} = \cdots = 1·75$. Liczba ta, określająca długość drogi przebytej w ciągu czasu $= 1$, nazywa się p r ę d k o ś c i ą ruchu jednostajnego. Znając kształt drogi, jej początek, kierunek ruchu, chwilę zaczęcia się ruchu i jego prędkość, wiemy wszystko, co o danym ruchu jednostajnym powiedzieć można.

Oznaczywszy ogólnie: przez t czas trwania ruchu, przez s długość drogi przebytej w tym czasie, przez v prędkość ruchu, mamy wskutek powyższego określenia: $v = \frac{s}{t}$, tudzież $s = vt$, $t = \frac{s}{v}$; ostatnie dwa równania pozwalają obliczyć bądź długość drogi, jeżeli znamy prędkość i czas, bądź też czas, jeżeli droga i prędkość są dane.

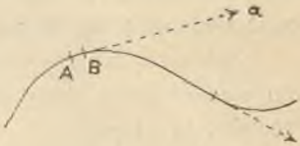
Miary prędkości. Wartość liczby *v*, określającej prędkość ruchu, zależy od tego, jakich jednostek używamy do mierzenia dróg i czasów; oto w tym samym ruchu możemy wyrazić tę samą prędkość następującemi liczbami: 15 centymetrów na sekundę, albo 1·5 decymetrów na *sek*, albo 0·15 metrów na *sek*, albo 9 metrów na minutę i t. d. Dla objaśnienia liczby, przedstawiającej prędkość, należy więc wymienić jednostki długości i czasu, które do znalezienia jej służyły. Będziemy w tym celu używali następującego oznaczenia: $v = 15 cm/sek$, albo $9 m/min$ i t. d. Znak *cm/sek* wskazuje działanie rachunkowe, zapomocą którego uzyskaliśmy liczbę *v*: podzieliliśmy mianowicie liczbę mierzącą drogę, wyrażoną w centymetrach, przez liczbę mierzącą czas, wyrażony w sekundach. Jednocześnie służyć nam będzie ten sam symbol *cm/sek* do oznaczenia jednostki prędkości, podobnie, jak znakami *cm*, *sek* oznaczamy jednostki długości i czasu. Prędkość możemy bowiem tylko z prędkościami porównywać; jednostką prędkości nie może być ani *cm*, ani *sek*, tylko pewna prędkość, przyjęta za jednostkę. W układzie *c. g. s.* taką jednostką prędkości jest *cm/sek*. Tenże sam symbol wyobraża wymiar prędkości (ust. 5).

W następującej tablicy podane są niektóre ważniejsze prędkości; oprócz prędkości ruchów ciał są tam także prędkości rozchodzenia się niektórych zjawisk fizycznych, jak np. głosu i inne.

Tablica prędkości w *cm/sek*.

Człowiek pieszo, około	120
Zwykły wiatr	500
Silny wiatr	1 000
Koń wyścigowy	1 500
Lot gołębia	1 800
Burza	2 500
Pociąg pośpieszny	3 000
Orkan	4 000
Głos w powietrzu	34 000
Punkt na równiku ziemi, wskutek dziennego obrotu	46 300
Kula armatnia	50 000
Księżyc około ziemi	101 200
Głos w wodzie	143 500
Ziemia około słońca	2 960 000
Światło w wodzie	22 546 000 000
» w powietrzu	29 980 000 000
» w próżni	29 989 000 000

10. Kierunek prędkości. Kierunkiem prędkości nazywamy kierunek, w którym ruch się odbywa. Jest on tylko wtenczas niezmienny, jeżeli ciało porusza się po linii prostej, nie cofając się. W każdym ruchu, odbywającym się po linii zakrzywionej, kierunek prędkości zmienia się nieustannie. Mając wyznaczyć kierunek prędkości w punkcie np. A, drogi zakrzywionej (ryc. 3), bierzemy w pobliżu punktu A odcinek toru AB, tak krótki, żeby nie można było odróżnić go od odcinka prostego; kierunek tego odcinka wskazuje kierunek prędkości w uważanym punkcie toru. Linia prosta, wynikająca z przedłużenia takiego odcinka, zowie się styczną do krzywej, należącą do punktu A. *Kierunkiem prędkości ruchu na torze zakrzywionym nazywamy kierunek stycznej, wykreślonej w tym punkcie, w którym ciało w uważanej chwili się znajduje.*



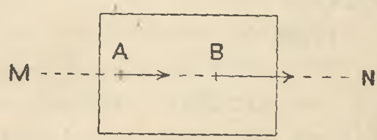
Ryc. 3.

Prędkości ruchów, jako wielkości mające właściwe sobie kierunki, możemy w rysunku wyobrażać zapomocą odcinków prostych, ze strzałkami wskazującemi kierunek ruchu (ryc. 3, Aa). Odcinkom tym daje się taką długość, aby przedstawiały wartość prędkości w porównaniu do umówionej podziałki; stosownie do mniejszych lub większych rozmiarów rysunku oznacza się jednostkę prędkości odcinkiem 1 *mm*, albo *cm* i t. p. Wszelkie wielkości, dające się, podobnie jak prędkość, wyobrazić na rysunku zapomocą odcinków opatrzonych strzałkami, określające się liczebną wartością i kierunkiem, nazywać będziemy *wielkościami kierunkowemi* albo *wektorami*.

11. Ruch względny. Aby określić dostatecznie ruch, jaki ciało w pewnej chwili posiada, potrzeba nakoniec, obok wartości i kierunku prędkości, wiedzieć względem jakiego ciała ruch bywa uważany. Człowiek, przechadzający się na pokładzie statku, płynącego rzeką, posiada inną prędkość względem statku, inną zaś względem ziemi; stojąc nieruchomo posiada względem statku prędkość zero, względem ziemi zaś taką samą, jak statek; gdy zaś idzie od przodu ku tyłowi statku, z taką prędkością, jaką statek posiada względem ziemi, wtenczas jest znowu względem ziemi nieruchomy. Ruch, jaki jedno ciało posiada względem drugiego, nazywamy ruchem względnym, nie troszcząc się, czy to drugie ciało spoczywa, czy się względem innych ciał porusza. Ponieważ nie znamy ciał bezwzględnie nieruchomych, ani umiemy naznaczyć miejsc lub kierunków w przestrzeni, bez względu na ciała znajdujące się tamże, przeto *wszelkie ruchy, jakie znamy, są ruchami względnymi*; ciała poruszają się względem ziemi, ziemia względem słońca, słońce względem gwiazd i t. d. Żadne z tych ciał nie może stanowić podstawy dla ruchu bezwzględnego.

Zastanowimy się obecnie, jak znaleźć ruch dwu ciał względem siebie, jeżeli dany jest ruch każdego z nich względem ciała trzeciego, np. ziemi.

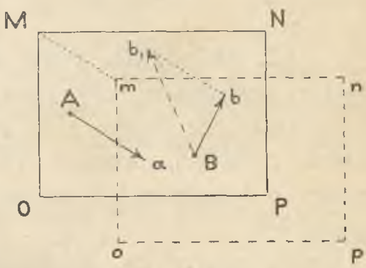
Niechaj ciała A i B (ryc. 4) poruszają się na tej samej linii prostej MN, w jednakowym kierunku. Celem uzmysłowienia ruchu względnego, przypuśćmy, że A jest przytwierdzone do ruchomej tablicy lub stołu, B zaś porusza się swobodnie. Prędkość ciała A razem ze stołem, wynosi, dajmy na to 5 *cm/sek* (względem ziemi), ciała B (tak samo) 7 *cm/sek.* Po upływie 1 *sek* zajmują one nowe miejsca, posunięte na prawo, jedno o 5, drugie o 7 *cm*; odległość pomiędzy ciałami zwiększyła się w ciągu 1 *sek* o 2 *cm* i o tyleż zwiększa się w ciągu każdej następnej. Z tego wynika, że B oddala się od A, a prędkość ciała B względem A (albo względem stołu) wynosi 2 *cm/sek* (ku prawej), równa się zatem różnicy prędkości B i prędkości A. Przypuśćmy dalej, że prędkość A wynosi np. 10 *cm/sek*, prędkość B mniej, dajmy na to 6 *cm/sek*, w tym samym kierunku. Jeżeli, jak przedtem, odejmiemy prędkość A od prędkości B, to znajdziemy — 4 *cm/sek*; w istocie, liczba ta daje znowu prędkość B względem A, a nadto znak — wskazuje, że prędkość względna (B zbliża się ku A) posiada kierunek przeciwny temu, który uważaliśmy jako dodatni. Z tych przykładów łatwo wysnuć ogólne prawidło: *aby znaleźć prędkość względną, należy od prędkości ciała uważanego odjąć prędkość tego ciała, względem którego ruch się liczy.*



Ryc. 4.

Osobno zastanowimy się nad przypadkiem, kiedy ciała A i B poruszają się w jakichbądź kierunkach, a nie po tej samej linii prostej.

Prędkość ciała A, a zarazem podstawy $MNOP$, niechaj wyobraża linia Aa (ryc. 5); nad podstawą porusza się B, z prędkością Bb. Aby znaleźć prędkość B względem A, albo względem podstawy, zważmy, że po upływie 1 *sek* podstawa zajmie nowe położenie *mnop*, zaś B przyjdzie do b. Punkt ten znajduje się teraz nad tem miejscem podstawy, które było pierwotnie w b_1; linia bb_1 jest oczywiście równa Aa, zaś kierunek od b do b_1 jest przeciwny kierunkowi strzałki a. Połączywszy B i b_1, otrzymamy zatem drogę względną, jaką punkt B opisuje nad podstawą; droga ta przedstawia zarazem prędkość względną, gdyż była przebyta w ciągu 1 *sek*. Niechaj ciało B będzie np. kawałkiem kredy, która poruszając się nad podstawą, zostawia na niej ślad; gdyby A było nieruchome, ślad ten szedłby od B ku b; gdy zaś A porusza się razem z podstawą, zostanie inny ślad, (wskazujący ruch względny), mianowicie od B do b_1. Gdyby w A stał człowiek, posuwający się razem z podstawą, zobaczyłby ruch Bb_1, to jest ruch względny. Z tych uwag wynika następujące wykreślenie, dające prędkość w ruchu względnym: *do końca odcinka* (Bb), *wyobrażającego prędkość ciała, przystawiamy drugi* (bb_1), *wyobrażający prędkość podstawy, wziętą w kierunku odwrotnym; linia, łącząca początek pierwszego z końcem drugiego odcinka, daje prędkość względną.*



Ryc. 5.

Rozszerzając pojęcie odejmowania, którego używaliśmy do znalezienia prędkości względnej, w przypadku ruchów mających jednakowy kierunek, nazwiemy powyższe postępowanie odejmowaniem geometrycznem (prędkości Aa od prędkości Bb); prawidło, znalezione poprzednio dla ruchów o spólnym kierunku, będzie się wówczas stosowało ogólnie.

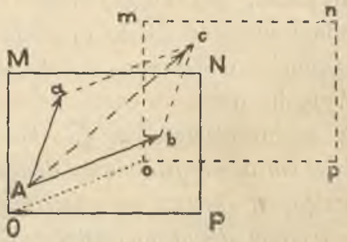
Odejmowanie geometryczne wielkości kierunkowych, jakiemi są prędkości Aa i Bb, będziemy oznaczali równaniem $\overline{Bb} - \overline{Aa} = \overline{Bb_1}$ kreski umieszczone nad znakami tych wielkości oznaczają, że nietylko długości odcinków Aa i Bb mają być uwzględnione przy odejmowaniu, lecz i kierunki. Bez tego zastrzeżenia powyższe równanie nie byłoby prawdziwe, albowiem różnica długości odcinków Bb i Aa nie jest równa długości Bb_1.

Pozorny ruch słońca, gwiazd, księżyca, jest ruchem względnym, mianowicie względem ziemi, której ruchów nie jesteśmy świadomi. Słońce idzie codziennie od wschodu ku zachodowi; ziemia obraca się w rzeczywistości od zachodu ku wschodowi.

Stojąc nieruchomo, widzimy krople deszczu, w spokojnem powietrzu, spadające pionowo na dół; też same krople uderzają nas skośnie w twarz, gdy idziemy szybko naprzód. Odjąwszy od prędkości pionowej poziomą, przekonamy się, że tak być powinno. Kula, wystrzelona z brzegu do statku płynącego rzeką, w kierunku prostopadłym do statku, przebija go skośnie, od przodu ku tyłowi.

12. Składanie, czyli dodawanie prędkości. Zagadnienia ruchu względnego dały nam sposobność odejmowania prędkości i wskazały, że działanie to może być także stosowane do prędkości, mających dowolne kierunki; w niniejszym ustępie będzie mowa o zagadnieniach, które się rozwiązuje zapomocą dodawania prędkości.

Często zdarza się, że ruch ciała składa się z kilku ruchów, odbywających się jednocześnie; zadaniem naszem jest wtenczas znalezienie rzeczywistej, czyli w y p a d k o w e j prędkości ruchu.



Ryc. 6.

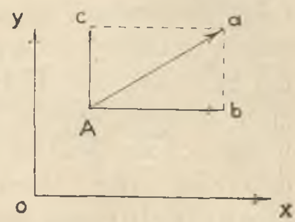
Jeżeli np. ciało A (ryc. 6) porusza się na podstawie $MNOP$ z prędkością Aa względem podstawy, a podstawa porusza się jednocześnie względem ziemi w jakimbądź kierunku, z inną prędkością Ab, wtenczas znajdziemy prędkość, jaką ciało posiada w położeniu A względem ziemi, w następujący sposób. Wyobraźmy sobie, że oba ruchy trwają z niezmiennemi prędkościami przez 1 *sek;* odcinki Aa i Ab przedstawiają wówczas drogi przebyte. Ciało posuwa się na podstawie do a, ponieważ jednak podstawa i wszystko, co się na niej znajduje, przesuwa się jednocześnie do *mnop,* przeto ów punkt a zajmie względem ziemi położenie c, które znajdziemy, kreśląc ac równolegle do Ab i odcinając $ac=Ab$. Linia Ac jest drogą, którą ciało przebyło względem ziemi w ciągu 1 *sek;* linia ta wyobraża zatem wypadkową prędkość ciała, podobnie jak Aa i Ab przedstawiały prędkości ruchów składowych.

Wykreślenie, zapomocą którego znajduje się prędkość wypadkową, nazywa się dodawaniem geometrycznemi prędkości składających ruch dany. Dodawanie wielkości kierunkowych (wektorów) uskutecznia się w ten sposób, że do końca jednego z odcinków składowych Aa przystawiamy drugi, $ac=Ab$, we właściwym mu kierunku; linia Ac, łącząca początek pierwszego z końcem drugiego odcinka, stanowi ich sumę geometryczną. Wyrazimy to równaniem: $\overline{Aa}+\overline{ac}=\overline{Ac}$, albo $\overline{Aa}+\overline{Ab}=\overline{Ac}$. Dodawanie geometryczne dwu odcinków nazywa się także wykreśleniem równoległoboku, albowiem suma geometryczna odcinków Aa i Ab równa jest co do długości i posiada ten sam kierunek, co przekątna Ac równoległoboku $Aacb$, którego dwa boki wyobrażają dane odcinki. Suma geometryczna kilku odcinków nazywa się także ich wypadkową.

Prędkość wypadkowa ciała, które ulega kilku jednoczesnym ruchom, jest zatem sumą geometryczną prędkości ruchów składowych. Dowiedliśmy tego dla dwu ruchów składowych, nie trudno jednak przekonać się, że prawidło to jest ważne dla jakiejbądź liczby ruchów. (Uważamy w tym celu kilka podstaw poruszających się: na pierwszej porusza się ciało, ta zaś razem z ciałem porusza się na drugiej podstawie ruchomej i t. d.).

Postępowanie przy dodawaniu kilku wielkości kierunkowych wynika odrazu z poprzedzającego: do końca pierwszego odcinka przystawiamy linię równą drugiemu i równoległą do niego; do końca tej linii następną, która wyobraża odcinek trzeci i t. d. Odcinek łączący początek z końcem wieloboku uzyskanego w ten sposób, przedstawia szukaną sumę pod względem wielkości i kierunku. Gdyby się zdarzyło, że wielobok się zamknie, t. j. że koniec ostatniego odcinka zejdzie się z początkiem pierwszego, wtenczas suma geometryczna danych odcinków będzie równa zeru. To ma miejsce np., gdy dwa odcinki mają równe długości, a przeciwne kierunki.

13. Rozkładanie prędkości. Opisanie ruchu bywa nieraz prostsze i bardziej zrozumiałe, jeżeli zamiast prędkości ciała podamy jej składowe, t. j. takie prędkości, których suma geometryczna równa się danej prędkości. Jeżeli np. wiatr wieje od strony, leżącej pośrodku między północą a wschodem, zatem w kierunku nie mającym osobnej nazwy, wtenczas powiadamy, że wiatr jest północno-wschodni. Wyraz ten oznacza, że ruch powietrza odbywa się jednocześnie od północy i od wschodu, t. j. że prędkość ma składową północną i składową wschodnią. Postępowanie takie, polegające na wynalezieniu składowych prędkości, mających pewne wybrane kierunki, nazywa się rozkładaniem prędkości. Jeżeli są dane dwa kierunki, np. Ox i Oy (ryc. 7) i prędkość Aa, wtenczas znajdziemy składowe Ab i Ac, równolegle do tych kierunków, kreśląc równoległobok $Abac$, którego przekątną jest linia Aa, a boki są równoległe do Ox i Oy. Jeżeli kierunki Ox i Oy tworzą kąt prosty $xOy = 90^0$, a kąt pomiędzy kierunkiem prędkości i kierunkiem Ox wynosi α, wtenczas wartości składowych możemy obliczyć według następujących wzorów.



Ryc. 7.

$$Ab = Aa \,.\, \cos \alpha$$
$$Ac = Aa \,.\, \sin \alpha$$

Prędkości składowe mogą mieć kierunki prostopadłe do siebie, albo ukośne. Rozkładanie w kierunkach prostopadłych do siebie zdarza się najczęściej. W tym razie używamy skróconego wyrażenia: »składowa w kierunku Ox«, rozumiejąc, że prędkość ma być rozłożona na dwie składowe, z których jedna jest równoległa do Ox, druga prostopadła do tego kierunku.

Zadania.

1) Pociąg przebiega w ciągu godziny, ruchem jednostajnym, drogę 45 *km.* podać jego prędkość. *Odp.* 1250 *cm/sek.*

2) Jakiego czasu potrzeba na przebycie 432 *km*, z prędkością 1192 *cm/sek?* *Odp.* 10 godzin, 4 minuty, 2 sek.

3) Jak daleko zajdziemy z tą prędkością w ciągu 6 godzin? *Odp.* $257\frac{1}{2}$ *km.*

4) W jakim stosunku są prędkości dwu ciał, które w tym samym czasie przebywają 7 i 21 *cm?* *Odp.* 1 : 3.

5) Jaki jest stosunek, jeżeli ciała przebiegają jednakowe drogi w 5 i 20 *sek?* *Odp.* 4 : 1.

6) Jaki jest stosunek dróg, jeżeli stosunek prędkości wynosi 3 : 7, czasów 5 : 2? *Odp.* 15 : 14.

7) Jaki jest stosunek prędkości dwu ruchów, jeżeli drogi mają się do siebie jak 3 : 5, czasy jak 6 : 5? *Odp.* 1 : 2.

8) Wiele *cm/sek* wynosi prędkość 20 *km/godz.? Odp.* $833\frac{1}{3}$.

9) Wiele *km/godz.* odpowiada prędkości 1000 *cm/sek? Odp.* 36.

10) Wiele *cm/sek* wynosi prędkość $1\frac{1}{2}$ *mil geogr./godz.? Odp.* $(1{\cdot}5 \times 7{\cdot}422 \times 100000) : 3600 = 309{\cdot}2$ *cm/sek.*

11) Jaką jednostkę czasu należałoby przyjąć, nie zmieniając jednostki długości *(cm)*, aby prędkość ruchu ślimaka (0·5 *cm/sek* wyraziła się tą samą liczbą co prędkość światła w *cm/sek? Odp.* 1900 lat.

12) Pociąg o prędkości 12 *m/sek* mija drugi pociąg, idący w tym samym kierunku na sąsiednim torze, z prędkością 10 *m/sek*; jakiemi wydają się te prędkości podróżnym przeciwnego pociągu? *Odp.* Pierwsza: — 2 *m/sek*, druga: + 2 *m/sek.*

13) Jakiemi wydają się te prędkości, jeżeli drugi pociąg idzie w kierunku przeciwnym? *Odp.* Pierwsza + 22, druga — 22 *m/sek.*

14) Jakiemi, jeżeli drugi pociąg stoi? *Odp.* + 12, — 12 *m/sek.*

15) Statek płynący rzeką ku północy, z prędkością 8 *m/sek*, przebija kula, mająca prędkość 200 *m/sek*, wystrzelona ze wschodniego brzegu, prostopadle do kierunku ruchu statku; jaka jest prędkość kuli względem statku i jaki jej kierunek? *Odp.* $\sqrt{(200)^2 + (8)^2} = 200{\cdot}16$ *m/sek; arc tang* $^8/_{200} = 2^0 17' 26''$, licząc od zachodu ku południowi.

16) Deszcz spadający pionowo, z prędkością 20 *m/sek*, trafia ukośnie w twarz człowieka, biegnącego z prędkością 3 *m/sek*; z jaką prędkością i w jakim kierunku? *Odp.* 20·22 *m/sek*; $8^0 32'$ od pionu.

17) Dwa wozy wyjeżdżają jednocześnie z miasta, z jednakową prędkością, gościńcami rozchodzącymi się pod kątem 60^0; jaki jest ich ruch względny? *Odp.* Oddalają się od siebie z prędkością równą ich własnej, w kierunku tworzącym kąty 60^0 z obu gościńcami.

18) Jaki jest ruch względny, jeżeli gościńce krzyżują się pod kątem prostym? *Odp.* Prędkość $\sqrt{2}$ razy większa, kierunek 45^0.

19) Ziemia krąży około słońca po elipsie; jaki jest ruch względny słońca względem ziemi? *Odp.* Obieg po takiej samej elipsie, obróconej o 180^0, t. j. w przeciwnym kierunku.

20) Punkt porusza się jednostajnie po kole, leżącem na podstawie poruszającej się jednostajnie po linii prostej; jaka jest rzeczywista droga punktu, jeżeli: a) prędkość jego na obwodzie = prędkości podstawy; b) jeżeli większa; c) jeżeli mniejsza? *Odp.* a) cykloida; b) cykloida wydłużona; c) cykloida skrócona.

21) Kula toczy się z prędkością 2·75 *m/sek* w poprzek wozu, jadącego z prędkością 3·6 *m/sek*; znaleźć prędkość wypadkową kuli względem ziemi. *Odp.* 4·53 *m/sek*, $37^0 23'$ od kierunku wozu.

22) Dwie prędkości x *cm/sek* i y *cm/sek* tworzą kąt φ obliczyć prędkość wypadkową R. *Odp.* $R = (x^2 + y^2 + 2xy \cos\varphi)^{\frac{1}{2}}$.

23) Znaleźć kąt α, pomiędzy x i R. *Odp.* $\sin\alpha = \frac{y \sin\varphi}{R}$.

24) Znaleźć sumę geometryczną następujących prędkości: 15 *cm/sek* ku północy, 8 *cm/sek* ku północnemu wschodowi i 22 *cm/sek* ku południowemu wschodowi. *Odp.* Rozłożyć każdą prędkość na skła-

dową północną i wschodnią; suma północnych $x = 15 + \frac{8}{\sqrt{2}} - \frac{22}{\sqrt{2}}$; suma wschodnich: $y = \frac{8}{\sqrt{2}} + \frac{22}{\sqrt{2}}$; wypadkowa $R = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$; kąt α między wypadkową a wschodem z równania $\text{arc tang} \frac{x}{y} = \alpha$.

25) Okazać na rysunku, że porządek, w jakim składamy te prędkości, nie ma wpływu na wypadkową.

26) Znaleźć sumę następujących prędkości: 61 *cm/sek* ku północnemu wschodowi, 61 *cm/sek* ku południowemu wschodowi i 86·2668 *cm/sek* ku zachodowi. *Odp.* Zero.

27) Ciało posiada w pewnej chwili prędkość 50 *cm/sek* ku północy, w godzinę później porusza się ku wschodowi z prędkością 20 *cm/sek*; o ile zmieniła się prędkość w ciągu tego czasu? *Odp.* Powiększyła się o 53·85 *cm/sek*, w kierunku zawierającym kąt $21^0 48'$ z kierunkiem południowym, licząc ku wschodowi.

28) Wiatr wieje z prędkością 800 *cm/sek*, od punktu leżącego w odległości kątowej (azymucie) 67^0, licząc od południa ku zachodowi; znaleźć składową północną i wschodnią. *Odp.* 313 *cm/sek* i 736 *cm/sek.*

29) Pociąg kolejowy porusza się z prędkością 11 *m/sek* w kierunku północno wschodnim, po torze wznoszącym się do góry pod kątem 4^0; znaleźć składową północną, wschodnią i pionową do góry. *Odp.* Składowa pozioma = 10·973, zatem północna = wschodniej = $\frac{10·973}{\sqrt{2}}$; pionowa = 11 sin 4^0 = 0·767 *m/sek.*

30) Wiatr pędzi okręt ku zachodowi z prędkością 1 mili na godzinę; prąd morski unosi go jednocześnie ku południowi z prędkością 0·4 mili na godzinę; znaleźć prędkość i kierunek okrętu. *Odp.* 1,077; $21^0 48'$ od zachodu.

14. Ruchy o prędkości zmiennej. W ruchu jednostajnym po linii prostej prędkość jest stała, nie zmienia się bowiem ani wartość jej ani kierunek. Prędkość jest natomiast zmienna, ilekroć bądź to wartość jej, bądź kierunek, albo jedno i drugie razem się zmieniają. Zastanowimy się naprzód nad zmianą wartości, nie myśląc na razie o kierunku. Określenie prędkości, jako stosunku długości drogi do czasu, jest tak ściśle związane z pojęciem ruchu jednostajnego, że, przystępując do ruchów zmiennych, powinniśmy przedewszystkiem rozważyć, czy w tym razie określenie powyższe na cokolwiek się przyda. W ruchu zmiennym prędkość nie jest ani chwili stała, lecz rośnie nieustannie, albo maleje, albo naprzemian rośnie i maleje; stosunek pewnego odcinka drogi do odpowiedniego czasu nie jest liczbą stałą, jednakową dla wszystkich odcinków, jak to było w ruchu jednostajnym. Gdy lawina śnieżna zesuwa się z góry, ruch jej, z razu niedostrzegalny, wzmaga się nieustannie i bez przerwy; podobnie, gdy pociąg zbliżający się do stacyi zwalnia stopniowo bieg, stosunek dróg do właściwych im czasów nie jest liczbą stałą i nie daje wyobrażenia o prędkości, jaką ciało posiada w pewnej określonej chwili. Nie umiemy sobie wyobrazić pewnej danej prędkości inaczej, jak tylko myśląc o ruchu jednostajnym; mając więc określić prędkość, jaką ciało poruszające się niejednostajnie posiada, w pewnej określonej chwili, powinniśmy znaleźć sposób porównania takiego ruchu z ruchem jednostajnym. Zamknijmy oczy, żeby nie widzieć zmienności ruchu i otwórzmy je na jedno okamgnienie, np. na $^1/_{10}$ sekundy; w ciągu tej krótkiej chwili nie dostrzeżemy, że ruch jest zmienny, że np. pociąg zdążający do stacyi zwalnia bieg. Ruch wyda się nam jednostajny, a jeżeli droga przebieżona w przeciągu tej chwili wynosiła, dajmy na to 79 *cm*, to uzyskaliśmy przybliżone wyobrażenie o prędkości ruchu w ciągu owej chwili; była ona taka, jak ruchu jednostajnego o prędkości 790 *cm/sek*. Ściśle biorąc, liczba ta daje nam tylko średnią prędkość w ciągu owej chwili, gdyż przy końcu $^1/_{10}$ sekundy ruch był z pewnością nieco powolniejszy aniżeli na początku tego czasu. Aby prędkość dokładniej wyznaczyć, należałoby spostrzegać ruch w tem samem miejscu przez czas jeszcze krótszy, np. przez $^1/_{100}$ *sek* (przypuśćmy, że zapomocą fotografii chwilowej); będzie on wówczas jeszcze bardziej podobny do ruchu jednostajnego, gdyż zmniejszenie się prędkości jeszcze mniej się uwydatni. Skracając czas od $^1/_{10}$ do $^1/_{100}$ sekundy, odrzuciliśmy $^9/_{100}$ *sek*, w ciągu których prędkość zmniejszała się: droga, odpowiadająca $^1/_{100}$ *sek*, będzie więc cokolwiek dłuższa, aniżeli $^1/_{10}$ część poprzedzającej; znajdziemy, dajmy na to: 7·914 *cm*. Jako średnią prędkość ruchu uzyskamy z tego doświadczenia: $7{\cdot}914 : {}^1/_{100} = 791{\cdot}4$ *cm/sek*. Spostrzeżenie trwające $^1/_{1000}$ *sek* dałoby drogę np. 0·79149 *cm*, z czego wynika prędkość średnia: 791·49 i t. d.

Przykład ten okazuje, że postępując dalej w ten sam sposób, t. j. biorąc coraz krótsze czasy, otrzymywać będziemy prędkości średnie, wprawdzie coraz inne, ale zarazem coraz mniej się różniące, gdyż ruch spostrzegany stawać się będzie coraz podobniejszym do ruchu jednostajnego, mającego pewną określoną prędkość. Brak przyrządów do mierzenia bardzo krótkich czasów i dróg, położyłby wkrótce kres temu postępowaniu. W myśli możemy jednak pójść dalej, i zmniejszać czas bez końca, przyczem oczywiście zmniejszać się będą odpowiednie drogi: stosunek atoli dróg do czasów zdążać będzie bez końca do pewnej wartości określonej (w powyższym. przykładzie do 791·5). Tę wartość graniczną uważać będziemy jako rzeczywistą prędkość ruchu w danem miejscu na drodze. Z powyższem rozumowaniem, zapomocą którego uzyskaliśmy określenie prędkości w ruchu zmiennym, należy się oswoić, gdyż przyda się ono w wielu podobnych zagadnieniach. Rozumowanie rzeczone polega na rozważaniu stosunku dwu wielkości zmieniających się (tutaj drogi przebytej i odpowiedniego czasu); stosunek ten, zmieniający się — zależnie od tego, jak długą bierzemy drogę i jaki czas — zdąża jednak do stałej i określonej wartości, gdy czas tudzież drogę skracamy bez końca. Mówiąc o ruchu zmiennym, nie możemy powiedzieć, jak o jednostajnym, że prędkość równa się drodze, przebytej w ciągu jednostki czasu; natomiast używać będziemy wyrażenia: *prędkość równa się drodze przypadającej na jednostkę czasu*; jeżeli droga przebyta w ciągu $\frac{1}{1000000}$ części sekundy wynosi 0·000017 *cm*, to wnosimy, że na 1 *sek* przypada droga 17 *cm* — nie przesądzając wcale, jakoby ciało rzeczywiście przebywało drogę 17 *cm* w ciągu sekundy; rzeczywista droga w przeciągu sekundy będzie większa niż 17, jeżeli prędkość się zwiększa, w przeciwnym razie będzie mniejsza.

Na podstawie tych objaśnień przyjmiemy następujące określenia:

Średnią prędkością ruchu w przeciągu pewnego czasu nazywamy stosunek drogi przebytej do tegoż czasu. Niechaj s oznacza drogę odbytą z końcem czasu t, zaś s_1 drogę, z końcem czasu późniejszego t_1. Pomiędzy temi chwilami upływa czas $t_1 - t$. odległość przebyta wynosi $s_1 - s$; prędkość średnia w okresie od t do t_1 wynosi zatem: $v_1 = \frac{s_1 - s}{t_1 - t}$.

Rzeczywista prędkość ruchu w pewnej chwili równa się wartości, do której zdąża prędkość średnia, gdy czas bez końca się skraca, to jest gdy t_1 staje się coraz bliższem t, a s_1 odpowiednio bliższem s; albo krócej: *równa się drodze przypadającej w uważanej chwili na jednostkę czasu.* Biorąc w poprzednim ułamku t_1 coraz bliższem t, a wskutek tego s_1 coraz mniej różnem od s, dostajemy szereg ułamków, których liczniki i mianowniki stają się coraz bliższymi zera, a których wartości zdążają do liczby określającej rzeczywistą prędkość w chwili t.

15. Ruch jednostajny przyśpieszony. Tak nazywamy ruchy, których prędkość powiększa się o równe wielkości w przeciągu równych, choćby dowolnie małych, czasów, w których zatem prędkość rośnie jednostajnie i bez przerwy. Wiedząc, ile wynosi zwiększenie prędkości w ciągu jednostki czasu, możemy, na zasadzie określenia, znaleźć prędkość ruchu w każdej dowolnej chwili. Z początkiem ruchu, gdy $t=o$, niech ciało będzie nieruchome, t. j. prędkość $v=o$. Dajmy na to, że w przeciągu każdej sekundy rzeczywista prędkość ruchu zwiększa się o γ. Wtenczas przy końcu pierwszej sekundy prędkość wynosić będzie γ, przy końcu drugiej 2γ i t. d.

W ogólności, po upływie t sekund, prędkość ruchu v uzyska wartość:

(1) $$v=t.\gamma.$$

Wielkość γ, zwana przyśpieszeniem ruchu, może być w każdym ruchu inna; ona cechuje każdy ruch jednostajnie przyśpieszony; im większe jest γ, tem naglej wzrasta jego prędkość.

Może się zdarzyć, ze w chwili $t=o$, gdy zaczynamy liczyć czas, ciało jest już w ruchu i posiada już pewną prędkość (początkową) v_0; ponieważ w ciągu następnych t sekund prędkość zwiększa się jeszcze o γt, przeto po upływie tego czasu wartością jej będzie:

(2) $$v=v_0+\gamma t.$$

Pytamy teraz, jak długą jest droga przebyta w ciągu jakiegokolwiek czasu (t *sek*) ruchem jednostajnie przyśpieszonym? Okażemy, że długość drogi jest taka, jakąby ciało przebyło ruchem jednostajnym, gdyby miało stale taką prędkość, jaką w ruchu jednostajnie przyśpieszonym posiada w połowie uważanego czasu. Obliczenie długości drogi, przebytej ruchem, którego prędkość rośnie jednostajnie, polega na podobnem rozumowaniu, jak np. obliczenie całkowitego wydatku miesięcznego, jeżeli wydatki dzienne powiększają się jednostajnie. Dajmy na to, że 1-go dnia w miesiącu wydaliśmy pięć groszy, 2-go siedem, 3-go dziewięć i t. d., codziennie o 2 grosze więcej, nakoniec 31-go sześćdziesiąt pięć. Całkowity wydatek miesięczny będzie taki, jak gdybyśmy codziennie wydawali po 35 groszy, a więc tyle, ile wydajemy w środku miesiąca, 16-go; wprawdzie wydajemy 1-go o 30 mniej, lecz za to 31-go o tyleż więcej; 2-go o 28 mniej, natomiast 30-go o 28 więcej, i t. d.

Prędkość w ruchu jednostajnie przyśpieszonym, w pewnej chwili poprzedzającej środek czasu, dla którego mamy obliczyć drogę, jest o tyleż mniejsza od środkowej prędkości, o ile w równie odległej od środka chwili późniejszej jest większa.

W chwili $\frac{t}{2}$ prędkość ruchu wynosi, według (2): $v_0 + \gamma \frac{t}{2}$; pomnożywszy tę wartość przez czas t, znajdziemy długość s drogi przebytej w ciągu czasu t, mianowicie:

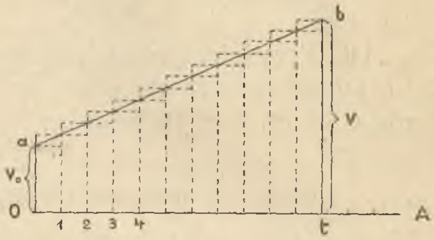
(3) $$s = v_0 t + {}^1/_2\, \gamma\, t^2.$$

Jeżeli prędkość początkowa ruchu jest zerem, t. j. $v_0 = 0$, jak w równaniu (1), wtenczas jest:

(4) $$s = {}^1/_2\, \gamma\, t^2.$$

Długość drogi jest w tym przypadku proporcyonalna do drugiej potęgi czasu użytego na jej przebycie. Przy końcu 1-ej sekundy droga przebyta wynosi $\frac{\gamma}{2}$ po upływie dwu sekund: $4\frac{\gamma}{2}$ po trzech: $9\frac{\gamma}{2}$, i t. d. Natomiast w przeciągu pierwszej, w przeciągu drugiej (t. j. od końca 1-ej do końca 2-ej), trzeciej sekundy, i t. d. ciało przebywa odcinki drogi: $\frac{\gamma}{2}$, $3\frac{\gamma}{2}$, $5\frac{\gamma}{2}$ i t. d., proporcyonalne do szeregu liczb nieparzystych: 1, 3, 5... i t. d

Wzoru (3) można również dowieść zapomocą wykreślenia (ryc. 8) w następujący sposób: Linia *OA* wyobraża symbolicznie czas; przypuśćmy np., że jakakolwiek wskazówka posuwa się jednostajnie, jak wskazówka zegarowa, od *O* ku *A*, a przejście jej przez punkty 1, 2, 3,... jednakowo od siebie odległe, zaznacza sekundy. Wykreślmy w każdym z tych punktów prostopadłą do *OA* (t. zw. rzędną) i dajmy każdej z nich długość równą prędkości, jaką ruch jednostajnie przyśpieszony posiada w tej chwili, którą odnośny punkt oznacza. Długość pierwszej rzędnej Oa wyobraża początkową prędkość v_0, długość ostatniej wyobraża prędkość $v = v_0 + \gamma t$; każda rzędna jest dłuższa od poprzedzającej o γ, przeto linia ab (wytyczona przez wierzchołki rzędnych), jest prostą. Gdyby prędkość ruchu była w ciągu każdej sekundy stała i równa prędkości na początku sekundy, wówczas drogę przebytą przedstawiałyby prostokątne pola pasków, ograniczone schodkową linią poniżej ab; gdyby prędkość w ciągu każdej sekundy była równa prędkości, jaką ruch posiada przy końcu każdej z nich, drogi przebyte byłyby równe polom pasków ograniczonych linią schodkową powyżej ab. Całkowita droga równałaby się w obu przypadkach sumie pól odpowiednich pasków. W pierwszym przypadku byłaby ona mniejsza, w drugim większa aniżeli rzeczywista droga, przebyta ruchem jednostajnie przyśpieszonym. Biorąc zamiast sekund mniejsze, dowolnie krótkie, odstępy czasu, możemy różnicę pomiędzy temi dwoma przypuszczeniami dowolnie zmniejszyć; obie sumy zrównają się i staną się równe polu trapezu *oabt;* pole to przedstawia więc drogę przebytą w ruchu jednostajnie przyśpieszonym:



Ryc. 8.

$$\tfrac{1}{2}\,(Oa + tb) \times Ot, \text{ przeto } s = \tfrac{1}{2}\,(v_0 + v_0 + \gamma t)\, t = v_0 t + \tfrac{1}{2}\,\gamma\, t^2.$$

Inny wzór na prędkość ruchu jednostajnie przyśpieszonego można uzyskać, łącząc wzory (1) i (4). Czas, potrzebny do przebycia drogi s, jeżeli ruch zaczyna się bez prędkości początkowej, wynosi według (4):

$$t = \sqrt{\frac{2s}{\gamma}}.$$

Prędkość nabyta w ciągu tego czasu, a zatem wzdłuż drogi s, wynosi podług (1):

$$v = \gamma t = \gamma \sqrt{\frac{2s}{\gamma}},$$

czyli

(5) $$v = \sqrt{2\gamma s}.$$

Rozwiązując ostatnie równanie względem s, otrzymamy długość drogi, wzdłuż której ciało powinno poruszać się, z przyśpieszeniem γ, żeby na jej końcu uzyskało prędkość v, mianowicie:

$$s = \frac{v^2}{2\gamma}. \tag{6}$$

Wzory (5) i (6) odnoszą się tylko do tych ruchów, w których prędkość początkowa jest zerem.

16. Przyśpieszenie. Zastanówmy się nad znaczeniem wielkości, którą oznaczyliśmy wyżej przez γ i nazwali przyśpieszeniem. Z równania (2), ust. 15 wypada:

$$\gamma = \frac{v - v_0}{t}.$$

W równaniu tem t oznacza czas, w ciągu którego prędkość wzrasta od początkowej wartości v_0 do końcowej wartości v.

Przyśpieszenie jest tedy stosunkiem przyrostu prędkości do czasu, w ciągu którego przyrastanie się odbywało, albo (jeżeli przyjmiemy, że $t = 1$ *sek*) *równa się przyrostowi prędkości przypadającemu na jednostkę czasu.* W ruchu jednostajnie przyśpieszonym możemy zamiast wyrażenia »przyrost przypadający na jednostkę czasu«, powiedzieć: »rzeczywisty przyrost prędkości w ciągu jednostki czasu«. Są jednak ruchy, w których prędkość nie zmienia się jednostajnie, a zatem przyśpieszenie nie jest wielkością stałą. Ruchy tego rodzaju można zawsze podzielić na tak krótkie odstępy, żeby zmienność przyśpieszenia w zakresie każdego odstępu była nieznaczna; inaczej mówiąc, każdy dowolny ruch, spostrzegany przez bardzo krótką chwilę, wyda się nam podobny do ruchu, mającego pewne stałe przyśpieszenie. Nawet ruch jednostajny nie stanowi w tej mierze wyjątku, gdyż możemy uważać go jako ruch jednostajnie przyśpieszony, mający przyśpieszenie zero. Możemy więc zastosować pojęcie przyśpieszenia w każdym ruchu. Wogóle będzie ono w każdym punkcie drogi inne. Celem obliczenia przyśpieszenia w jakimkolwiek ruchu należy podobnie rozumować, jak to uczyniliśmy w ust. 14-ym, określając prędkość zmienną. Podzieliwszy przyrost prędkości, odpowiadający pewnemu okresowi ruchu, przez czas, t. j. przez trwanie tego okresu, otrzymamy tak zwane przyśpieszenie średnie, czyli przyrost prędkości, przypadający średnio na jednostkę czasu w owym okresie. Skracając następnie trwanie okresu bez końca, otrzymywać będziemy kolejno przyśpieszenia średnie, coraz mniej się różniące, t. j. zbliżające się do pewnej określonej wartości. Tę wartość graniczną nazywamy przyśpieszeniem rzeczywistem w tym punkcie drogi, w którym spostrzegaliśmy ruch.

Przyśpieszenia mają swoją osobną miarę; jednostką jest przyśpieszenie tego ruchu, w którym prędkość powiększa się o jednostkę w ciągu jednostki czasu. Jeżeli, dajmy na to, w ciągu 10 *sek* prędkość powiększa się jednostajnie od 20 *cm/sek* do 27 *cm/sek*, t. j. o 7 *cm/sek*, wtenczas przypada na jedną sekundę przyrost 0·7 *cm/sek*, t. j. przyśpieszenie wynosi: »[0·7 centymetrów na sekundę], na sekundę« piszemy to krótko: 0·7 *cm/sek*.² albo 0·7 *cm/sek*² (czytaj »centymetrów na kwadrat sekundy«). Podwójną zależność wartości liczebnej przyśpieszenia od jednostki czasu zrozumiemy najlepiej, przypuszczając na chwilę, że do mierzenia czasu użyto innej jednostki, aniżeli do określenia jednostki prędkości; np. jeżeli prędkość zwiększa się w ciągu 1 sekundy od 30 *cm/godz* do 35 *cm/godz*, natenczas przyśpieszenie będzie: 5 *cm/godz sek*. W układzie miar *c. g. s.* jednostką przyśpieszeń jest *cm/sek*²; wzór ten przedstawia zarazem wymiar przyśpieszenia.

17. Ruch jednostajnie opóźniony. Przyśpieszenia bywają także ujemne, wtenczas mianowicie, gdy prędkość ruchu się zmniejsza. Jeżeli przyśpieszenie ujemne jest zarazem stałe, wtenczas prędkość ruchu zmniejsza się w równych czasach o równe wielkości; ruch taki nazywamy jednostajnie opóźnionym. Zasadnicze wzory, opisujące ten ruch, wynikają odrazu z wzorów (2) i (3) ust. 15, skoro zamiast γ napiszemy $-\gamma$. W chwili $t=o$ ruch rozpoczyna się z prędkością początkową v_0; po upływie t sekund prędkość wynosi już tylko:

(1) $$v=v_0-\gamma t.$$

Też same rozumowania, których używaliśmy do obliczenia drogi przebytej ruchem jednostajnie przyśpieszonym, dają się zastosować do obecnego przypadku; znajdziemy mianowicie:

(2) $$s=v_0 t-\tfrac{1}{2}\gamma t^2,$$

t. j. droga, przebyta w przeciągu czasu od $t=o$ do jakiegokolwiek t, równa jest odległości, jakąby ciało przebyło ruchem jednostajnym, z prędkością średnią $v_0-\frac{1}{2}\gamma t$.

Wskutek ciągłego zmniejszania się prędkości, ruch jednostajnie opóźniony musi w końcu ustać; nastąpi to po upływie pewnego czasu t', licząc od chwili $t = o$. Ponieważ w ciągu jednej sekundy prędkość ubywa o γ, a w ciągu czasu t' o $\gamma t'$, przeto ruch ustanie, skoro ubytek $\gamma t'$ dorówna początkowemu zapasowi prędkości v_0; mamy więc $v_0 = \gamma t'$, skąd:

(3) $$t' = \frac{v_0}{\gamma}.$$

Droga, przebyta od początku aż do ustania ruchu, wynosi: $\frac{1}{2} v_0 \times t'$, czyli:

(4) $$s' = \frac{1}{2} \frac{v^2_0}{\gamma}.$$

Zadania.

31) Pociąg wyjeżdża ze stacyi ruchem jednostajnie przyśpieszonym; po upływie 1 min. ruch staje się jednostajny o prędkości 12 *m/sek*. Jak wielkie było przyśpieszenie? *Odp.* 0·2 *m/sek*^{2}.

32) Jak daleko oddalił się ten pociąg od stacyi, w chwili, gdy ruch stał się jednostajnym? *Odp.* $s = \frac{1}{2} \gamma t^2$ albo $s = \frac{v^2}{2\gamma} = 360$ *m*.

33) Ciała puszczone swobodnie spadają ruchem jednostajnie przyśpieszonym, z przyśpieszeniem 981 *cm/sek*^{2} (w przybliżeniu 10 *m/sek*^{2}); obliczyć prędkość ruchu po upływie jednej, dwu, trzech,... sekund. *Odp.* 981, 1962, 2943,... *cm/sek* (w przybliżeniu 10, 20, 30... *m/sek*).

34) Obliczyć wysokości spadku w tych samych czasach. *Odp.* 490·5, 1962·0; 4414·5,... *cm*.

35) Znaleźć wzór dający prędkość należącą do wysokości spadku s. *Odp.* 44·29547 $\sqrt{s}$ *cm/sek*.

36) Znaleźć wzór dający spadek, należący do prędkości v. *Odp.* 0·00509684 v^2 *cm*.

37) Dwa ciała wyruszają z tego samego miejsca, w tym samym kierunku, ruchem o przyśpieszeniu γ, jednakowem dla obu; drugie wyrusza jednak o czas τ później od pierwszego. Znaleźć ich odległość δ w czasie t, liczonym od zaczęcia drugiego ruchu. *Odp.* $\delta = \gamma t \tau + \frac{\gamma}{2} \tau^2$.

38) Dwa ciała spadają z tego samego miejsca; drugie wyrusza w chwili, gdy pierwsze odbyło już drogę 30 *cm*. Znaleźć ich odległość w czasie t (licząc od chwili zaczęcia ruchu drugiego ciała). *Odp.* 30 + 242·6 t *cm*.

39) W jakim czasie odbędzie ciało drogę 250 *m*, jeżeli, przy prędkości początkowej = 0, przyśpieszenie wynosi 25 *cm/sek*^{2}? *Odp.* 44·7 *sek*.

40) Początkowa odległość dwu ciał, poruszających się po jednej linii prostej, w tym samym kierunku, ruchem jednostajnie przyśpieszonym, wynosi 35 *cm;* przednie ma początkową prędkość 60 *cm/sek* i przyśpieszenie 17 cm/sek^2, tylne 40 *cm/sek* i 27 cm/sek^2. Po jakim czasie drugie dogoni pierwsze? *Odp.* 5·3167 *sek.*

41) Rzucamy kamień do studni; po upływie τ *sek* słyszymy odgłos kamienia uderzającego o wodę. Jaka jest głębokość x studni, jeżeli g oznacza przyśpieszenie kamienia, c prędkość głosu?

Odp. $x = c\tau + \frac{c^2}{g} \pm c\sqrt{\frac{c^2}{g^2} + \frac{2\tau c}{g}}$ (wziąć znak —, gdyż dla $\tau = o$, powinno być $x = o$).

42) Pociąg mający prędkość 10 *m/sek* poczyna zwalniać bieg, tracąc w ciągu każdej sekundy 25 *cm/sek* prędkości; jak daleko jeszcze zajedzie i kiedy stanie? *Odp.* 200 *m*; 40 *sek.*

43) Po jakim czasie prędkość jego wynosić będzie 5 *cm/sek*; ile wynosi wówczas droga przebyta? *Odp.* 20 *sek*; 150 *m.*

44) Ciało rzucone pionowo do góry, z prędkością początkową v_0, porusza się ruchem jednostajnie opóźnionym, z przyśpieszeniem —981 cm/sek^2; do jakiej wysokości doleci, jeżeli prędkość ~~początkowa~~ wynosi 900 *cm/sek*? *Odp.* 412·8 *cm.*

45) Ile cm/sek^2 wynosi przyśpieszenie 500 $m/(godz)^2$?

$$Odp.\ 500\frac{(100\ cm)}{(3600\ sek)^2} = \frac{50000}{(3600)^2} cm/sek^2 = 0{\cdot}00386\ cm/sek^2.$$

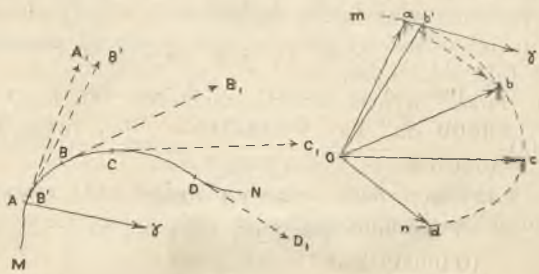
46) Jaką liczbą wyraża się przyśpieszenie 981 cm/sek^2, jeżeli jednostką długości będzie mila geograficzna, jednostką czasu godzina?

$$Odp.\ 981\ \frac{(0{\cdot}000\,001\,347\,3\ \text{mil geogr.})}{\left(\frac{1}{3600}\ godz.\right)^2} = 17133.$$

18. Ruchy po liniach krzywych. Określając przyśpieszenie jakiegobądź ruchu, należy zwrócić uwagę nietylko na liczebną jego wartość lecz i na kierunek. Niedość jest wiedzieć, o ile prędkość ruchu zwiększa się lub maleje, niemniej ważnem jest pytanie, w jakim kierunku przybywają przyrosty prędkości. W ruchu prostolinijnym przyśpieszenie posiada zawsze kierunek równoległy do prostej, na której ciało się porusza; jeżeli ruch się przyśpiesza, wtenczas kierunek przyśpieszenia jest ten sam co ruchu, albowiem do prędkości ruchu przybywają ciągle dodatki, mające ten sam, co ona, kierunek; w ruchu opóźniającym się przyśpieszenie posiada kierunek przeciwny. W każdym przypadku możemy przyśpieszenie wyobrazić na rysunku zapomocą odcinka prostego, opatrzonego strzałką kierunkową; jest ono również w e k t o r e m.

Ruchy po liniach krzywych odznaczają się tem, że przyśpieszenie posiada wogóle kierunek ukośny względem drogi lub prędkości. Zmiana bowiem kierunku ruchu może tylko wtenczas nastąpić, gdy do prędkości istniejącej w pewnej chwili, przyłączy się przyrost mający kierunek odmienny. Łatwo to zrozumieć, zwłaszcza jeżeli zwrot ruchu jest dość nagły; wszakże chcąc zmienić kierunek ruchu jakiego ciała, trącamy je w kierunku ukośnym względem pierwotnej jego drogi. Podobne, tylko stopniowe i łagodne zwroty, istnieją w każdym ruchu na liniach łagodnie zakrzywionych.

Aby znaleźć wartość i kierunek przyśpieszenia w każdem miejscu drogi krzywej MN (ryc. 9), wybierzmy na niej kilka punktów: A, B, C,..., przez które ciało po kolei przechodzi i wykreślmy w każdym z nich odcinki styczne, AA_1, BB_1, CC_1..., wyobrażające wartość i kierunek prędkości (ust. 10), jaką ciało tamże posiada.



Ryc. 9.

Celem uzyskania lepszego przeglądu, zestawmy te prędkości na oddzielnym rysunku, pod postacią odcinków Oa, Ob, Oc i t. d., wychodzących ze spólnego punktu O a równych i równoległych do AA_1, BB_1, i t. d. Jeżeli ilość punktów wybranych na MN jest dość znaczna, wtenczas punkty a, b, c i t. d., będą równie liczne i wytyczą ciągłą linię krzywą mn, zwaną **hodografem** danego ruchu. Hodograf mn stanowi zestawienie, albo wykaz prędkości we wszystkich punktach drogi MN.

Zanim okażemy, w jaki sposób zapomocą tej pomocniczej krzywej znajduje się przyśpieszenie w którembądź miejscu na drodze, np. w punkcie A, zastanówmy się naprzód, ile wynosi całkowita zmiana, t. j. przyrost prędkości ciała, gdy ono przechodzi z A do sąsiedniego, nieskończenie blizkiego punktu B', do którego należy w hodografie punkt b'.

Na mocy geometrycznego dodawania mamy:

$$\overline{Ob'} = \overline{Oa} + \overline{ab'},$$

t. j. do prędkości, którą ciało posiada w A, należy dodać prędkość mającą wartość i kierunek ab' wówczas otrzymamy Ob' t. j. prędkość ciała w B'. Odcinek ab' przedstawia zatem szukany przyrost prędkości.

Jeżeli oznaczymy przez τ czas, w ciągu którego ciało przebywa drogę AB', wtenczas stosunek $\frac{ab'}{\tau}$ oznaczać będzie przyrost prędkości przypadający na jednostkę czasu, czyli średnie przyśpieszenie w tej części drogi; kierunek jego jest równoległy do ab'.

Im krótszy będzie czas τ, t. j. im bliżej wybierzemy B' obok A, tem ściślej zbliżać się będzie stosunek $\frac{ab'}{\tau}$ do pewnej określonej wielkości γ. Wielkość ta jest przyrostem prędkości przypadającym na jednostkę czasu, podczas ruchu w najbliższem sąsiedztwie punktu A; jest to przyśpieszenie, jakie ruch posiada w tym punkcie drogi.

Im krótszą obierzemy cząstkę drogi AB', tem mniej różnić się będzie cięciwa ab' hodografu od łuku tej krzywej między a i b'; kierunek ab' zbliżać się będzie jednocześnie do stycznej, wykreślonej w punkcie a.

Pomyślmy, że po hodografie porusza się punkt pomocniczy, w taki sposób, że przechodzi przez miejsca a, b', b, c,..., gdy jednocześnie ciało na drodze MN przechodzi przez A, B', B, C...
Wtenczas stosunek $\frac{ab'}{\tau}$ określać będzie, przy nieskończenie małem ab', prędkość tego punktu pomocniczego w chwili przejścia przez a. Pamiętając, że ten sam stosunek daje przyśpieszenie γ w punkcie A, przychodzimy do następującego wniosku: *Przyśpieszenie ciała, w któremkolwiek miejscu na torze zakrzywionym, posiada ten sam kierunek i tę samą wartość liczebną, jak prędkość punktu pomocniczego w odpowiedniem miejscu na hodografie.*

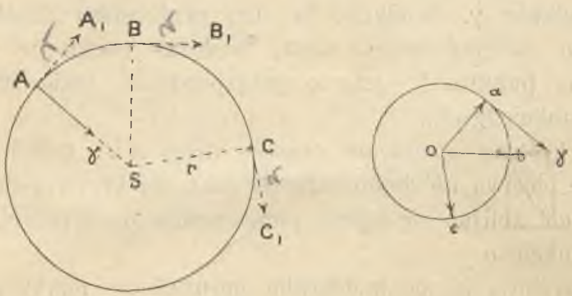
Wykreślmy z punktu A odcinek $A\gamma$ równoległy do $a\gamma$, przedstawiający prędkość na hodografie w punkcie a (według tej samej podziałki, która służyła do nakreślenia prędkości Oa, Ob, i t. d.). Odcinek ten, opatrzony strzałką kierunkową, wyobraża przyspieszenie w punkcie A. W ten sam sposób można znaleźć i wykreślić przyśpieszenie w B, C i w każdym dowolnym punkcie drogi.

Zadania.

47) Znaleźć hodograf ruchu jednostajnie przyśpieszonego po linii prostej. *Odp.* Linia prosta, na niej ruch jednostajny z prędkością γ.

48) To samo dla ruchu jednostajnego na prostej. *Odp.* Punkt nieruchomy.

19. Ruch jednostajny po kole. Ciało, poruszające się jednostajnie na obwodzie koła, t. j. przebiegające w równych czasach łuki jednakowej długości, posiada mimo to prędkość zmienną. Nie zmienia się wprawdzie wartość liczebna prędkości, ale kierunek jej zmienia się nieustannie i jednostajnie; ruch taki musi



Ryc. 10.

przeto mieć przyśpieszenie. W istocie, aby zmusić ciało, poruszające się swobodnie, np. kulę na posadzce, do krążenia po kole, potrzeba potrącać ją ciągle ku środkowi koła, czyli przyśpieszać poprzecznie względem toru; koń biegający w ujeżdżalni musi również nieustannie zbaczać ku środkowi koła, po którego obwodzie biegnie, co dowodzi, że prędkość zmienia się w kierunku prostopadłym do biegu. Aby znaleźć wartość i kierunek przyśpieszenia γ w ruchu takim, postąpimy w następujący sposób. Niech koło A, B, C (ryc. 10) będzie torem, po którym ciało porusza się z prędkością v. S jest środkiem koła, promień jego oznaczymy przez r. Kierunek prędkości jest zawsze styczny do obwodu koła, a więc prostopadły do promienia; linie AA_1, BB_1, CC_1 wyobrażają prędkości w punktach

A, B, C; każda z nich ma długość v. Obok wykreślone są te same prędkości z jednego punktu O, mianowicie Oa, Ob, Oc. Jeżeli w taki sam sposób wykreślimy prędkości dla wszystkich położeń ciała na torze kolistym, natenczas punkty a, b, c i inne tego rodzaju, utworzą znowu koło, o promieniu v; będzie to hodograf uważanego ruchu. Ponieważ ciało przebiega obwód np. od A przez B, C... ruchem jednostajnym, przeto także punkt pomocniczy na hodografie przebiegać będzie jednostajnie obwód a, b, c,... z powrotem do a; czas jednego całkowitego obiegu jest zatem jednaki dla ciała, na kole i dla punktu na hodografie. Przyśpieszenie ciała w punkcie np. A równa się prędkości punktu na hodografie w odpowiednim punkcie a (ust. 18); kierunek przyśpieszenia ciała na kole jest równoległy do stycznej $a\gamma$ hodografu, a zatem jest prostopadły do Oa, czyli do prędkości AA_1, inaczej mówiąc: przyśpieszenie jest wciąż zwrócone ku środkowi koła. Jego wartość γ znajdziemy na podstawie uwagi, że stosunek prędkości na kole abc, do prędkości na kole ABC, równy jest stosunkowi długości tych obwodów, (gdyż czas jednego obiegu jest dla obu kół jednaki); zatem:

$$\gamma : v = 2\pi v : 2\pi r, \text{ skąd}$$

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \gamma = \frac{v^2}{r}.$$

Przyśpieszenie w ruchu jednostajnym na obwodzie koła jest zawsze zwrócone ku środkowi koła i równa się kwadratowi prędkości ruchu, podzielonemu przez promień koła.

To samo możemy wyrazić odmiennie, wprowadzając do wzoru na γ, zamiast prędkości v, czas T, odpowiadający jednemu całkowitemu obiegowi; czas ten nazywać będziemy okresem[1]) ruchu. Okres zależy widocznie od prędkości ruchu i od długości obwodu koła, mianowicie jest (ust. 9)[2]):

---

[1]) Okresem nazywać będziemy w ogólności czas, w ciągu którego jakiekolwiek zjawisko peryodyczne powtarza się; np. okresem pór roku jest rok.

[2]) Znak π oznacza stosunek obwodu do średnicy; wartość jego, jednakowa dla wszystkich kół, wynosi w przybliżeniu $\pi = 3{\cdot}141\,592\,653\,589\ldots$ Podajemy także następujące, często używane liczby:

$\pi^2 = 9{\cdot}869\,604\,4\ldots$; $\sqrt{\pi} = 1{\cdot}772\,453\,9\ldots$; $4\pi^2 = 39{\cdot}478\,418\ldots$

$$v = \frac{2\pi r}{T}, \text{ przeto}$$

$$(2) \quad \gamma = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

Jeżeli prędkość obiegu v jest tak wielka, że okres T jest małym ułamkiem sekundy, wtenczas dogodniej jest wziąć (jak to czynią mechanicy, opisując obroty machin) zamiast czasu T dla jednego obiegu, ilość obiegów n w przeciągu jednej sekundy. Liczbę tę znajdziemy z proporcyi $n : 1 = 1 : T$, skąd:

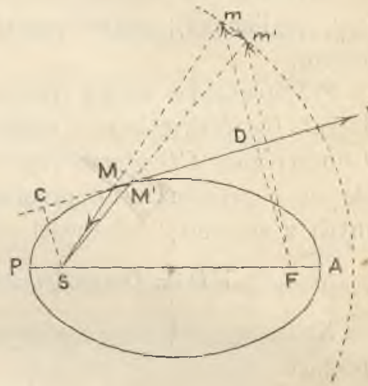
$$n = \frac{1}{T}, \text{ zaczem}$$

$$(3) \quad \gamma = 4\pi^2 n^2 r.$$

Wzory (1), (2) i (3) są zupełnie równoważne; do rachunku używać będziemy tego, który zawiera wielkość bezpośrednio daną: v, T lub n.

20. Ruchy planet około słońca. W wiekopomnem swem dziele *„O obrotach ciał niebieskich“* Mikołaj Kopernik (w roku 1543) wypowiedział doniosłe twierdzenie, że planety, w ich liczbie ziemia, krążą około słońca. Twierdzeniem tem pozbawił ziemię naczelnego, jakie jej poprzednio przypisywano, stanowiska »środka wszechświata«, a jednocześnie dał potężny impuls rozwojowi nauk. Opierając się na ówczesnych, mało dokładnych spostrzeżeniach, Kopernik sądził, że tory planet są koliste. Istotnie, planety główne poruszają się po liniach bardzo podobnych do kół. Prawdziwy, a już co najmniej do prawdziwego niezmiernie zbliżony, kształt torów planetarnych, odkrył Kepler w roku 1609, rozpatrując szczegółowo spostrzeżenia astronoma Tycho de Brahe nad ruchem planety Marsa. Wnioski wyprowadzone z tych spostrzeżeń Kepler wypowiedział w następujących trzech prawach, noszących jego nazwisko: *1) ziemia i inne planety krążą około słońca po elipsach, a słońce znajduje się w jednem z ognisk każdej z tych elips; 2) pole, zakreślone przez prostą, łączącą planetę ze słońcem* (promień wodzący) *wzrasta proporcyonalnie do czasu* (inaczej: pola zakreślone przez promień wodzący, w ciągu jednakowych czasów, mają jednakową wartość; stąd wynika, że prędkość ruchu planety na torze jest zmienna, gdyż długość promienia wodzącego w elipsie nie jest stała); 3) *kwadraty czasów całkowitego obiegu różnych planet około słońca są w przybliżeniu proporcyonalne do trzecich potęg średnich odległości ich od słońca.* (Przez średnią odległość rozumie się połowę większej osi elipsy). Twierdzenia te, zwane *prawami Keplera*, są wynikiem bezpośrednim spostrzeżeń i pomiarów astronomicznych. Zadaniem naszem będzie zgłębić na zasadzie tych praw własności ruchu planet.

Ważną jest rzeczą poznać dokładnie jak się zmienia prędkość planety w ciągu jednego obiegu około słońca, czyli jakie jest jej przyśpieszenie, albowiem na tej podstawie zdołamy później, idąc za Newtonem, zrozumieć przyczynę ruchu planet. Elipsa PA (ryc. 11) wyobraża tor którejkolwiek planety; w ognisku S znajduje się słońce. Oznaczymy przez $2a$ długość większej osi PA elipsy, przez $2b$ długość osi mniejszej, przez T czas jednego obiegu planety (okres). Ponieważ wartość całego pola elipsy wynosi $ab\pi$, przeto pole zakreślone przez promień wodzący w przeciągu jednostki czasu będzie: $\frac{ab\pi}{T} = h$.



Ryc. 11.

Według drugiego prawa Keplera jest to wielkość niezmienna dla każdej planety. Opierając się na tem prawie znajdziemy prędkość v planety, w któremkolwiek miejscu drogi w sposób następujący: W pewnej chwili planeta znajduje się np. w M i posuwa się w ciągu bardzo krótkiego czasu τ do M'; jeżeli v oznacza prędkość ruchu w tejże części toru, natenczas droga przebyta będzie $MM' = v\tau$. Linia SM (promień wodzący) zakreśla przytem pole trójkątne $SMM' = \frac{1}{2}\, MM' \times SC$ albo $= \frac{1}{2} v\tau \times SC$; według prawa 2-go jest ono proporcyonalne do czasu τ. Ponieważ oznaczyliśmy przez h pole zakreślone w ciągu jednostki czasu, przeto w czasie τ będzie:

$$\tfrac{1}{2}\, v\tau .\ SC = h\tau,$$

z czego wynika:

$$v = \frac{2h}{SC}.$$

Zważywszy, że $2h$ jest stałe, SC zaś posiada w każdym punkcie obwodu inną długość, wnosimy, że prędkość planety jest odwrotnie proporcyonalna do długości linii SC, wykreślonej ze słońca, a prostopadłej do kierunku prędkości (t. j. do stycznej CD). Ruch planety będzie zatem najszybszy w miejscu P, gdzie odległość stycznej od słońca jest najmniejsza (w punkcie przysłonecznym, perihelium); najwolniejszy w A (w punkcie odsłonecznym, aphelium).

Przyśpieszenie ruchu planety można wyznaczyć zapomocą hodografu [1]). Wykreślmy z drugiego ogniska F elipsy prostopadłą FD do stycznej CD i przedłużmy ją do punktu m, t. j. do przecięcia się z przedłużeniem promienia wodzącego SM; stosownie do znanych z geometryi własności elipsy [2]), mamy:

$$FD = Dm; \quad Sm = 2a; \quad SC = \frac{b^2}{FD}$$

Na mocy ostatniego równania możemy poprzednie napisać w postaci:

$$v = \frac{2h}{b^2} \cdot FD.$$

co znaczy, że prędkość jest wprost proporcyonalna do prostopadłej, wykreślonej z drugiego ogniska elipsy do stycznej. Ponieważ $FD = \frac{1}{2} Fm$, możemy także napisać: $v = \frac{h}{b^2} \cdot Fm$.

Gdziekolwiekbądź na elipsie planeta się znajduje, zawsze będzie: $Sm = 2a$; wszystkie punkty m, odpowiadające różnym położeniom planety, leżą tedy na obwodzie koła, wykreślonego z ogniska S, promieniem $2a$. Ponieważ każda linia taka, jak Fm, jest według ostatniego równania proporcyonalna do prędkości ruchu planety w przynależnem położeniu M, przeto koło rzeczone jest hodografem ruchu, a początkowy punkt tego hodografu (oznaczony w ust. 18 i 19 literą O) leży w drugiem ognisku F. Hodograf ten różni się jednak od zwyczajnego tem, że promień Fm, przedstawiający

---

[1]) Maxwell: Materya i ruch, przekład polski, Warszawa 1879, str. 119.
[2]) Porów. Baraniecki. Przecięcia stożkowe § 107.

prędkość, nie jest równoległy do prędkości, lecz prostopadły do niej; chcąc mieć hodograf zwyczajny, należałoby obrócić tę linię kołową o 90^0 około punktu F, żeby linia Fm stała się równoległą do MD. Oprócz tego promienie w hodografie tym nie są równe, lecz tylko proporcyonalne do prędkości; aby uzyskać prędkość, potrzeba długość każdego z nich pomnożyć przez stałą liczbę $\frac{h}{b^2}$; innemi słowy, prawdziwy hodograf jest również kołem, ale większem w stosunku $\frac{h}{b^2} : 1$.

Do punktu M' na torze planety należy m' na hodografie, przeto $\frac{h}{b^2} \, . \, Fm'$ oznacza prędkość w M'. Odcinek mm' jest więc proporcyonalny do przyrostu prędkości na cząstce MM' toru planety, albowiem

$$\overline{Fm'} = \overline{Fm} + \overline{mm'}.$$

Przyrost sam wynosi $\frac{h}{b^2} \, . \, mm'$. Jeżeli, jak wyżej, oznaczymy przez τ czas potrzebny do przebycia nieskończenie małej drogi MM', przez γ przyśpieszenie ruchu (w położeniu M planety), wtenczas będzie:

$$\gamma = \frac{h \, . \, mm'}{b^2 \tau}.$$

Kierunek tego przyśpieszenia znajdziemy, obracając nasz hodograf, jak się wyżej powiedziało, o 90^0. Wtenczas mm' stanie się równoległem do MS, co oznacza, *że przyśpieszenie planety jest zawsze zwrócone ku słońcu S.*

Celem znalezienia wartości przyśpieszenia γ, obliczmy naprzód mm'. Oznaczmy przez $r = MS$ odległość planety od słońca (długość promienia wodzącego w położeniu M); porównanie wartości pól trójkątów nieskończenie wązkich Smm' i SMM' daje z przybliżeniem nader wielkiem:

$$\text{pole } Smm' : \text{pole } SMM' = (2a)^2 : r^2;$$

ponieważ jednak $\quad \text{pole } Smm' = \frac{1}{2} mm' \, . \, 2a,$

$$\text{pole } SMM' = h\tau,$$

przeto proporcya powyższa zamieni się na następującą:

$$mm'.a : h\tau = 4a^2 : r^2,$$

z czego wypada:

$$\frac{mm'}{\tau} = \frac{4ah}{r^2}.$$

Wstawiwszy to w wyrażenie dla γ, pierwej znalezione, uzyskamy ostatecznie:

$$\gamma = \frac{4ah^2}{b^2} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Wiedząc, że $h = \frac{ab\pi}{T}$ możemy także napisać:

$$\gamma = \frac{4a^3\pi^2}{T^2} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Wyznaczyliśmy już poprzednio kierunek przyśpieszenia, obecnie przekonywamy się, *że wartość przyśpieszania planety jest odwrotnie proporcyonalna do kwadratu odległości od słońca.* Na tym wniosku przerwiemy na razie dociekania tyczące się ruchu planet, ażeby podjąć je na nowo w tym rozdziale fizyki ogólnej, który traktuje o prawach grawitacyi, odkrytych przez Newtona.

Ruch jednostajny po kole jest szczególnym przypadkiem ruchu eliptycznego, o którym tu była mowa. Gdyby bowiem która planeta krążyła około słońca w stałej od tegoż odległości $= a$, wtenczas r nie zmieniałoby się wcale i byłoby zawsze $r = a$; prędkość v byłaby również stałą, gdyż prostopadła ze środka (gdzie w kole leżą oba ogniska) do stycznej równa się promieniowi. Dla przyśpieszenia γ dostajemy w tym przypadku tę samą wartość $\frac{4\pi^2 r}{T^2}$, którą znamy już z ust. 19 (wzór 2). — W następującej tablicy znajdujemy: średnią odległość od słońca $= a$, czas obiegu $= T$, mimośród elipsy ε[1]), nakoniec stosunek $\frac{a^3}{T^2}$, dla ośmiu wielkich planet, należących do układu słonecznego; wszystkie te wielkości znaleziono zapomocą pomiarów astronomicznych (por. Jędrzejewicz, Kosmografia):

---

[1]) Mimośród (ekscentryczność) ε jest to stosunek odległości ognisk elipsy do długości większej osi. Liczba ta określa postać elipsy; im większe ε, tem więcej jest elipsa wydłużona, im mniejsze — tem podobniejsza do koła.

Planeta	a kilometrów	T dni śred.	ε	$\frac{a^3}{T^2}$
Merkury . . .	$57·87 \times 10^6$	87 96926	0·2056048	$25·0459 \times 10^{18}$
Wenera . . .	108·14 »	224·70079	0·0068433	25·0459 »
Ziemia. . . .	149·50 »	365·25637[2])	0·0167711	25·0459 »
Mars	227·79 »	686·97965	0 0932611	25·0459 »
Jowisz. . . .	777·83 »	4332·5882	0·0482519	25·0697 »
Saturn . . .	1426·07 »	10759·2364	0·0560713	25·0529 »
Uran	2867·93 »	30688·3904	0·0463414	25·0472 »
Neptun . . .	4493·16 »	60181·11	0·0089646	25·0458 »

Liczby, pomieszczone w ostatnim rzędzie, wykazują, że rzeczywiście stosownie do 3-go prawa Keplera, stosunek sześcianów średnich odległości od słońca, do kwadratów czasu obiegu, jest dla wszystkich planet prawie jednakowy. Skąd pochodzą drobne różnice w wartości tego stosunku, o tem dowiemy się w ust. 120.

Zadania.

49) Punkt ruchomy przebiega 200 razy na minutę obwód koła, mający 30 *cm* w średnicy, ruchem jednostajnym; obliczyć okres, prędkość i przyśpieszenie. *Odp.* $T = 0·3$ *sek;* $v = 314·16$ *cm/sek;* $\gamma = 6579·8$ *cm sek*^{2}.

50) Dwa punkty krążą jednostajnie, w równych okresach, po obwodach *kół* o promieniach 20 *cm* i 30 *cm;* w jakim stosunku są ich prędkości i przyśpieszenia? *Odp.* 2 : 3.

51) Jaki jest stosunek okresów i przyśpieszeń, jeżeli prędkości tych ruchów są jednakowe? *Odp.* 2 : 3; 3 : 2.

52) Jak wielką powinna być liczba obiegów po obwodzie koła o średnicy 1 *m*, aby przyśpieszenie miało tę samą wartość, jak przyśpieszenie ciał spadających swobodnie (981 *cm/sek*^{2})? *Odp.* 0·705 *sek.*

[1]) Liczba ta różni się cokolwiek od tej, którą podaliśmy w ust. 7. Tu jest mowa o okresie obiegu rzeczywistym, względem gwiazd stałych. Tam przytoczono okres obiegu zwany zwrotnikowym, względem punktu wiosennego przejścia słońca przez równik; punkt ten przesuwa się powoli, wskutek powolnej, ale ciągłej zmiany kierunku osi ziemskiej.

53) Obliczyć przyśpieszenie księżyca, w ruchu około ziemi, jeżeli uważać będziemy jego drogę jako koło, o promieniu 60 razy większym, aniżeli promień ziemi (6370000 *m)*; czas jednego obiegu 27 dni, 7 *godz.*, 43 *min.*, 11·5 *sek?* *Odp.* 3·172 promień ziemi /(dzień)^2 = 0·271 *cm/sek*^{2}.

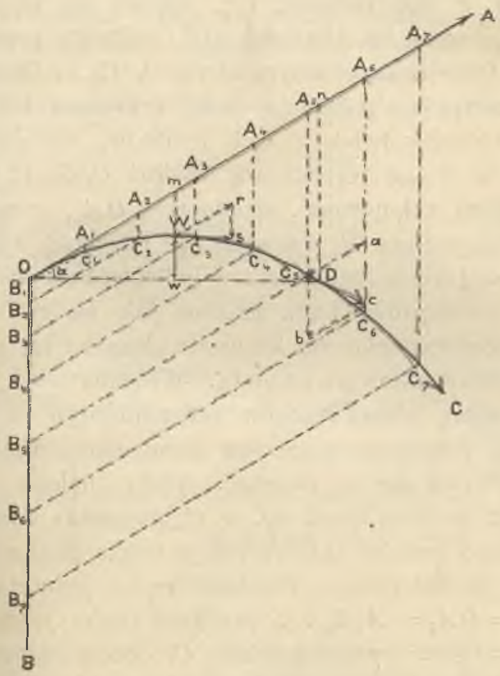
54) Dwa ciała poruszają się po obwodach dwu spółśrodkowych kół o promieniach r_1 i r_2. Prędkości są takie, że przyśpieszenia ich są odwrotnie proporcyonalne do kwadratów promieni; okazać, że kwadraty okresów mają się względem siebie jak trzecie potęgi promieni kół. *Odp.* Z założenia jest $\gamma_1 : \gamma_2 = r_2^2 : r_1^2$; ponieważ $\gamma_1 = \frac{4\pi^2 r_1}{T_1^2}, \gamma_2 = \frac{4\pi^2 r_2}{T_2^2}$, przeto $\frac{r_1}{T_1^2} : \frac{r_2}{T_2^2} = r_2^2 : r_1^2$, czyli $r_1^3 : T_1^2 = r_2^3 : T_2^2$.

55) Obliczyć prędkość i przyśpieszenie ziemi w ruchu około słońca a) w perihelium, b) w aphelium. *Odp.* a) $v = 3026870$ *cm/sek*, $\gamma = 0·61301$ *cm/sek*^{2}; b) 2927020; 0·57323.

21. Składanie i rozkładanie ruchów. Zawilsze zjawiska ruchu ciał dają się częstokroć łatwiej zrozumieć i prościej opisać, jeżeli wyobrazimy sobie, że ruch jest złożony z kilku prostszych ruchów. Tak np. ruch jednostajnie przyśpieszony, z prędkością początkową v_0 (ust. 15), można uważać jako złożony z ruchu jednostajnego, mającego prędkość v_0 i z ruchu jednostajnie przyśpieszonego, bez prędkości początkowej, mającego w chwili t prędkość γt; w ruchu złożonym z tych dwu ruchów znajdziemy prędkość lub drogę przebytą w czasie t, dodając prędkości lub drogi, należące do ruchów składowych a więc $v = v_0 + \gamma t$; $s = v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2$.

Celem uzmysłowienia składania ruchów, wyobraźmy sobie, jak w ust. 11-ym, że ciało porusza się na podstawie ruchomej. Przypuśćmy, że cała podstawa, razem z poruszającem się na niej ciałem, porusza się jednocześnie, w jakikolwiek inny sposób; wypadkowy ruch ciała będzie widocznie złożony z ruchu podstawy i z ruchu ciała na podstawie. Dowiedliśmy w ust. 12, że prędkość ciała w ruchu wypadkowym jest sumą geometryczną prędkości w ruchach składowych. Podobną własność mają także przyśpieszenia. Przyśpieszenia ruchów składowych, jakoteż ruchu wypadkowego, są bowiem proporcyonalne do przyrostów prędkości, powstających w przeciągu dowolnego, bardzo krótkiego czasu; gdy jednak przyrost prędkości ruchu wypadkowego równa się sumie geometrycznej przyrostów prędkości składowych, przeto i przyśpieszenie ruchu wypadkowego jest sumą geometryczną **przyśpieszeń ruchów składowych**. Z tego wynika, że przyśpieszenia dodają się i odejmują, jak wszelkie wielkości kierunkowe, według tych samych prawideł jak prędkości (ust. 12).

Rozumie się samo przez się, że, na odwrót, każdy ruch można rozłożyć na ruchy składowe; prędkości i przyśpieszenia ruchów składowych znajduje się przez rozłożenie prędkości i przyśpieszenia ruchu danego. Przykład takiego rozłożenia ruchu na



Ryc. 12.

dwa ruchy składowe znajdziemy w następującym ustępie, tu zaś objaśnimy na przykładzie, jak się postępuje przy składaniu ruchów.

Wyobraźmy sobie, że podstawa, na której znajduje się ciało ruchome, porusza się jednostajnie po linii prostej; jednocześnie ciało niechaj porusza się na podstawie, w innym kierunku, ruchem jednostajnie przyśpieszonym, z prędkością początkową $= 0$, a z przyśpieszeniem $= \gamma$. Aby znaleźć ruch wypadkowy oznaczmy przez O ryc. 12) ten punkt na podstawie (nie narysowanej na ryc. 12), w którym ciało ruchome znajduje się w chwili zaczęcia ruchu. Punkt ten porusza się jednostajnie w kierunku OA; z końcem pierwszej sekundy zajmuje miejsce A_1, z końcem drugiej A_2 i t. d. Gdyby podstawa była nieruchomą, wówczas ciało poruszające się na niej ruchem jednostajnie przyśpieszonym, w kierunku OB, przebywałoby w przeciągu 1-ej, 2-ej,.... sekundy drogi $OB_1 = \frac{\gamma}{2}$, $B_1B_2 = 3\frac{\gamma}{2}$, $B_2B_3 = 5\frac{\gamma}{2}$, i t. d. (ust. 15). W rzeczywistości ono bierze udział w obu ruchach, t. j. posuwa się w kierunku OA i spada jednocześnie w kierunku OB; odbywa przeto ruch wypadkowy po torze zakrzywionym $O, C_1, C_2, C_3,\ldots$ Punkty $C_1, C_2,\ldots$ oznaczają rzeczywiste położenia ciała, z końcem 1-ej, 2-ej,... sekundy; do któregokolwiek z tych punktów, np. do C_3 możemy dojść, bądź to drogą wypadkową wzdłuż O, C_1, C_2, C_3, bądź też dwiema drogami składowemi, mianowicie OA_3, a następnie $A_3C_3 = OB_3$. Linia, mająca tę własność, że odległość każdego punktu jej np. C_3 od jakiejkolwiek prostej (odległość ta może być mierzona bądź prostopadle, bądź ukośnie jak na ryc. 12-ej wzdłuż C_3A_3) jest proporcyonalna do kwadratu długości tej prostej (w ryc. 12-ej: OA_3) nazywa się **parabolą**. Widzimy więc, że ruch wypadkowy, złożony z dwu ruchów prostolinijnych: z jednostajnego i jednostajnie przyśpieszonego, jest w ogólności ruchem krzywolinijnym i odbywa się po paraboli. Ażeby znaleźć prędkość ciała w którymbądź punkcie drogi, np. w C_5, rysujemy odcinki, wyobrażające prędkości ruchów składowych w tymże punkcie, i dodajemy je do siebie geometrycznie. Prędkość ruchu jednostajnego przedstawia $C_5a = OA_1 = A_1A_2,\ldots$; prędkość ruchu jednostajnie przyśpieszonego $= C_5b = 5\gamma$ (bo położenie C_5 odpowiada czasowi $t = 5$); prędkość wypadkową wyobraża więc odcinek C_5c, który jak wiemy, musi być stycznym do paraboli w punkcie C_5.

Przyśpieszenie ruchu wypadkowego na paraboli posiada kierunek równoległy do OB, a wartość stale równą γ, albowiem przyśpieszenie ruchu jednostajnego wzdłuż OA posiada wartość $= 0$, t. j. wcale nie istnieje; pozostaje więc tylko przyśpieszenie stałe γ drugiego ruchu składowego w kierunku OB i ono jest zarazem przyśpieszeniem ruchu wypadkowego.

Przekonamy się w ciągu dalszego wykładu, że ruch paraboliczny, opisany wyżej, wykonywa ciało ciężkie, np. piłka albo kamień, rzucone ukośnie względem poziomu w kierunku OA; ciało dąży jednostajnie w kierunku rzutu, ale jednocześnie ciężkość ciągnie je w kierunku pionowym na dół, wytwarzając w tym kierunku prędkość jednostajnie rosnącą. Tor ruchu wypadkowego jest linią paraboliczną. Z początku, dopóki prędkości pionowe są małe, przeważa prędkość nadana rzutem, ciało wznosi się łukiem do góry; wkrótce jednak poczynają przeważać prędkości pionowe, wzmagające się nieustannie; minąwszy wierzchołek łuku ciało poczyna się zniżać. Ażeby znaleźć czas T, w ciągu którego ciało wznosi się od O do wierzchołka paraboli W (ryc. 12), ważmy, że w punkcie W prędkość ruchu wypadkowego Ws posiada kierunek poziomy. Jeżeli przez c oznaczymy prędkość wzdłuż OA nadaną rzutem, przez α kąt wzniesienia rzutu nad poziom, wtenczas prędkość w punkcie W będzie wypadkową prędkości c, pochylonej do poziomu pod kątem α i prędkości γT w kierunku pionowym na dół; te trzy prędkości tworzą trójkąt prostokątny Wrs, w którym c, czyli Wr, jest przeciwprostokątną; musi być przeto:

$\gamma T = c \sin \alpha$, z czego wypada: $T = \dfrac{c \sin \alpha}{\gamma}$.

Obaczmy jeszcze jak wysoko rzut sięga, t. j. w jakiej wysokości nad poziomem, przechodzącym przez O, leży wierzchołek W. W przeciągu czasu $T = \dfrac{c \sin \alpha}{\gamma}$ ciało wznosi się do wierzchołka W, zakreślając łuk OW, który możemy zastąpić wznoszeniem się wzdłuż OA, ado punktu m, leżącego pionowo nad W, a następnie spadaniem pionożwem do punktu W, wzdłuż mW. Wysokość punktu m nad poziomem przechodzącym przez O wynosi $mw = cT \sin \alpha = \dfrac{c^2 \sin^2 \alpha}{\gamma}$; spadek jednoczesny, wskutek ruchu jednostajnie przyśpieszonego, wynosi: $mW = \frac{1}{2} \gamma T^2 = \frac{1}{2} \dfrac{c^2 \sin^2 \alpha}{\gamma}$. Wysokość rzutu zatem, równa różnicy tych długości, będzie $Ww = \frac{1}{2} \dfrac{c^2 \sin^2 \alpha}{\gamma}$.

W zastosowaniu tych wzorów do różnych zagadnień praktycznych, zwłaszcza do ballistyki, t. j. nauki o biegu pocisków działowych, chodzi jeszcze o poznanie dalekości, czyli donioności rzutu. Skoro pocisk przekroczy najwyższy punkt drogi W, poczyna zniżać się i wraca po niejakim czasie do tego poziomu, z którego został wyrzucony. Odległość OD od punktu wyjścia, mierzona w linii poziomej, nazywa się dalekością rzutu.

Łatwo dostrzedz — co zresztą bez trudu stwierdzić się daje — że druga połowa ruchu parabolicznego, po za punktem W, jest symetryczna względem pierwszej. Skoro tak jest, natenczas do przebycia drogi od W do D pocisk potrzebuje takiegoż czasu T, jak do przebycia drogi OW. W istocie, w ciągu czasu $2T$, wzniesienie wzdłuż OA wynosi

$nD = c2T \sin\alpha = \frac{2c^2 \sin^2\alpha}{\gamma}$, tyleż wynosi jednoczesne spadanie na dół: $\frac{1}{2}\gamma(2T)^2 = \frac{2c^2\sin^2\alpha}{\gamma}$, z czego się okazuje, że w istocie po upływie czasu $2T = \frac{2c\sin\alpha}{\gamma}$, dalekość rzutu zostaje osiągnięta. Aby nakoniec tę dalekość obliczyć, zwróćmy uwagę na ruch składowy wzdłuż OA. Droga przebyta wzdłuż OA w przeciągu czasu $2T$ wynosi $On = 2Tc = \frac{2c^2\sin\alpha}{\gamma}$; przeto dalekość rzutu w kierunku poziomym będzie: $OD = On\cos\alpha = \frac{2c^2\sin\alpha}{\gamma}\cos\alpha$, czyli $\frac{c^2\sin 2\alpha}{\gamma}$. Różnym kątom wzniesienia α odpowiadają rozmaite dalekości rzutu; największa wtenczas, gdy $\sin 2\alpha$ jest największe ($= 1$), to jest przy wzniesieniu 45^0. Wysokość rzutu natomiast $= \frac{1}{2}\frac{c^2\sin^2\alpha}{\gamma}$ będzie największa przy rzucie pionowym w górę, a więc dla $\alpha = 90^0$.

Zadania.

56) Rzucamy kamień ukośnie do góry, pod kątem 30^0 względem poziomu, nadając mu prędkość 12 *m/sek*; znaleść największą wysokość do której kamień doleci, tudzież dalekość rzutu. *Odp.* 1·83 *m*; 12·71 *m*.

57) Rzucamy ten kamień poziomo, z tą samą prędkością 12 *m/sek*; jak daleko oddali się od nas w kierunku poziomym po upływie 3 *sek*, i jak głęboko spadnie? *Odp.* 36 *m*; 44 *m*.

58) Jaki powinien być kąt rzutu, żeby przy prędkości początkowej 10 *m/sek*, dalekość rzutu była 7 *m*? *Odp.* $21^0 41'$, albo $68^0 19'$.

59) Jaki powinien być ten kąt, żeby dalekość wynosiła 11 *m*? *Odp.* Niemożliwe.

60) Oznaczywszy przez x odciętą w chwili t, ciała rzuconego ukośnie, pod kątem α do góry, przez y rzędną w tej samej chwili, znaleźć równanie toru. *Odp.* $x = ct\cos\alpha$, $y = ct\sin\alpha - \frac{1}{2}\gamma t^2$; rugując t z tych dwu równań znajdziemy szukany związek między x i y mianowicie:

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{\gamma x^2}{2c^2\cos^2\alpha}.$$

22. Ruch drgający prosty (ruch wahadłowy, albo harmoniczny prosty). Przypatrzywszy się uważnie ruchowi jednostajnemu na obwodzie koła, jaki wykonywa np. trzonek korby obracanej jednostajnie, albo jakiebądź inne ciało, obracające się około stałej osi, dostrzeżemy, że ciało takie porusza się naprzemian do góry i na dół, a jednocześnie naprzemian na prawo i na lewo. Rzeczywiście, ruch jednostajny po obwodzie koła możemy rozłożyć na dwa ruchy prostolinijne, niejednostajne, odbywające się w kierunkach prostopadłych do siebie; ruchy te nazywają się **ruchami drgającymi prostymi**, albo **harmonicznymi prostymi**, albo **wahadłowymi**. Ażeby uzmysłowić sobie ruch tego rodzaju, a jednocześnie okazać jego powinowactwo z ruchem kolistym, obracajmy jakiekolwiek ciało na kole i ustawmy w płaszczyznie koła, w dość znacznej od niego odległości, świecę lub lampę, rzucającą na ścianę cień obracającego się ciała. Ruch cienia przedstawi nam składową ruchu kolistego, w kierunku równoległym do ściany; będzie to ruch drgający prosty. Ruch drgający wykonywa także, jak się dowiemy, wahadło, odchylone o mały kąt z położenia pionowego i wahające się następnie w pobliżu tego położenia; podobnie porusza się sprężyna wprowadzona w drganie, nóżki widełek strojowych wydających dźwięk i t. p.; słowem, z ruchami takimi spotykać się będziemy przy objaśnieniu wielu ważnych zjawisk fizycznych. Wypada przeto już w tej części wykładu, zajmującej się opisywaniem rozmaitych rodzajów ruchu, wziąć pod szczególną uwagę własności ruchów drgających.

Na kole mającem środek w O (ryc. 13) i promień $OA = OB = a$, krąży **jednostajnie** punkt M. W chwili $t = o$, znajduje się on, dajmy na to, w B; każde zaś dalsze położenie tego punktu, np. M, określa kąt α, zawarty pomiędzy promieniami OB i OM. Podczas ruchu punktu M kąt α powiększa się jednostajnie, t. j. proporcyonalnie do czasu. Wykreślmy dwie średnice, jednę BB', przez początkowe położenie punktu M, drugą AA' prostostopadle do pierwszej. Z punktu M poprowadźmy dwie prostopadłe MP, MQ do owych średnic. Gdy M porusza się na kole, punkty przecięcia P i Q poruszają się tam i napowrót po średnicach AA' i BB'; są to jakoby cienie punktu M, rzucone przez światła, znajdujące się w wielkiej odległości na przedłużeniu średnic. Widać odrazu, że ruchy punktów P i Q są składowymi ruchu punktu M, t. j. że złożywszy te dwa ruchy, uzyskalibyśmy napowrót ruch jednostajny na obwodzie koła. Punkt P, zarówno jak Q, wykonywa ruch drgający; zwró-

Ryc. 13.

cimy uwagę na jeden z nich, np. na punkt P. Położenie jego na linii AA' określa się przez odległość OP od środka; oznaczymy ją przez s. i uważać będziemy s jako wielkość dodatnią albo ujemną, stosownie do tego, czy P znajduje się po prawej, czy po lewej stronie środka.

Z trójkąta OMP wynika, że:

$$s = a \sin \alpha;$$

s zmienia się tedy, z biegiem czasu, proporcyonalnie do wstawy kąta α. Wartość kąta α, w pewnej chwili, określać będziemy w mierze łukowej, t. j. przyjmiemy za miarę jego stosunek długości łuku BM, do długości a promienia koła [1]).

$$\alpha = \frac{\text{łuk } BM}{a}.$$

Jako jedno zupełne drganie uważać będziemy ruch punktu P, odpowiadający jednemu obiegowi punktu M na kole. W ciągu jednego drgania punkt P przebiega zatem dwukrotnie linię AA', mianowicie od O do A, następnie przez O do A' i napowrót do O.

Drganie zupełne trwa pewien czas T, równy okresowi obiegu punktu M po kole. Po upływie czasu T następuje drugie drganie, trwające znowu czas T, po nim trzecie, czwarte i t. d.; słowem ruch drgający jest ruchem okresowym czyli peryodycznym i powtarza się w równych odstępach czasu T.

Długość łuku BM, przebytego przez punkt M w ciągu pewnego czasu t, licząc tenże od chwili przejścia punktu M przez B, wynika z następującej proporcyi:

$$\text{łuk } BM : 2a\pi = t : T,$$

skąd:

$$\text{łuk } BM = \frac{2a\pi t}{T},$$

zatem:

$$\alpha = \frac{2\pi t}{T}.$$

[1]) W mierze tej kąt 180^0 określa się liczbą $\pi = 3.1415\ldots$; kąt wynoszący 1 stopień wyraża się przeto liczbą $\frac{\pi}{180}$, t. j. $\frac{1}{57{\cdot}29578\ldots}$; kąt φ stopni liczbą $\frac{\varphi}{57{\cdot}29578\ldots}$. Kąt $57{\cdot}2957^0\ldots$ ($= 296265''$) określa się zatem w mierze łukowej liczbą 1; jednostkę tę nazywa się także r a d y a n e m.

Odległość punktu drgającego P od środka O, wynosi więc po upływie czasu t:

(1) $$s = a \sin \frac{2\pi t}{T}.$$

Zamiast okresu drgania możemy wprowadzić (podobnie jak w ust. 19), liczbę n, wskazującą ile razy punkt M okrąża koło w przeciągu jednostki czasu; ta sama liczba równa się liczbie drgań punktu P w przeciągu jednostki czasu. Z ust. 19-go wiadomo, że:

$$n = \frac{1}{T}; \quad T = \frac{1}{n},$$

możemy zatem napisać:

(2) $$s = a \sin 2\pi n t.$$

Wielkości, zawarte w równaniach (1) i (2), mają osobne, powszechnie używane nazwy, mianowicie nazywa się:

s, odchyleniem lub elongacyą punktu drgającego;

a, amplitudą lub obszernością drgania;

T, okresem drgania;

$\frac{T}{2}$, czasem drgania lub wahania;

n, częstością drgania;

$\alpha = \frac{2\pi t}{T} = 2\pi n t$, fazą punktu drgającego.

Faza rośnie z biegiem czasu jednostajnie i proporcyonalnie do czasu. Ilekroć faza powiększy się o 2π, t. j. o 360^0, ruch powtarza się, punkt drgający powraca do pierwotnego położenia i do pierwotnego kierunku ruchu. Z tego powodu nazywamy fazy zgodnemi, gdy one są równe, albo gdy różnią się o parzystą wielokrotność liczby π. Fazy różniące się o nieparzystą wielokrotność liczby π, nazywają się przeciwnemi. Przeciwnym fazom odpowiadają odchylenia jednakowej wielkości, ale po przeciwnych stronach środka O.

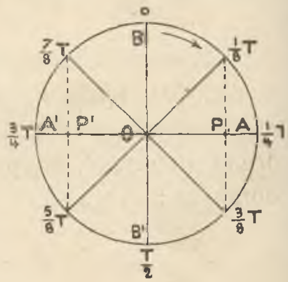
Przyjęliśmy, że w chwili, w której zaczynamy liczyć czas, punkt drgający znajduje się w środku O, albo, co na jedno wychodzi, że faza jest wówczas zerem. Można jednak wybrać początek czasu wtenczas, gdy kąt α uzyskał już pewną wartość, np. δ;

w ciągu czasu t zwiększy się on jeszcze o $\frac{2\pi t}{T}$. Odchylenie punktu drgającego daje w tym razie wzór:

$$s = a \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \delta\right),$$

albo:

$$s = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{\delta}{2\pi}\right).$$



Ryc. 14.

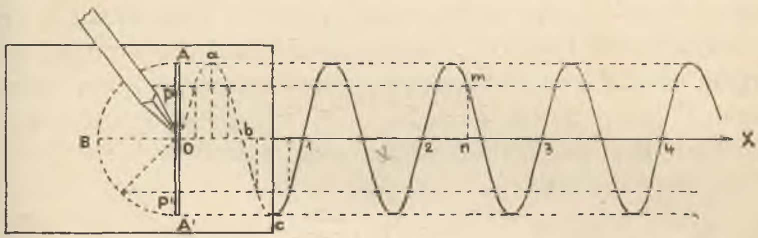
δ nazywa się fazą początkową drgania; liczba $\frac{\delta}{2\pi}$ jest ułamkiem, wyrażającym jaką częścią pełnego kąta 2π jest faza początkowa δ; ta sama liczba wskazuje zarazem, o jaki ułamek okresu T, chwila wybrana jako początek czasu, jest spóźniona względem chwili przejścia punktu drgającego przez środek O.

Wracając do prostszego przypadku, do którego należą wzory (1) albo (2), widzimy, że dla $t = 0$, faza i odchylenie są równe zeru; gdy t urośnie n. p. do $\frac{1}{8}$ okresu t. j. do $\frac{T}{8}$, znajdziemy $s = a \sin\frac{\pi}{4} = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Punkt drgający znajduje się wówczas w P (ryc. 14).

Dla $t = \frac{T}{4}$ mamy $s = a \sin\frac{\pi}{2} = a$, odchylenie równa się amplitudzie. Stąd wraca punkt drgający napowrót ku środkowi; dla $t = \frac{3T}{8}$ mamy $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, $s = OP$; dla $t = \frac{T}{2}$, $s = o$, t. j. punkt przechodzi znowu przez środek, ale w kierunku przeciwnym, aniżeli z początku.

W drugiej połowie okresu sin α przyjmuje wartości ujemne; punkt drgający porusza się po przeciwnej stronie środka; w chwili $t = \frac{5T}{8}$ przechodzi przez punkt P', leżący w takiej odległości od środka, jak punkt P po prawej stronie; w chwili $t = \frac{3T}{4}$ dosięga największego odchylenia $(= a)$ po lewej i zwraca się znowu w prawą stronę. W chwili $t = \frac{7T}{8}$ przechodzi powtórnie przez P', a po upływie całego okresu, t. j. w chwili $t = T$ mija znowu środek. W następnym okresie T powtarza się ruch właśnie opisany i t. d.

23. Linia falowa. (Wykreślne przedstawienie ruchu drgającego prostego). W ustępie poprzedzającym przedstawiliśmy ruch drgający zapomocą rysunku, oznaczając na linii AA', miejsca O, P, A, P, O, P', A', P', O, w których punkt drgający znajduje się w pewnych określonych czasach, np. 0, $\frac{1}{8}T$, $\frac{2}{8}T$ i t. d. Sposób ten uzmysłowienia ruchu drgającego nie objaśnia jednak, z jaką szybkością ruch się odbywa, t. j. jaka jest częstość drgań. Wyobrażenie częstości drgania można uzyskać następującym sposobem. Dajmy na to, że punktem drgającym jest koniec ołówka (ryc. 15)



Ryc. 15.

poruszający się tam i napowrót wzdłuż szczeliny AA', wykrojonej w kartce twardego papieru; jednocześnie z drganiem ołówka przesuwajmy kartkę jednostajnie w kierunku OX, prostopadłym do AA', z pewną prędkością $= c$. Koniec ołówka wykonywa jednocześnie ruch drgający i ruch jednostajny; na papierze podłożonym pod kartkę, nakreśli on linię krzywą, która nosi nazwę linii falowej prostej albo sinusoidy. Linia taka wyobraża dokładnie wszelkie szczegóły ruchu drgającego. Weźmy pod uwagę np. punkt m na tej linii; odległość jego od OX, t. j. rzędna mn, równa się odchyleniu, jakie miał punkt drgający, gdy przechodził przez m. Odcięta punktu m, t. j. odległość On, którą oznaczymy przez x, jest proporcyonalna do czasu t, który upłynął od zaczęcia ruchu, aż do chwili przejścia przez m. Mamy bowiem :

$$x = ct, \text{ albo } t = \frac{x}{c}.$$

Ponieważ $mn = s = a \sin \frac{2\pi t}{T}$, przeto możemy napisać:

$$s = a \sin \frac{2\pi x}{cT}.$$

Zależność którejkolwiek rzędnej s od odciętej x linii falowej określa się tedy wstawą (sinus), stąd nazwa sinusoidy.

Linia falowa składa się z szeregu zupełnie jednakowych części 0-1, 1-2, 2-3 i t. d., z których każda należy do jednego zupełnego drgania; każda z tych części składa się z grzbietu Oab i symetrycznej względem niego doliny $bc1$. Wszystkie mają jednakową długość $0-1 = 1-2 = 2-3$ zwaną długością fali, λ. Długość fali λ zależy od prędkości c, z jaką ruch drgający przenosi się wzdłuż linii OX; w istocie, λ przedstawia drogę, którą kartka, unosząca punkt drgający, przebywa w przeciągu jednego okresu T. Mamy zatem $\lambda = cT$.

Równanie linii falowej można więc napisać także:

$$s = a \sin \frac{2\pi x}{\lambda}. \tag{1}$$

Zapomocą linii falowej można łatwo określić częstość ruchu drgającego. Odetnijmy na linii OX długość c, t. j. drogę przebytą ruchem jednostajnym w ciągu jednostki czasu i policzmy, wiele fal mieści się na tym odcinku; liczba znaleziona równa się częstości n. Sposobem opisanym tu można wykreślić linię falową nietylko dla ruchu drgającego prostego, lecz dla każdego ruchu peryodycznego. Nawzajem, mając linię falową, możemy uwidocznić ruch drgający w następujący sposób. Wykreślmy na pasku papieru dość grubą linię falową i włóżmy go pod kartkę, w której znajduje się wązka szczelina, prostopadła do osi OX linii falowej. Obaczymy w szparze czarną kropkę, w tem miejscu, gdzie widoczna jest część linii falowej. Jeżeli pasek papieru będziemy posuwali jednostajnie pod kartką, wtenczas owa kropka odbywać będzie wzdłuż szpary ruch drgający, odpowiedni danej linii falowej.

Linii falowej używa się często do doświadczalnego badania własności ruchów drgających. Ryc. 16 objaśnia wykreślenie linii falowej ruchu drającego nóżek widełek strojowych, wprowadzonych w drganie za pomocą smyczka, albo przez uderzenie. Do końca jednej nóżki przyklejony jest lekki zaostrzony rysik d, dotykający się lekko płytki szklanej s, okopconej warstewką sadzy. Wprowadziwszy widełki w ruch drgający, posuwamy trzon t, na którym są osadzone, ruchem jednostajnym wzdłuż żłobka, w drewnianej podstawie p. Rysik kreśli na płytce linię falową. Zamiast płytki szklanej używa się niekiedy walca metalowego, pokrytego papierem okopconym, obracającego się około osi, na której wycięty jest gwint śrubowy. Trzon widełek jest wówczas nieruchomy, a linia falowa kreśli się na powierzchni walca, który się obraca, a jednocześnie posuwa naprzód.

Ryc. 16.

24. Prędkość i przyśpieszenie w ruchu drgającym prostym. Uważając ruch drgający jako składową ruchu jednostajnego na kole, w kierunku jednej ze średnic, znajdziemy prędkość jego, tudzież przyśpieszenie na zasadzie praw rozkładania prędkości i przyśpieszeń (ust. 21).

Oznaczamy prędkość ruchu jednostajnego na k o l e przez V (MV, ryc. 13). Jeżeli, jak pierwej, a i T oznaczają promień koła i okres ruchu, wtenczas będzie: $V = \frac{2a\pi}{T}$. Rozkładamy tę prędkość na dwie składowe Mr i rV, w kierunkach równoległych do BB' i do AA'. Składowa rV, równoległa do AA', będzie prędkością ruchu drgającego po linii AA'. Ponieważ kąt $MVr = \alpha$, przeto, oznaczając przez v prędkość ruchu drgającego (Pv, ryc. 13) znajdziemy:

$$v = V \cos \alpha = \frac{2a\pi}{T} \cos \alpha,$$

albo:

$$v = \frac{2a\pi}{T} \cos \frac{2\pi t}{T}. \tag{1}$$

Jest to, jak widać, prędkość zmienna; punkt drgający ma prędkość największą, gdy $\cos \frac{2\pi t}{T} = \pm 1$, t. j. gdy faza przyjmuje jednę z wartości: $0, \pi, 2\pi, \ldots$, co się wówczas zdarza, gdy punkt przechodzi w jednę lub drugą stronę, przez środek O. Ilekroć punkt znajduje się w A lub A', t. j. gdy odchylenie (dodatnie lub ujemne) jest największe, wówczas faza posiada jednę z wartości $\frac{\pi}{2}$, $3\frac{\pi}{2}$, $5\frac{\pi}{2}$,..., przeto prędkość ruchu równa się zeru.

Jeżeli w kilku ruchach drgających prostych okresy T są jednakowe, wtenczas, podług (1), prędkości ich w równych fazach są proporcyonalne do amplitud.

Przyśpieszenie γ ruchu drgającego, jest to również składowa przyśpieszenia ruchu kolistego, równoległa do AA'. Oznaczywszy to ostatnie przez G, mamy (ust. 20, wzór 2):

$$G = \frac{4\pi^2 a}{T^2};$$

G jest zawsze zwrócone ku środkowi koła (MG, ryc. 13). Rozłożywszy MG na Ms i sG, dostrzeżemy, że odcinki sG lub $P\gamma$, wyobrażają przyśpieszenie γ ruchu drgającego. Ponieważ kąt między kierunkami MG i OA wynosi $90 + \alpha$, przeto $\gamma = G \cos(90+\alpha) = -G \sin \alpha$. Przyśpieszenie γ uważać będziemy jako dodatnie albo ujemne, stosownie do tego, czy ono posiada kierunek OA, czy przeciwny. Wstawiwszy za G i α wartości, znajdziemy:

$$\gamma = -\frac{4\pi^2 a}{T^2} \sin \frac{2\pi t}{T}.$$

albo według ust. 22, (1):

$$\gamma = -\frac{4\pi^2}{T^2} s = -4\pi^2 n^2 s. \tag{2}$$

Wzór (2) okazuje, że przyśpieszenie w ruchu drgającym jest zmienne; w każdej fazie drgania wartość jest proporcyonalna do odchylenia, jakie ciało posiada w uważanej chwili. Gdy odchylenie jest dodatnie, wówczas γ jest ujemne, t. j. zwrócone w stronę ujemnych odchyleń; gdy s jest ujemne, wtenczas γ posiada kierunek przeciwny. Z tego wynika, że w każdej fazie drgania przyśpieszenie jest stale zwrócone ku środkowi O ruchu drgającego.

Zadania.

61) Ciało wykonywa ruch drgający prosty, w amplitudzie = 20 *cm* i w okresie = 3 *sek;* znaleźć odchylenia dla $t = \frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$ *sek*, przypuszczając, że dla $t = 0$, faza $= 0$. *Odp.* 17·32; 17·2; 0; — 17·32; — 17·32 *cm*.

62) Obliczyć prędkość powyższego ruchu dla $t = 0, \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}$ *sek.* *Odp.* 125·66; 62·83; —62.83; —125·66; —62 83, +62·83 *cm/sek.*

63) Ile wynoszą przyśpieszenia w tych samych chwilach? *Odp.* 0; —76; —76; 0; 76; 76 *cm/sek*^{2}.

64) Dwa punkty drgają z częstościami 28 i 35 na sekundę; fazy ich są z początku zgodne, lecz z biegiem czasu zaczynają się różnić; wyznaczyć czasy, po upływie których fazy będą znowu zgodne, albo przeciwne. *Odp.* Zgodne dla $t = 0$, $^4/_{28}$, $^8/_{28}$, $^{12}/_{28}$ *sek* i t. d., przeciwne dla $t = {}^2/_{28}$, $^6/_{28}$ i t. d.

65) W jednem drganiu mamy $a = 5$, $n = 10$; w innem $a = 3$, $n = 12$, jaki jest stosunek prędkości (największych)? *Odp.* 50 : 36.

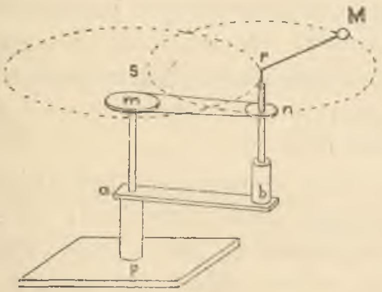
25. Drgania złożone: A) *z drgań prostych w tym samym kierunku.* Drganiem złożonem nazywać będziemy ruch, złożony z kilku ruchów drgających prostych. Składanie ruchów drgających można objaśnić w następujący sposób. Wyobraźmy sobie, że ciało wykonywa drganie proste na podstawie ruchomej; jeżeli podstawa wykonywa jednocześnie drugi ruch drgający, mający jakikolwiek kierunek, okres, amplitudę i jakąkolwiek różnicę fazy względem pierwszego ruchu, wtenczas wypadkowy ruch ciała będzie drganiem złożonem z tych dwu ruchów. Tu stosuje się wszystko, co powiedzieliśmy pierwej o składaniu ruchów (ust. 21).

Drgania proste są to ruchy ściśle peryodyczne, powtarzają się bowiem w równych odstępach czasu, które nazwaliśmy okresami. Drgania złożone natomiast nie zawsze są peryodyczne. One są peryodycznemi tylko wtenczas, gdy okresy albo częstości drgań prostych składowych są spółmierne, t. j. gdy stosunki ich okresów albo częstości mogą być wyrażone przez liczby całkowite. Jeżeli, dajmy na to, okresy dwu drgań prostych mają się jak 3 : 5, a więc częstości jak 5 : 3, wtenczas w przeciągu pewnego czasu, pierwszy ruch składowy wykona 5 drgań, drugi 3 drgania zupełne; z tego wynika, że położenie i prędkość ciała przy końcu tego czasu będą takie, jakie były na początku. Najkrótszy czas, w którym okresy drgań składowych mieszczą się całkowitą liczbę razy, stanowi okres drgania złożonego. Po upływie tego czasu ruch złożony powtarza się.

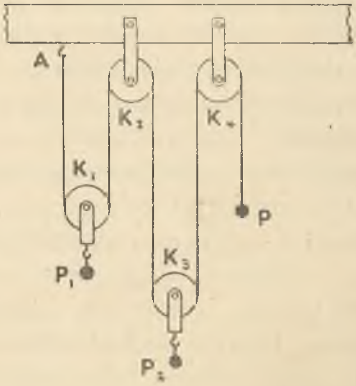
Zastanowimy się naprzód nad drganiami złożonemi, gdy ruchy składowe odbywają się po tej samej prostej.

Powstawanie takich drgań złożonych można objaśnić zapomocą przyrządów, przedstawionych na ryc. 17 i 18. W pierwszym z nich (ryc. 17) ciało M krąży jednostajnie około środka r, który jednocześnie porusza się, także jednostajnie, po obwodzie drugiego koła, około stałego środka s; rysunek objaśnia dostatecznie urządzenie przyrządu. Gdy ustawimy lampę w płaszczyźnie obu tych kół, w znacznej odległości od przyrządu, wtenczas cień ciała M odbywać będzie ruch drgający, złożony z dwu drgań prostych. Punkt r bowiem, środek koła ruchomego, wykonywa na cieniu drgania proste, o amplitudzie $= rs$ około cienia punktu s, t. j, około środka koła stałego; podobny ruch, o amplitudzie rM, odbywa cień punktu M około cienia ruchomego środka r. Ostateczny ruch cienia punktu M będzie zatem sumą tamtych dwu ruchów.

Ryc. 18 wyobraża dwa krążki stałe i dwa ruchome; sznur uwiązany w A, obwija się po kolei około połowy obwodu krążka ruchomego K_1, następnie około stałego K_2 i t. d. U swobodnego końca



Ryc. 17.

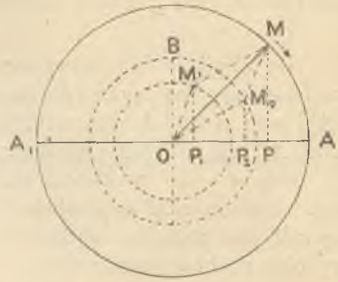


Ryc. 18.

sznura wisi ciężarek P; na osiach krążków ruchomych wiszą ciężarki P_1 i P_2. Skoro pociągniemy P_1 na dół o pewną długość, trzymając P_2 nieruchomo, wtenczas każda z dwu części sznura, na których wisi K_1, przedłuży się o tę samą długosć, przeto P podniesie się o długość podwójną. Jeżeli P_1 odbywa ruch drgający prosty w kierunku pionowym, natenczas P powtarzać będzie ten sam ruch w powiększeniu. Gdy ciężarki P_1 i P_2 poruszać będziemy jednocześnie do góry i na dół, wtenczas ruch ciężarka P przedstawi w powiększeniu ruch wypadkowy. Biorąc więcej takich krążków możemy uzyskać ruch złożony z kilku drgań.

a) ***Okresy jednakowe.*** *Dwa drgania proste, odbywające się po tej samej linii i mające okresy jednakowe, dają jako wypadkowe znowu drganie proste, o tym samym okresie*

Po linii AOA_1 (ryc. 19) drgają punkty P_1 i P_2. Odchylenia ich są OP_1 i OP_2; amplitudy równają się promieniom kół kreskowanych $OM_1 = a_1$ i $OM_2 = a_2$. Dajmy na to, że w chwili $t = 0$ punkty te zajmują miejsca P_1 i P_2; wówczas kąty $BOM_1 = \delta_1$ i $BOM_2 = \delta_2$ przedstawiają fazy początkowe tych ruchów. Odchylenia s_1 i s_2, w jakimkolwiek czasie późniejszym t, będą (ust. 22):



Ryc. 19.

$$s_1 = a_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \delta_1\right), \quad s_2 = a_2 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \delta_2\right).$$

Ruchy te są składowemi, w kierunku OA, ruchów jednostajnych, jakie punkty M_1 i M_2 odbywają po obwodach kół o promieniach OM_1 i OM_2.

Celem znalezienia ruchu punktu, któryby odbywał powyższe dwa drgania jednocześnie, po tej samej prostej, należy przystawić do odchylenia $OP_2 = s_2$ (podstawy drgającej), odchylenie $P_2P = OP_1 = s_1$ (punktu P drgającego na podstawie); otrzymamy tym sposobem odcinek OP, jako odchylenie ruchu wypadkowego. Oznaczywszy długość tego odcinka przez s, mieć będziemy zawsze:

$$s = s_1 + s_2.$$

Położenie punktu P można znaleźć zapomocą następującego wykreślenia. Wystawmy na promieniach OM_1 i OM_2 równoległobok OM_1MM_2. Punkt P znajdować się będzie widocznie na przecięciu się prostopadłej MP z linią AA_1.

Podczas ruchu punktów M_1 i M_2 po właściwych im kołach równoległobok ten obracać się będzie około punktu O, nie zmieniając postaci; punkty M_1 i M_2 mają bowiem jednakowe okresy, wskutek czego kąt M_1OM_2 nie zmienia się podczas ruchu. Z tego wynika, że wierzchołek M równoległoboku poruszać się będzie także po obwodzie koła, o promieniu OM, w takim samym okresie, jak punkty M_1 i M_2. Składowa ruchu punktu M w kierunku równoległym do AA_1, t. j. ruch punktu P, jest przeto ruchem drgającym prostym, w tym samym okresie T, jaki mają ruchy punktów P_1 i P_2, które mieliśmy złożyć.

Do objaśnienia powyższego dowodzenia posłużyć może przyrząd, przedstawiony na ryc. 17, skoro wyobrazimy sobie, że sznur łączący krążki m i n został zrzucony. Podczas jednostajnego obrotu ramienia ab punkt M krążyć będzie około r, a jednocześnie r (w tym samym okresie) około s — co wychodzi na jedno, jak gdyby M krążyło około s. Linia złamana srM odpowiada linii OM_2M na ryc. 19. Nastawiając ramię rM pod różnymi kątami względem sr, otrzymamy wszelkie różnice fazy obu ruchów składowych.

Oznaczywszy przez a amplitudę, przez δ początkową fazę ruchu wypadkowego, złożonego z powyższych drgań:

$$s_1 = a_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \delta_1\right) \text{ i } s_2 = a_2 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \delta_2\right),$$

widzimy (ryc. 19), że $a^2 = OM^2 = OM^2_1 + M_1M^2 - 2\, OM_1 \times M_1M \times \cos\,(OM_1M)$; ponieważ kąt $OM_1M = 180^0 - (\delta_2 - \delta_1)$, przeto:

$$(1) \qquad a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \cos\,(\delta_2 - \delta_1).$$

Na początkową fazę ruchu wypadkowego mamy następujące wyrażenie:

$$\delta = BOM;\ \operatorname{tg}\delta = \frac{OP}{PM},\ \text{zatem:}$$

$$(2) \qquad \operatorname{tg}\delta = \frac{a_1 \sin\delta_1 + a_2 \sin\delta_2}{a_1 \cos\delta_1 + a_2 \cos\delta_2}.$$

Odchylenie ruchu wypadkowego przedstawi się ostatecznie równaniem:

$$(3) \qquad s = a \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \delta\right).$$

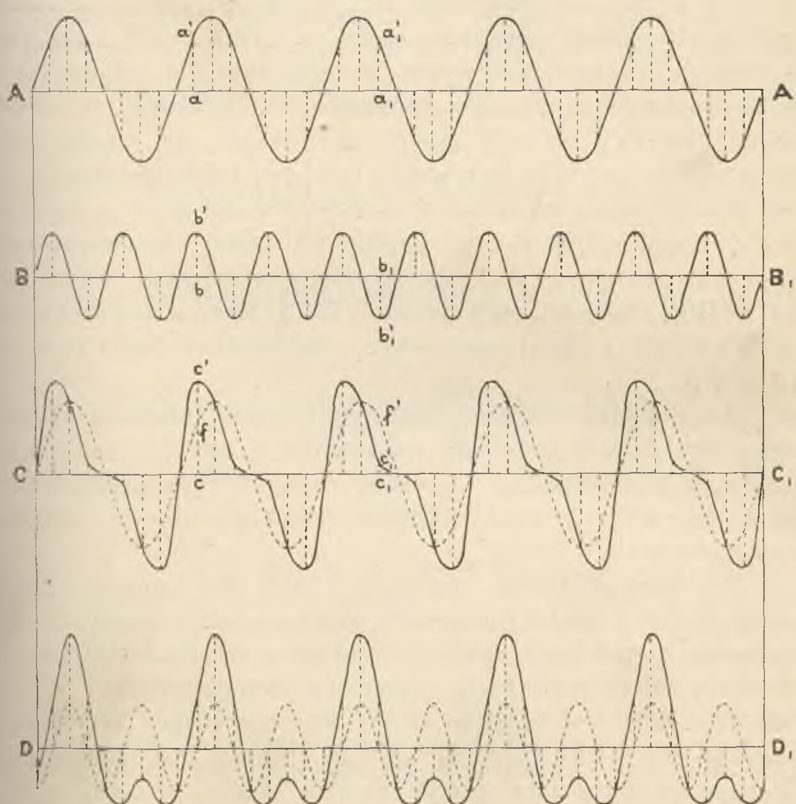
Jest to więc ruch drgający prosty; wartość jego amplitudy zależy, według (1), od różnicy faz drgań składowych. Ilekroć fazy ruchów składowych będą zgodne, t. j. $\delta_2 - \delta_1 = 0$, albo $= 2\pi$, 4π i t. d. mamy $\cos\,(\delta_2 - \delta_1) = 1$, przeto według (1):

$$a = a_1 + a_2.$$

Ilekroć będą przeciwne, t. j. $\delta_2 - \delta_1 = \pi$, albo 3π, 5π i t. d., znajdziemy cos $(\delta_2 - \delta_1) = -1$, zatem:

$$a = a_1 - a_2;$$

amplituda ruchu wypadkowego równa się wtenczas różnicy amplitud ruchów składowych. Gdyby było nadto $a_1 = a_2$, otrzymalibyśmy $a = o$; *dwa ruchy drgające proste, odbywające się po tej sa-*



Ryc. 20.

mej linii, mające równe okresy i amplitudy, znoszą się wzajemnie, jeżeli fazy ich są przeciwne.

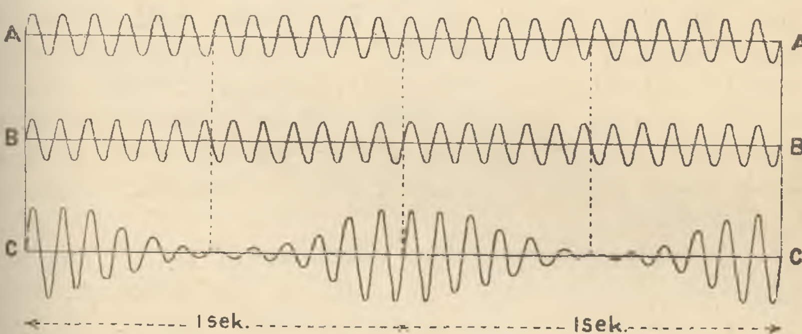
Nie potrzeba dowodzić osobno, że jakakolwiek liczba ruchów drgających prostych, odbywających się na jednej linii, stanowi znowu ruch drgający prosty, byle okresy wszystkich ruchów składowych były jednakowe.

b) Okresy różne. Składanie kilku ruchów drgających prostych, odbywających się po tej samej linii prostej, mających dowolne okresy, daje się najłatwiej wykonać wykreślnie zapomocą linii falowej. Niech linie falowe AA_1 i BB_1 (ryc. 20) wyobrażają dwa ruchy drgające proste. Dla pierwszego przyjęto w rysunku amplitudę $= 1$ *cm*, dla drugiego 0·6 *cm;* częstość pierwszego wynosi 5 na *sek* (okres $= {}^1/_5$ *sek);* drugiego 10 na *sek* (okres $= {}^1/_{10}$ *sek);* długości $AA_1 = BB_1$ wyobrażają czas $= 1$ *sek.* Rzędne linij falowych wyobrażają odchylenia ciała drgającego, tak np. aa' wyobraża odchylenie w pierwszym ruchu, w chwili $t = {}^9/_{40}$ *sek.* Odchylenie w drugim ruchu wynosi w tejże chwili bb'. Celem uzyskania ruchu wypadkowego, złożonego z AA_1 i BB_1, rysujemy trzecią linię CC_1, w taki sposób, żeby każda jej rzędna była równa sumie algebraicznej rzędnych linij AA_1 i BB_1, należących do tego samego czasu; tak n. p. $cc' = cf + fc' = aa' + bb'$, $c_1c_1' = c_1f' - f'c_1' = a_1a_1' - b_1b_1'$ i t. p. Rzędne tej nowej linii wyobrażają widocznie odchylenia w ruchu drgającym, złożonym z ruchów AA_1 i BB_1; linia CC_1 jest przeto linią falową złożoną. odpowiadającą ruchowi drgającemu, złożonemu z drgań prostych AA_1 i BB_1.

Ruch drgający złożony można uwidocznić zapomocą przynależnej linii falowej sposobem wskazanym w ust. 23; pod kartką papieru, w której znajduje się wązka szczelina, przesuwamy jednostajnie linię CC_1; kropka widoczna w szparze, odbywa wówczas ruch złożony.

Dla każdego ruchu, złożonego z dwu albo większej liczby drgań prostych. można wykreślić właściwą linię falową. Postać jej zależy nietylko od amplitud i okresów ruchów składowych, ale nadto od różnic fazy. Jeżeli np. drgania uważane poprzednio (ryc. 20) posiadają w chwili zaczęcia ruchu fazy równe, wówczas sumę ich wyobraża linia CC_1; linia DD_1 przedstawia natomiast ruch, złożony z tych samych składników AA_1 i BB_1 w razie, gdy drugi ruch jest spóźniony względem pierwszego o ${}^1/_4$ własnego okresu, t. j. o ${}^1/_{40}$ *sek*: pierwszy posiada wówczas fazę 0, faza drugiego wynosi $3 \cdot \frac{\pi}{2}$, albo, co na jedno wychodzi, $-\frac{\pi}{2}$ (spóźnienie to widać na kropkowanej linii falowej, wykreślonej dla drugiego ruchu składowego, obok DD_1).

Na osobną wzmiankę zasługuje wynik złożenia dwu drgań prostych, gdy okresy ich, albo częstości, bardzo mało się różnią. Dajmy na to, że jeden z tych ruchów odbywa w przeciągu pewnego czasu τ *sek*, p drgań, drugi $p + 1$ drgań; częstości ich będą wówczas $n_1 = \frac{p}{\tau}$ i $n_2 = \frac{p+1}{\tau}$ na sekundę; p powinno być dużą liczbą, aby istotnie n_1, i n_2 mało się różniły. Każde drganie ruchu złożonego będzie wtenczas w przybliżeniu drganiem prostem (podług *a*), o amplitudzie zależnej od różnicy faz. Jeżeli z początkiem czasu τ fazy obu ruchów są zgodne, wtenczas amplituda początkowa ruchu złożonego równać się będzie w przybliżeniu sumie amplitud ruchów składowych. Drugi ruch składowy, mający większą częstość n, wyprzedza jednak stopniowo pierwszy, pod względem liczby dokonanych drgań; po upływie czasu τ, gdy



Ryc. 21.

jeden ruch wykona p, drugi $p + 1$ drgań zupełnych, wyprzedzanie to urośnie do jednego zupełnego drgania, a różnica fazy urośnie do 2π, t. j. fazy będą znowu zgodne. Natomiast w połowie czasu τ drugi ruch wyprzedza pierwszy tylko o pół drgania; w tej chwili fazy ich będą przeciwne sobie, przeto amplituda ruchu wypadkowego równać się będzie w przybliżeniu różnicy amplitud ruchów składowych. Jeżeli te amplitudy są równe, wtenczas w połowie czasu τ ruch wypadkowy zniknie prawie zupełnie. Jako wypadek złożenia takich dwu ruchów drgających otrzymujemy zatem nowy ruch drgający, o amplitudzie, naprzemian malejącej i rosnącej.

Na przeciąg czasu τ przypada jedno osłabienie ruchu, na następny okres τ drugie i t. d. Liczba N osłabień ruchu złożonego, w ciągu 1 *sek*, będzie więc $\frac{1}{\tau}$. Ponieważ $n_2 = \frac{p}{\tau} + \frac{1}{\tau}$, $n_1 = \frac{p}{\tau}$ przeto: $\frac{1}{\tau} = n_2 - n_1$. Mamy więc:

$$N = n_2 - n_1$$

Częstość osłabień ruchu, złożonego z dwu drgań prostych, o okresach blizkich, równa się różnicy częstości drgań składowych.

Celem uzmysłowienia kolejnego wzmagania się i zanikania ruchu wypadkowego, przedstawiliśmy na ryc. 21 linię falową AA_1 dla ruchu o amplitudzie $a = 0{\cdot}3$ *cm* i częstości $n_1 = 12$ na *sek;* linię falową BB_1, dla drugiego ruchu: $a = 0{\cdot}3$ *cm*, $n_2 = 13$ na *sek;* nakoniec linię falową CC_1 złożoną z tamtych. Widać, że amplituda tej ostatniej wzmaga się z początkiem każdej sekundy do 0·6, zaś w połowie sekundy spada do zera.

26. Rozbiór drgań złożonych. (Analiza harmoniczna). Wspomnieliśmy na początku ust. 25, że ruchy, powstające ze składu kilku drgań prostych, są peryodyczne, t. j. powtarzające się w równych odstępach czasu, o ile częstości drgań składowych są spółmierne. W niniejszym ustępie zajmować się będziemy zadaniem odwrotnem: rozkładaniem jakichkolwiek ruchów peryodycznych na ruchy drgające proste. Zadanie to wchodzi w zakres matematyki wyższej; z powodu ważnych jego zastosowań w fizyce, należy jednak poznać przynajmniej główne twierdzenia, tyczące się tego przedmiotu.

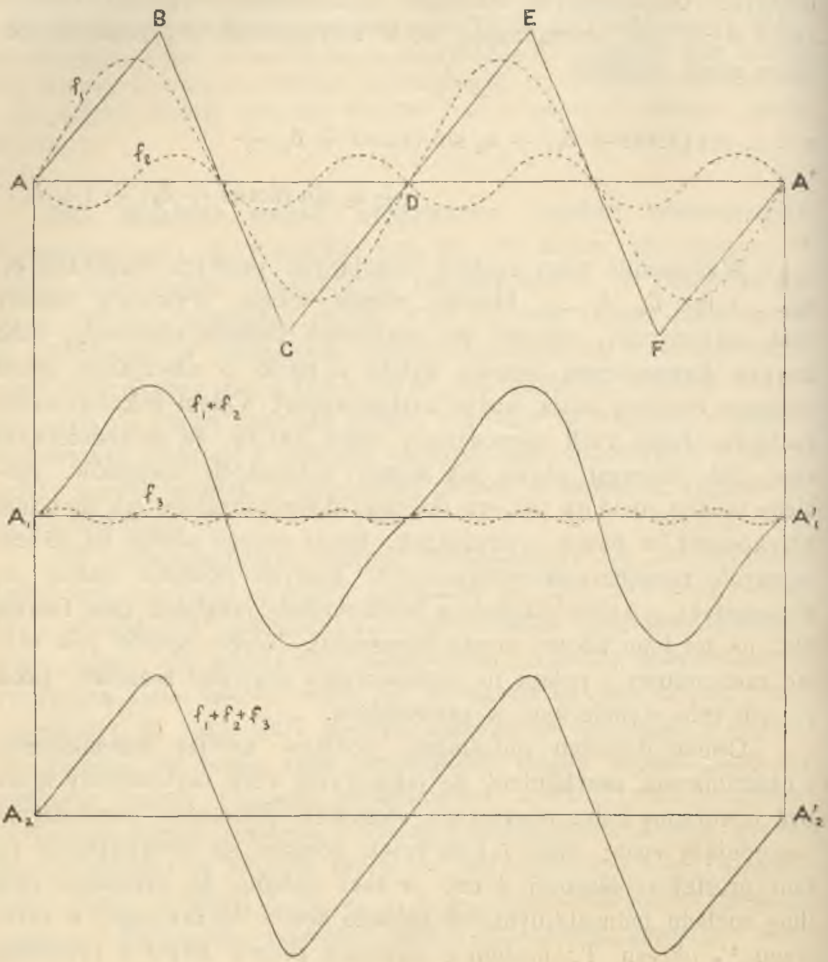
W poprzedzającym ustępie przekonaliśmy się, że składanie kilku linii falowych prostych prowadzi do linij złożonych, mających w różnych przypadkach najrozmaitsze kształty. Zachodzi więc pytanie, czy naodwrót, jakakolwiek dowolnie nakreślona peryodyczna linia falowa może być rozłożona na linie falowe proste (sinusoidy). W roku 1807 wygłosił matematyk francuski Fourier twierdzenie, że *każdy ruch peryodyczny można uważać jako wypadkową pewnej* (czasem nieskończenie wielkiej) *liczby zupełnie określonych drgań prostych, o okresach spółmiernych.* Z tego wynika, że odchylenie s w każdym ruchu peryodycznym może być uważane jako suma odchyleń s_1, s_2, s_3, i t. d., odpowiadających pewnym ruchom drgającym prostym. Jeżeli oznaczymy przez T okres, przez $n = \frac{1}{T}$ częstość danego ruchu peryodycznego, natenczas według twierdzenia Fouriera, częstości tych drgań składowych muszą być całkowitemi wielokrotnościami częstości n, t. zn. w ciągu jednego okresu ruchu danego, pierwszy z ruchów składowych wykonywa jedno drganie zupełne, drugi dwa drgania trzeci może siedem i t. p. Dodać należy, że rozbiór jakiegokolwiek ruchu peryodycznego na drgania proste może być dokonany tylko w jeden jedyny sposób, t. j. każde z drgań składowych posiada amplitudę i fazę zupełnie określoną, zależną tylko od rodzaju ruchu danego. Odchylenie każdego ruchu peryodycznego daje się zatem przedstawić następującym wzorem ogólnym, obejmującym wszelkie dopuszczalne częstości ruchów składowych (nie przesądzając, że w szczególnych przypadkach niektóre mogą odpaść):

$$s = a_1 \sin(2\pi n t + \delta_1) + a_2 \sin(4\pi n t + \delta_2) +$$

$$+ a_3 \sin(6\pi n t + \delta_3) + \text{i t. d.}$$

Wyszukanie tych ruchów drgających prostych (amplitud a_1, a_2,... i faz δ_1, δ_2,...), któreby, razem wzięte, wywołały żądany ruch peryodyczny, nazywa się rozbiorem drgania złożonego, albo analizą harmoniczną (nazwa wzięta z nauki o dźwiękach, gdzie podobne rozbiory mają ważne zastosowanie). Celem uskutecznienia rozbioru (jeżeli ruch peryodyczny dany jest np. za pośrednictwem swej linii falowej) używa się trzech rozmaitych sposobów. Niekiedy można rozbioru takiego dokonać doświadczalnie, jak się o tem przekonamy w nauce o dźwiękach. Drugi sposób polega na użyciu pewnych narzędzi matematycznych, których opisanie należy do matematyki, a które rozkładają mechanicznie jakąbądź linię falową złożoną na linie falowe proste (sinusoidy). Trzeci sposób jest czysto rachunkowy i polega na zastosowaniu prawideł rozbioru, jakie w tym celu wynaleziono w matematyce.

Celem dalszego objaśnienia podstaw analizy harmonicznej i okazania na przykładzie, że jakikolwiek ruch peryodyczny może być utworzony z drgań prostych, stosownie dobranych, przytoczymy następujący ruch; ciało jakiekolwiek porusza się peryodycznie po linii prostej o długości 4 *cm,* w taki sposób, że przebiega ową linię ruchem jednostajnym, od jednego końca do drugiego, w przeciągu $^2/_3$ okresu T; następnie zawraca prawie nagle i przebiega tę samą linię z powrotem, również ruchem jednostajnym, w przeciągu pozostałej $^1/_3$ okresu. Ryc. 22 wyobraża linię falową $ABCD$, $DEFA'$, i t. d. właściwą takiemu ruchowi peryodycznemu; jest to linia łamana, składająca się z odcinków prostych. Rachunek, wykonany według prawideł matematycznych, wyłożonych przez Fouriera, wykazuje, że ruch taki należy uważać jako wypadkową ruchów drgających prostych, w liczbie nieskończenie wielkiej, z których pierwszy, najwolniejszy, posiada również okres T, następne zaś okresy: $\frac{1}{2}T$, $\frac{1}{4}T$, $\frac{1}{6}T$, $\frac{1}{7}T$ i t. d. W tym nieskończenie długim sze-



Ryc. 22.

regu drgań składowych kilka początkowych ruchów mają znaczniejsze amplitudy; amplitudy dalszych są tak drobne, że mogą być pominięte w praktycznem zastosowaniu. Odchylenia drgań składowych są takie:

$$s_1 = 1{\cdot}58 \sin \frac{2\pi t}{T};\ s_2 = 0{\cdot}39 \sin \left(\frac{4\pi t}{T} + \pi\right) = -0{\cdot}39 \sin \frac{4\pi t}{T};$$

$$s_3 = 0{\cdot}10 \sin \frac{8\pi t}{T};\ s_4 = -0{\cdot}06 \sin \frac{10\pi t}{T};\ s_5 = 0{\cdot}03 \sin \frac{14\pi t}{T};$$

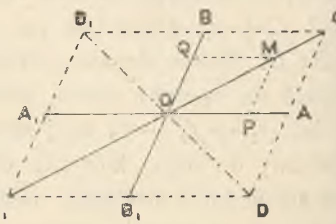
i dalsze, coraz drobniejsze ruchy. Linie falowe, właściwe ruchom s_1, s_2, s_3 wyobrażone są na ryc. 22 jako f_1, f_2, f_3. Rysunek okazuje, że kolejne składanie ruchów s_1 i s_2, $s_1 + s_2$ i s_3 i t. d. zbliża ruch wypadkowy coraz bardziej do danego ruchu skaczącego. Linia, oznaczona tam przez $f_1 + f_2$, przedstawia sumę pierwszych dwu drgań prostych; dodając do tego trzecie, znajdziemy linię oznaczoną przez $f_1 + f_2 + f_3$, która jest już bardzo zbliżona do danej linii falowej $ABCD$. Dalsze drgania proste, których już nie było można przedstawić na rysunku, służą niemal tylko do zaostrzenia zagięć, które w linii $f_1 + f_2 + f_3$ są jeszcze tępe. Ruch peryodyczny skaczący, podobny do tego, który tu dla przykładu opisaliśmy, wykonywają, jak się później dowiemy, wszystkie cząstki struny skrzypcowej, pobudzonej do drgania zapomocą smyczka; drgania proste s_1, s_2 i t. d., z których ruch ten się składa, wzbudzają tony, które można wyśledzić uchem w dźwięku wydanym przez strunę.

27. Drgania złożone, B) *z drgań prostych w różnych kierunkach.* Ruch złożony z drgań prostych, które nie odbywają się po tej samej prostej, jest w ogólności ruchem krzywolinijnym.

a) Okresy jednakowe. W ust. 22 rozłożyliśmy ruch jednostajny po kole (ryc. 13) na dwa prostopadłe do siebie ruchy drgające proste punktów P i Q. Oczywiście, że składając napowrót te dwa ruchy, otrzymamy napowrót ruch jednostajny po kole. Jest to najbliższy przykład złożenia dwu ruchów drgających, mających różne kierunki. Ryc. 13 okazuje, że gdy P przechodzi przez środek O, t. j. gdy zaczyna drganie, drugi punkt Q znajduje się w B, to znaczy, że spóźnił się w fazie o ćwiartkę drgania, i rozpocznie nowe drganie dopiero w O, gdy P posunie się tymczasem do A. Ta różnica faz, odpowiadająca ćwierci okresu albo 90°, utrzymuje się widocznie wciąż.

Jeżeli tedy złożymy dwa ruchy drgające, prostopadłe do siebie, mające jednakowe amplitudy i okresy, tudzież fazy różniące się o 90°, wtenczas ruch wypadkowy będzie ruchem jednostajnym po obwodzie koła (w prawo lub lewo, por. ust. 28).

Gdyby drgania punktów P i Q (ryc. 13) odbywały się bez różnicy faz, t. j. gdyby oba wychodziły jednocześnie ze środka O, wtenczas ruch wypadkowy byłby inny. Łatwo się przekonać, że *ilekroć dwa drgania proste, o jednakowych okresach, mają bądź to zgodne, bądź przeciwne fazy, ruch wypadkowy utworzony z nich jest prostolinijny i stanowi znowu drganie proste w tym samym okresie.* W istocie: punkty P i Q (ryc. 23), drgające wzdłuż AA_1 i BB_1, wychodzą jednocześnie z O i przebywają jednocześnie drogi $OP = OA \,.\, \sin\frac{2\pi t}{T}$ i $OQ = OB \,.\, \sin\frac{2\pi t}{T}$, proporcyonalne, jak widać, do swoich amplitud OA i OB. Składając OP i OQ, otrzymujemy punkt M jako położenie ciała w ruchu wypadkowym; trójkąty OPM i OAC są podobne, albowiem boki ich są równoległe i proporcyonalne względem siebie. Z tego wynika, że punkt M porusza się wzdłuż prostej CC_1 i odbywa ruch drgający prosty — bo proporcyonalny do ruchów P i Q. Gdyby jeden z tych punktów, n. p. P, był spóźniony o pół okresu (różnica faz $= \pi$, fazy przeciwne) wtenczas drganie wypadkowe odbywałoby się widocznie wzdłuż drugiej przekątnej DD_1 równoległoboku wystawionego na AA_1 i BB_1.



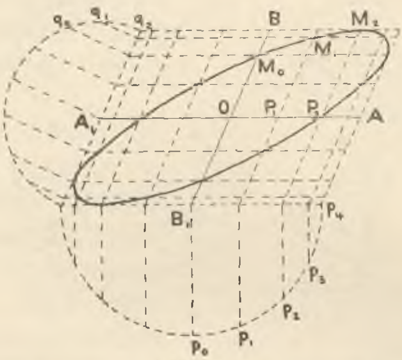
Ryc. 23.

Z tego okazuje się nawzajem, *że każdy ruch drgający prosty* (jak np. CC_1) *można rozłożyć, zapomocą konstrukcyi równoległoboku, na dwa albo więcej ruchów drgających prostych, mających ten sam okres, tudzież fazy zgodne z ruchem danym.*

Jeżeli różnica faz ruchów składowych nie wynosi ani 0 ani π, wtenczas ruch wypadkowy jest zawsze krzywolinijny; a mianowicie: *Dwa ruchy drgające proste, o jednakowych okresach, mające jakiekolwiek amplitudy i fazy, dają ruch wypadkowy odbywający się w ogólności po obwodzie elipsy; w szczególnych przypadkach* (o których właśnie była mowa) *elipsa może przeobrazić się w koło albo linię prostą.*

Ażeby się o tem przekonać, wykreślmy linie AA_1 i BB_1 (ryc. 24), po których odbywają się drgania składowe, i zaznaczmy na nich położenia, zajmowane jednocześnie przez oba punkty drgające. W tym celu kreślimy dwa półkola pomocnicze, podzielone na jednakową liczbę równych części (gdyż okresy mają być równe; na ryc. 24 każde półkole jest podzielone na 8 części).

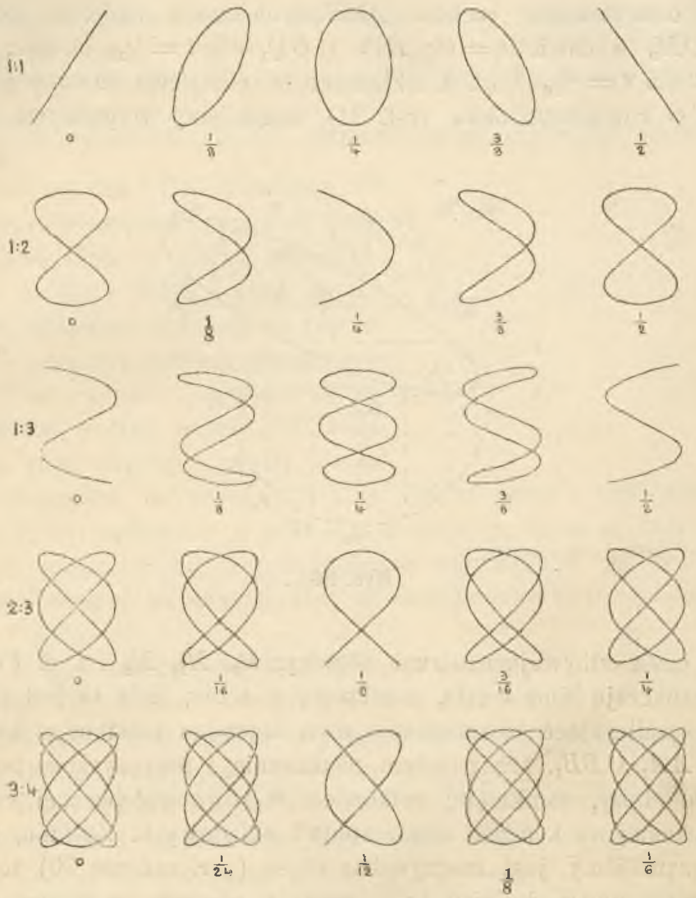
Dajmy na to, że drganie po BB_1 wyprzedzą drganie po AA_1 np. o $^1/_8$ okresu, to jest, że jego faza jest większa o $\frac{\pi}{4}$. Współczesnemi odchyleniami ruchów składowych będą wówczas odcinki 0 i OM_0 w chwili $t=0$; OP_1 i OQ_1 dla $t={}^1/_{16}$ okresu; OP_2 i OB dla $t={}^2/_{16}\ T$ i t. d. Składając te odchylenia zapomocą konstrukcyi równoległoboków (ust. 21), znajdziemy wypadkowe poło-



Ryc. 24.

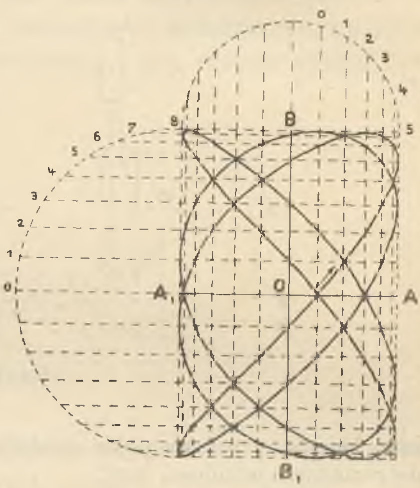
żenia ciała odbywającego ruch złożony: M_0, M_1, M_2 i t. d. Punkty te wyznaczają linię ciągłą, zamkniętą w sobie; linia ta jest elipsą. Ciało, podlegające równocześnie dwu drganiom prostym w kierunkach AA_1 i BB_1, krąży zatem nieustannie i peryodycznie po obwodzie elipsy, zamkniętej całkowicie w równoległobocznej ramce, wystawionej na końcach obu amplitud składowych. Że linia, którą tu otrzymaliśmy, jest rzeczywiście elipsą (por. zadanie 70), to wynika z tej uwagi, że cień koła, rzucony ukośnie na ścianę przez oddalone światło (t. j. promieniami równoległymi), przedstawia się jako elipsa. Jeżeli po kole takiem krąży jednostajnie jakie ciało, natenczas cień jego krążyć będzie po elipsie. Ponieważ ruch po kole można złożyć z dwu drgań prostych, przeto także na cieniu ruch eliptyczny wyniknie ze złożenia dwu ruchów drgających prostych. Pochylając koło rozmaicie względem promieni światła i względem ściany, otrzymamy na cieniu wszystkie przypadki ruchu złożonego, o których tu była mowa: prostą, elipsę i koło (patrz ryc. 25), pierwszy rząd figur).

b) Okresy różne. Jeżeli okresy dwu drgań prostych, odbywających się w różnych kierunkach nie są równe, wtenczas ruch



Ryc. 25.

wypadkowy odbywa się po liniach krzywych, mających różne kształty, zależne od stosunku okresów i od różnicy faz drgań składowych. Ruch wypadkowy jest i w tym razie tylko wtenczas peryodyczny, t. j. ciało krąży nieustannie po obwodzie tej samej niezmiennej zamkniętej w sobie linii, gdy stosunek częstości ruchów składowych daje się wyrazić stosunkiem dwu liczb całkowitych (jak w ust. 25, *A*). Na ryc. 25 narysowane są najważniejsze postaci tych krzywych w przypadku dwu drgań składowych, prostopadłych do siebie. Pierwszy rząd poziomy obejmuje znane nam już linie, odpowiadające okresom równym, t. j. stosunkowi częstości 1 : 1. W drugim rzędzie znajdujemy krzywe, będące torami ruchu złożonego z dwu drgań prostych, których częstości są w stosunku 1 : 2; na jedno drganie w kierunku pionowym przypadają dwa drgania poziome. Ułamki, podpisane pod figurami, wskazują o jaką część własnego okresu drganie poziome wyprzedza pionowe. Dalsze rzędy odnoszą się do stosunków częstości 1 : 3; 2 : 3 i 3 : 4, tudzież do rozmaitych różnic fazy.



Ryc. 26.

Którąkolwiek z tych linii krzywych można wykreślić zapomocą tego samego sposobu, jakiego używaliśmy do wykreślenia elipsy (ryc. 24). Jako przykład posłuży ryc. 26, w której wykreślony jest tor wypadkowy dla dwu drgań składowych AA_1 i BB_1, o okresach mających się jak $\frac{1}{2}$ do $\frac{1}{3}$, przyczem drganie poziome wyprzedza pionowe o $^1/_{24}$ część własnego okresu. Rysunek ten nie wymaga dalszego objaśnienia.

Krzywe przedstawione na ryc. 25 badał naprzód Lissajous (czyt. Lisażu); on wskazał zarazem sposób, zapomocą którego linie te można doświadczalnie otrzymać. Jasno świecący punkt *S* (ryc. 27) np. obraz słońca odbity w błyszczącym guziku, rzuca światło na małe zwierciadło *a*, przytwierdzone do jednego ramienia widełek strojowych W_1, ustawionych pionowo. Po odbiciu się od *a* światło pada na zwierciadło *b* przymocowane do widełek W_2, umocowanych w położeniu poziomem. W ostatniem zwierciedle zobaczymy, patrząc okiem nieuzbrojonem, albo lepiej przez lunetę *L*, obraz jasnego punktu *S*. Wprowadziwszy zapomocą młotka albo smyczka jednę parę widełek w drganie, zrozumiemy, że obraz ten również drgać będzie; ponieważ oko przechowuje przez pewien krótki czas wrażenie świetlne, przeto zamiast punktu ujrzymy krótką świecącą linijkę, wzdłuż której obraz drga. Podczas drgania obu widełek, ruchy składają się i obaczymy wówczas ruch po linii świecącej krzywej, która jednakże tylko wtenczas będzie niezmienną, gdy okresy drgań obu widełek będą spółmierne. Będzie to jedna z linij na ryc. 25.

Jeżeli okresy nie są ściśle spółmierne, ale stosunek ich różni się bardzo nieznacznie od stosunku dwu liczb całkowitych (np. 1 : 2) wówczas także tor drgania wypadkowego różnić się będzie każdej chwili nader mało od jednej z krzywych, należących do stosunku 1 : 2. Jednakże to drganie składowe, którego okres, wskutek istniejącej niedokładności, jest cokolwiek za krótki, będzie wciąż wyprzedzało drugie drganie. Wskutek tego krzywa wypadkowa będzie wciąż zmieniała się, przecho-

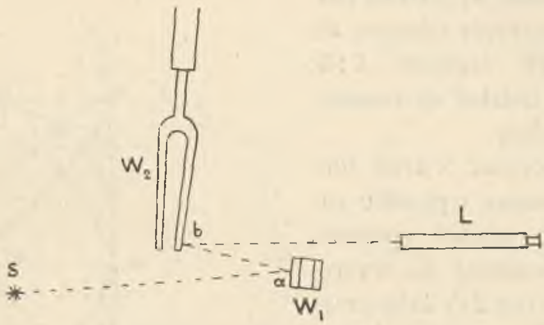
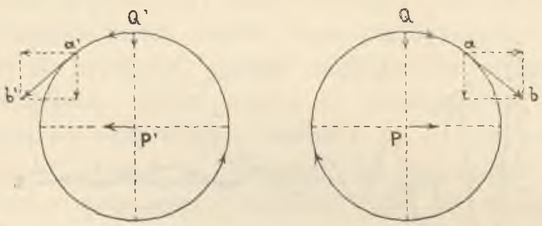


Fig. 27.

dząc kolejno przez wszystkie kształty, odpowiadające stosunkowi 1 : 2, ale rozmaitym różnicom fazy.

28. Drgania złożone, *C) z dwu ruchów kolistych.* Skoro zgodzimy się nazywać drgającym wszelki ruch peryodyczny, powtarzający się w równych odstępach czasu, wówczas i ruch jednostajny po kole wypadnie zaliczyć do ruchów drgających. Okazaliśmy istotnie (ust. 27). że ruch tego rodzaju jest sumą dwu drgań prostych, prostopadłych do siebie, np. pionowego i poziomego (ryc. 28), mających jednakowe amplitudy i okresy, z których jedno wyprzedza drugie w fazie o 90°. Wypadkowy ruch kolisty odbywa się w prawo (ryc. 28, prawa strona) lub w lewo (ryc. 28 lewa strona), zależnie od tego, czy pozioma składowa, czy pionowa wyprzedza drugą w fazie o 90°. Przypuszcza się tu, że w obudwu ruchach składowych faza liczy się od chwili przejścia przez środek, poziomego w prawo, pionowego na dół.

Zapytajmy teraz, coby nastąpiło, gdybyśmy nadali punktowi ruchomemu j e d n o c z e ś n i e dwa ruchy koliste, takie, jak je właśnie opisaliśmy, jeden prawy, drugi lewy, jednakowego zresztą okresu i jednakowej amplitudy. Inaczej: jaki ruch wypadnie, jeżeli prędkość punktu będzie każdej chwili sumą geometryczną jednoczesnych prędkości *ab* i *a'b'* (ryc. 28) dwu przeciwnych, zresztą równych, kolistych i jednostajnych ruchów? Skoro każdy z tych ruchów składowych można zastąpić sumą dwu prostopadłych do siebie drgań prostych, poziomego i pionowego, przeto szukany ruch wypadkowy będzie sumą czterech drgań prostych, dwu poziomych i dwu pionowych. Pierwsze, jak widać natychmiast, znoszą się ustawicznie; drugie, jednakie i równoległe, składają się na jedno drganie proste o amplitudzie zdwojonej, o tym samym okresie (ust.



Ryc. 28.

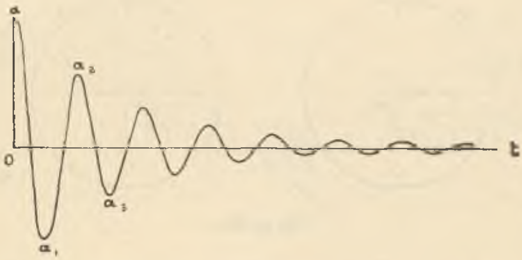
25). *Każde drganie proste można zatem złożyć z dwu równych, jednostajnych ruchów kolistych, mających przeciwne kierunki obrotu.* Kierunek drgania wypadkowego odpowiada w ogólności linii symetryi obu ruchów kolistych.

Wynik ten, mający ważne zastosowanie w teoryi polaryzacyi światła, czytelnik uzmysłowi sobie łatwo zapomocą przyrządu (ryc. 17) do składania dwu drgań. Długość ramienia *rM* trzeba uczynić równą *sr*, a średnica krążka ruchomego *n* powinna być o połowę mniejsza od średnicy stałego *m*. Podczas obrotu listwy *ab* punkt *M* wykonywać będzie drgania po prostej przechodzącej przez *s*.

Dwa obroty przeciwnych kierunków, których okresy nie są równe, ale różnią się nader mało, składają się jeszcze na drganie przybliżenie prostolinijne; jednakże, wskutek zmieniającej się ciągle różnicy faz, kierunek tej linii wiruje zwolna i jednostajnie około środka.

Składanie dwu ruchów kolistych jednakowego okresu i kierunku np. dwu prawych, albo dwu lewych, daje zawsze znowu jednostajny ruch kolisty, o amplitudzie zależnej od różnicy faz. Takim będzie np. ruch punktu *M* w przyrządzie ryc. 17, skoro się zrzuci sznur łączący krążki *m* i *n*.

29. Drgania zanikające. Różne rodzaje ruchów drgających, które dotąd opisywaliśmy, zdarzają się w rzeczywistości tylko wtenczas, gdy jakakolwiek zewnętrzna pobudka utrzymuje ciało w nieustannem drganiu. Wahadła np. w zegarach odbywają ciągle ruch wahający czyli drgający, albowiem mechanizm poruszany ciężarkami potrąca je za każdem wahnieniem. Jeżeli takiej ciągłej pobudki niema, wtenczas ruch drgający, spotykając rozliczne przeszkody, zmniejsza się stopniowo i ustaje nakoniec zupełnie. Sprężyna zgięta drga po oswobodzeniu przez pewien czas, ale drgania jej stają się z biegiem czasu coraz mniejsze, w końcu znikają; wahadło swobodne zatrzymuje się po wykonaniu pewnej liczby wahnień i t. p.



Ryc. 29.

Ruchy tego rodzaju nazywają się d r g a n i a m i z a n i k a j ą c e m i. Uważne ich badanie okazało, że zmniejsza się tylko amplituda, a wskutek tego także prędkość ruchu; okres natomiast pozostaje aż do końca ruchu niezmieniony. Tę ostatnią własność drgań zanikających nazywa się i s o c h r o n i z m e m. Doświadczenie okazuje nadto, że amplitudy kolejnych drgań zmniejszają się w taki sam sposób, jak wyrazy szeregu geometrycznego malejącego. Jeżeli zatem a oznacza pierwszą amplitudę na prawo, w chwili $t = 0$, to następna, na lewo, po upływie czasu $t = \frac{1}{2} T$, wynosić będzie ka (gdzie k jest ułamkiem właściwym, tem mniejszym, im szybcej amplitudy maleją). Dalsze największe odchylenie na prawo, dla $t = T$, będzie znowu tą samą częścią poprzedzającego, t. j. $k\ (ka) = k^2 a$; następne, dla $t = \frac{3}{2} T$, wynosi $k^3 a$ i t. d. W ogólności możemy ruch tego rodzaju uważać jako drganie proste, w którem amplituda nie jest stała, lecz zmniejsza się w taki sposób, że po upływie czasu t wartość jej równa się początkowej wartości, pomnożonej przez pewien ułamek (k), podniesiony do potęgi proporcyonalnej do czasu; ampitudę takiego ruchu po upływie czasu t możemy zatem wyrazić przez wzór: $ak^{\frac{2t}{T}}$. Linia falowa drgań zanikających składa się z szeregu fal, stopniowo malejących, ale mających jednakową długość (ryc. 29, gdzie przyjęto $a = 2$ *cm*; $k = \frac{3}{4}$).

Co do prędkości i przyśpieszenia, w ruchu drgającym o amplitudach malejących, należy pamiętać (ust. 24, wzór 1), że prędkość ruchu drgającego prostego jest proporcyonalna do amplitudy. Skoro te ostatnie się zmniejszają, przeto w tym samym stosunku zmniejszają się także prędkości. Przyśpieszenie ruchu drgającego prostego, jest jak wiadomo, proporcyonalne do każdoczesnego odchylenia i posiada przeciwny temuż kierunek (ust. 24, 2); w drganiach zanikających mamy oprócz tego przyśpieszenia jeszcze dodatkowy ubytek prędkości, będący następstwem ciągłego zmniejszania się amplitud. Każda amplituda zmniejsza się o wielkość proporcyonalną do swej własnej wartości, np. a, przechodząc w ka, zmniejsza się o: $(1 - k)\,a$. Wiedząc, że amplituda jest miarą prędkości ruchu drgającego, wnosimy stąd, że zmniejszanie się prędkości, wynikające ze zmniejszania się amplitudy, jest również proporcyonalne do każdoczesnej prędkości, czyli: że ta część przyśpieszenia jest proporcyonalna do prędkości i posiada przeciwny kierunek. Przyśpieszenie ruchu uważanego składa się więc z dwu części, mianowicie: z części proporcyonalnej do każdoczesnego odchylenia s, zwróconej zawsze ku środkowi drgania, jak w drganiach prostych, i z części proporcyonalnej do prędkości a mającej kierunek przeciwny każdoczesnej prędkości; ta druga część przyśpieszenia sprawia stopniowe zanikanie ruchu. W drganiu np. sprężyny potrąconej pierwszą część przyspieszenia wywołuje sprężystość, drugą opór powietrza otaczającego.

Zadania.

66) Znaleźć ruch wypadkowy, składający się z dwu drgań prostych, po tej samej linii, mających amplitudy: 2 *cm* i 3 *cm*, częstości jednakowe = 50 na *sek*; faza pierwszego ruchu wyprzedza fazę drugiego o 45^0. *Odp.* Drganie proste o częstości 50 na *sek*; amplituda 4·64 *cm;* faza wyprzedza fazę drugiego drgania składowego o $17^0 46'$.

67) Rozłożyć drganie: $s = 12 \sin\left(60\, t + \frac{\pi}{4}\right)$ na dwa drgania

składowe po tej samej linii, z których jest dane: $s_1 = 7 \sin 60\, t$; znaleźć drugie. *Odp.* $s_2 = 8{\cdot}6144 \sin (60\, t + 80^0 4' 20'')$.

68) Jaki będzie wynik złożenia następujących dwu ruchów drgających, po tej samej linii:

$$s_1 = 8 \sin (358 \pi t + \delta_1) \text{ i } s_2 = 6 \sin (372 \pi t + \delta_2)?$$

Odp. Ruch drgający, którego amplituda zmienia się w granicach: od 2 do 14, siedm razy na sekundę.

69) Dwa drgania proste odbywają się w kierunkach prostopadłych do siebie, mają amplitudy 3 i 4, jednakowe częstości i fazy zgodne; jaki będzie ruch wypadkowy? *Odp.* Drganie proste o amplitudzie 5, z tą samą częstością, wzdłuż prostej pochylonej pod kątem $53^0 8'$ do linii pierwszego ruchu.

70) Dwa punkty odbywają drgania proste, o wspólnym okresie, w kierunkach prostopadłych do siebie; odchylenia ich wyrażają się wzorami: $x = a \sin \frac{2\pi t}{T}$, tudzież $y = b \sin \left(\frac{2\pi t}{T} + \varepsilon\right)$. Znaleźć równanie krzywej, po której odbywa się ruch wypadkowy (wyrugować t).

$$Odp.\ y = b \cos \varepsilon \sin \frac{2\pi t}{T} + b \sin \varepsilon \cos \frac{2\pi t}{T} = b \cos \varepsilon \frac{x}{a} +$$

$$+ b \sin \varepsilon \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

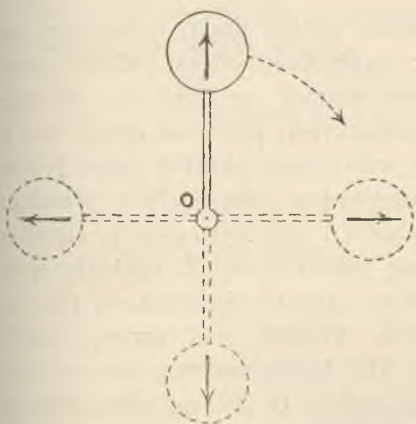
czyli, po przerobieniu: $a^2 y^2 + b^2 x^2 - 2abxy \cos \varepsilon = a^2 b^2 \sin^2 \varepsilon$.

71) Co przedstawia to równanie?

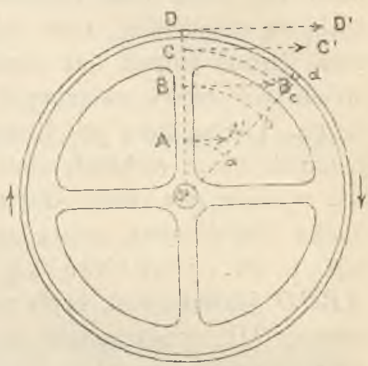
Odp. Gdy $\varepsilon = 0$ lub π, $(ay \pm bx)^2 = 0$, t. j. $\frac{y}{x} = \pm \frac{b}{a}$ (prosta); gdy $\varepsilon = 90^0$, $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$, czyli $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (elipsa o osiach głównych a i b); zresztą elipsa wpisana ukośnie w prostokąt $2a$, $2b$.

30. Ruch postępowy i obrotowy. Dotąd zajmowaliśmy się wyłącznie takimi przypadkami ruchu, w których, jak wspomniano na początku niniejszego rozdziału, ruch całego ciała można określić ruchem jednego punktu. Nie zawsze jest to możliwe, mianowicie, gdy ciało obraca się, albo gdy ruch polega na t. zw. odkształceniu, t. j. gdy ciało się wydłuża, albo skręca, zgina, rozszerza lub kurczy i t. p. Ruch bryły, nie zmieniającej ani kształtu, ani wielkości, t. zw. bryły sztywnej, może być albo postępowy, albo obrotowy, albo jedno i drugie razem.

Postępowym nazywamy ruch ciała, gdy ono posuwa się po linii prostej lub krzywej, nie zmieniając przytem swego kierunku (oryentacyi) względem pewnych kierunków uważanych za stałe, np. względem stron świata. Każda prosta, wykreślona w ciele, albo na ciele, zachowuje podczas ruchu postępowego kierunek równoległy do swego kierunku pierwotnego. Igła magnesowa np., obnoszona bez wstrząsania po drogach prostych lub krzywych



Ryc. 30.



Ryc. 31.

wykonywa ruch postępowy, gdyż wskazuje wciąż ku północy. W przeciwnym razie ruch ciała jest obrotowy, albo obrotowy połączony z postępowym, jak ruch koła u wozu. Dopóki woda w strumieniu porusza się tak, że słomka, rzucona na powierzchnię, płynie nie zmieniając kierunku, ruch wody w pobliżu słomki będzie postępowy, gdyby zaś kierunek słomki zmieniał się, wnosilibyśmy, że istnieje ruch obrotowy wody (wir).

Połączenie ruchu postępowego z obrotowym objaśnia (ryc. 30) Krążek osadzony na trzonku obraca się około końca trzonka O. Strzałka narysowana na krążku zmienia kierunek, ilekroć jego położenie się zmieni; to dowodzi, że krążek obraca się tak samo, jak trzonek; jednocześnie przenosi się on z miejsca na miejsce odbywa zatem ruch postępowy. Gdyby był ruchomo złączony z trzonkiem, wówczas te dwa ruchy mogłyby być wykonane niezależnie od siebie: naprzód przesunięcie do nowego położenia, a następnie obrót około środka krążka.

Ruchy obrotowe mogą odbywać się bądź to około osi stałej, jak koło u kołowrotka; albo też oś obrotu może się zmieniać, jak np. w ruchu piłki albo laski rzuconej w powietrze, a zarazem zakręconej. Uważa się w tym przypadku ruchy obrotowe około punktu i mówi się, że ciało się kręci (frygi, bąk, kula ziemska).

Obroty około osi mogą być pełne, czyli całkowite (koło u wozu, albo częściowe (wahadło).

31. Prędkość kątowa. Różne punkty bryły, obracającej się około osi, mają różne prędkości; najbardziej od osi odległe poruszają się najszybciej, inne zaś tem wolniej, im bliżej osi się znajdują. Można jednak, jak zaraz zobaczymy, prędkość obrotu wszystkich tych części, związanych w jedno ciało, określić jedną jedyną liczbą. Liczbą taką jest liczba obrotów n całej bryły w przeciągu jednostki czasu (sekundy, lub minuty) i ona wystarcza w zupełności, w razie, gdy obrót odbywa się jednostajnie. W ogólnym przypadku dogodniejszą miarą szybkości obrotu, jednostajnej lub nie, jest t. zw. prędkość kątowa. Weźmy pod uwagę punkty $ABCD$ jakiejkolwiek bryły (ryc. 31), leżące na tym samym promieniu OD, prostopadłym do osi obrotu O. Po upływie pewnego czasu promień ten zajmie położenie Od. Wszystkie punkty, znajdujące się na nim, zakreśliły drogi łukowe Aa, Bb i t. d., należące do tego samego kąta środkowego DOd. a zatem proporcyonalne do ich odległości od osi, t. j. do AO, BO i t. d. Prędkości tych punktów, wyobrażone na ryc. 31 przez odcinki AA', BB', CC',... są zatem również proporcyonalne do tych odległości, bez względu na to, czy obrót odbywa się jednostajnie lub nie. Jeżeli prędkość któregokolwiek z tych punktów oznaczymy przez v, przez r, jego odległość od osi, wtenczas, na mocy tej proporcyonalności, wartość stosunku:

$$(1) \quad \frac{v}{r} = \omega.$$

będzie jednakowa dla wszystkich punktów w ciele; stosunek ten nosi nazwę prędkości kątowej.

W obrocie jednostajnym prędkość v każdego punktu jest stała, przeto droga (łuk) przebyta w ciągu jednostki czasu, posiada długość v; ponieważ stosunek długości łuku v do długości promienia r stanowi miarę kąta środkowego należącego do łuku, przeto możemy powiedzieć, że *miarą prędkości kątowej jest kąt* *obrotu (wyrażony w mierze łukowej) przypadający na jednostkę czasu.* W przypadku obrotu niejednostajnego należałoby uważać ruch przez czas nieskończenie krótki; stosunek kąta, o który bryła obróciła się w ciągu tego czasu, do tegoż czasu, wyrażać będzie znowu prędkość kątową w uważanej chwili.

Aby znaleźć związek pomiędzy prędkością kątową, a liczbą obrotów n, przypadających na jednostkę czasu, zważmy, że kąt o który ciało się obraca w przeciągu sekundy, wynosi (w mierze łukowej) $n \cdot 2\pi$. Mamy zatem:

$$(2) \ldots \quad \bar{\omega} = 2\pi n, \text{ albo } n = \frac{\bar{\omega}}{2\pi}.$$

Jeżeli T oznacza czas jednego obrotu (okres), wtenczas $T = \frac{1}{n}$, będzie zatem także:

$$(3) \ldots \quad \bar{\omega} = \frac{2\pi}{T}, \; T = \frac{2\pi}{\bar{\omega}}.$$

W ruchu obrotowym niejednostajnym mówi się o przyśpieszeniu kątowem, rozumiejąc przez to przyrost (dodatni albo ujemny) prędkości kątowej, przypadający na jednostkę czasu.

Zadania.

72) Jaką liczbą wyraża się w mierze łukowej kąt $16^\circ 7' 8''$? *Odp.* 0·2813277...

73) Wóz toczy się z prędkością 1 *m/sek;* znaleźć rzeczywistą prędkość górnego i dolnego punktu na każdem kole. Co jest w każdej chwili rzeczywistą osią obrotu koła? *Odp.* Prędkość górnego = 2 *m/sek.* dolnego = 0; osią obrotu jest zatem linia przechodząca przez punkt dolny.

74) Obliczyć prędkość kątową ziemi, w obrocie około osi ($T = 23$ *godz.* 56 *min.* 4·091 *sek*). *Odp.* 0·000 072 921 15 $\left(\frac{1}{13713{\cdot}5}\right)$

75) Koło obraca się jednostajnie, 500 razy na minutę; obliczyć czas jednego obrotu i prędkość kątową. *Odp.* 0·12 *sek;* 52·36 na *sek.*

76) Trzonek (ryc. 30) obraca się na prawo, 3 razy na minutę; krążek obraca się jednocześnie około własnego środka, na prawo 5 razy na minutę; znaleźć liczbę obrotów bezwzględnych krążka. *Odp.* 8 na minutę, na prawo.

77) Koło nieruchome w chwili $t = 0$, zostaje wprowadzone w ruch obrotowy, w taki sposób, że prędkość kątowa powiększa się jednostajnie, o φ w przeciągu każdej sekundy; znaleźć prędkość kątową po upływie czasu t *sek* i liczbę obrotów, dokonanych w ciągu tego czasu. *Odp.* Prędkość kątowa $= \varphi t$; całkowity kąt obrotu (licząc od $t = 0$) $= \frac{1}{2} \varphi t^2$, zatem całkowita liczba obrotów $= \dfrac{\varphi t^2}{4\pi}$.

ROZDZIAŁ II.

O działaniu sił.

(Zasady dynamiki).

32. Siła. Wyrazu siła używamy w mowie potocznej do określenia działań, jakie wywieramy za pomocą mięśni naszego ciała, gdy pokonywamy, albo usiłujemy pokonać jakiekolwiek opory. Podnosząc n. p. kawałek żelaza z ziemi, używamy siły naszego ramienia, celem pokonania ciężaru żelaza. W języku naukowym używamy wyrazu siła do określenia różnorodnych działań pomiędzy ciałami, które sprawiają podobne skutki, jak siła naszego ramienia. Żelazo możemy podjąć z ziemi, ustawiwszy n. p. nad niem magnes; powiadamy wtedy, że magnes przyciąga żelazo ku sobie pewną siłą. W przyrodzie spotykamy pomiędzy ciałami bardzo wiele podobnych działań, które według powyższego określenia, zaliczyć należy do sił; poznamy je po kolei, jako siły ciężkości, sprężystości, tarcia, siły magnetyczne, elektryczne i t. p. W dalszym wykładzie będzie też miejsce na szczegółowe opisanie warunków, wśród których rozmaite rodzaje sił się objawiają. Obecnie, w wykładzie fizyki ogólnej, zadaniem naszem będzie poznanie ogólnych praw działania sił, t. j. praw, które stosują się do sił wszelkiego rodzaju.

Działanie sił na ciała objawia się w dwojaki sposób: naprzód, mogą one wywoływać ruch, albo ogólniej mówiąc, zmieniać ruch ciała; powtóre, siły działające na ciało mogą równoważyć się wzajemnie, wówczas utrzymują ciało w spoczynku, albo ogólniej mówiąc, nie zmieniają jego ruchu.

Nauka o prawach ogólnych działania sił nazywa się dynamiką (od gr. dynamis = siła); dzieli się ona na kinetykę (gr. kinein = poruszać) i statykę (gr. stenai = stać, statikos = ustalający). Kinetyka zajmuje się zależnością ruchu od sił, które go wy wołują; statyka wskazuje warunki równowagi ciał będących pod wpływem sił.

W potocznej mowie używa się często wyrazu siła w znaczeniu odmiennem od powyższego, mianowicie na oznaczenie wielości lub wielkości; mówi się n. p. siła (mnóstwo) ludzi, siła światła (zamiast natężenie lub jasność) i t. p. W dalszym wykładzie używać będziemy tego wyrazu wyłącznie w znaczeniu dynamicznem, t. j. na oznaczenie działań wzajemnych między ciałami, wzbudzających albo usiłujących wzbudzić ruch materyi.

Zmysł siły poucza nas dostatecznie, na co mamy zwracać uwagę, określając jaką siłę. Siły mogą być większe i mniejsze, t. j. silniejsze lub słabsze, jak się przekonywamy, ważąc n. p. różne ciała w ręku, albo zginając sprężynę. One działają zawsze w kierunku zupełnie określonym i w miejscu również określonem. Aby zatem siłę dostatecznie określić, potrzeba znać: miejsce działania, natężenie i kierunek siły.

Pod względem czasu działania siły dzielą się na ciągłe albo trwałe, t. j. działające przez czas dłuższy, i chwilowe (uderzenia), jeżeli działają bardzo krótko.

Pod względem miejsca działania odróżnić możemy siły, działające na jeden punkt w ciele (punkt przyłożenia siły), albo na wszystkie części ciała (ciężkość), albo na powierzchnię ciała; w ostatnim przypadku nazywamy je ciśnieniami (ciśnienie powietrza, ciśnienie wody na ciało zanurzone i t. p.). Pod względem natężenia i kierunku dzielimy siły na stałe, t. j. działające nieustannie z tą samą mocą i w tym samym kierunku, i zmienne — bądź to co do natężenia, bądź co do kierunku.

33. Zasady dynamiczne. Wynalezienie ogólnych praw, stosujących się zarówno do wszelkich sił działających w przyrodzie, zawdzięczamy Galileuszowi i Newtonowi. Galileusz (Galileo Galilei ur. 1564 w Pizie) zbadał naprzód prawa siły ciężkości i prawa ruchu ciał spadających pod jej wpływem; objaśnił nadto, że jednostajny ruch ciał po linii prostej odbywa się bez pomocy sił. Określenia te stały się podstawą dzisiejszej dynamiki, której główne prawa wypowiedział ostatecznie Izaak Newton (czytaj (Njutn, ur. r. 1643 w Woolsthorpe) w dziele p. t. *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687).

Działanie sił na ciała objawia się, jak wspomniano wyżej, bądź to jako ruch, bądź jako równowaga, czyli spoczynek. Galileusz i Newton oparli badanie sił na zjawiskach ruchu, albowiem w tym przypadku znamiona siły okazują się bezpośrednio i jawnie. Jeżeli n. p. dwu ludzi jednakowo silnych ciągnie w przeciwne strony końce liny albo łańcucha, wtenczas mamy równoważenie się dwu sił i spoczynek. Spostrzeżenie takie nie daje nam zgoła wyobrażenia o sile tych ludzi; gdy atoli zobaczymy człowieka przy pracy, poruszającego ciężary, lub pokonywającego jakie inne opory, natenczas wielkość działania daje nam odrazu miarę siły jego.

Przystąpimy obecnie do wykładu ustawionych przez Newtona trzech zasad dynamicznych, w których streszczone są ogólne prawa działania sił. Prawa te zostały stwierdzone wielu doświadczeniami i pomiarami; innego dowodu prawdziwości ich nie mamy, jak tylko to, że doświadczenie zawsze je potwierdzało i potwierdza. W istocie, one zawierają w sobie uogólnione wypadki różnorodnych doświadczeń dynamicznych, a zarazem stanowią najprostszy ich wyraz.

34. Pierwsza zasada dynamiczna. *Żadne ciało nieruchome nie może samo przez się poruszyć się, a poruszające się nie może zmienić ani kierunku ani prędkości ruchu — chyba za sprawą sił, z zewnątrz na nie działających.* Prawo to orzeka tak zwaną bezwładność materyi. Ciało nieruchome nie może z własnej mocy poruszyć się z miejsca. Ciało, wprowadzone początkowo w ruch, którego zewnętrzne opory nie hamują, ani zewnętrzne popędy nie przyśpieszają, musi poruszać się ciągle, po tej samej linii prostej, w tym samym kierunku i z prędkością niezmienną. Przez siłę zewnętrzną rozumie się tu taką siłę, którą na ciało uważane wywierają inne ciała, zewnątrz niego się znajdujące.

Zasada powyższa nie jest oczywista, czego najlepszym dowodem, że przed Galileuszem nie znano tej jej części, która odnosi się do ruchu jednostajnego. Uważano wówczas ruch kolisty jako taki, który sam przez się utrzymywać się może; ruch jednostajny natomiast, n. p. kuli rzuconej na gładką, poziomą płaszczyznę, przypisywano działaniu siły, która udzielona ciału z początku, miała w niem jakoby dłuższy czas przebywać. Gdy jednakowoż ruch takiej kuli ustaje pospolicie po upływie pewnego czasu, sądzono, że siła poruszająca stopniowo gaśnie, zanika. Zasada przytoczona wyżej objaśnia to zjawisko inaczej; stopniowe zwolnienie ruchu przypisuje ona siłom zewnętrznym, oporom (tarciu o podstawę i powietrze, oporowi powietrza i t. p.), które działają w kierunku przeciwnym ruchowi i stopniowo go niszczą. Gdyby było można oswobodzić ciało zupełnie od wszelkich zewnętrznych sił, wtenczas wprowadzone w ruch, poruszałoby się ono wiecznie, w stałym kierunku i z niezmienną prędkością. Takiego ruchu, zupełnie swobodnego, nie znamy wprawdzie na ziemi; doświadczenia nie przemawiają jednak przeciw zasadzie bezwładności, owszem, popierają ją silnie; im dokładniej bowiem zdołamy oswobodzić ciało poruszające się od zewnętrznych oporów, tem dłużej trwa ruch a prędkość mniej się zmienia.

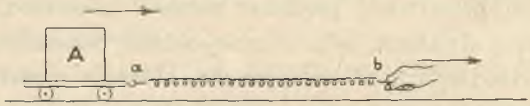
Można przytoczyć wiele przykładów, objaśniających ruch na mocy bezwładności. Rozpędziwszy się, możemy przeskoczyć znaczną przestrzeń, albo ślizgać się daleko na lodzie; przy użyciu łyżew ruch trwa dłużej, z powodu mniejszego tarcia. Wozy kolejowe, potrącone przez lokomotywę albo siłą ludzką, poruszają się następnie po torze poziomym bez pomocy zewnętrznej; tarcie o tor i opór powietrza są wprawdzie siłami zewnętrznemi działającemi na wóz, jednakże one nie pomagają, ale owszem przeszkadzają ruchowi. Ciało niebieskie, rzucone w przestrzeń próżną, w wielkiej odległości od wszystkich innych gwiazd, poruszałoby się po linii prostej z prędkością stałą. Słońce, razem z układem słonecznym, t. j. z planetami, kometami, księżycami, porusza się w przestrzeni na mocy bezwładności, a prędkość jego może chyba o tyle się zmieniać, o ile działa na nie wpływ innych, niezmiernie odległych, układów słonecznych (gwiazd zwanych stałemi), albo może opór jakiej materyi wypełniającej wszechświat. — Gdy pociąg kolejowy nagle staje, osoby stojące w wagonie padają naprzód, gdyż ruch nóg zostaje wstrzymany, a górna część ciała porusza się dalej, na mocy bezwładności. Uderzając trzonkiem młotka o kamień, możemy głowę młotka osadzić trwale na trzonku i t. p.

35. Równowaga sił. Z pierwszej zasady dynamicznej wypływa ważny wniosek, będący jakoby jej odwróceniem, mianowicie: *ilekroć ciało jakie spoczywa albo porusza się jednostajnie po linii prostej, wtenczas albo nie działają na nie żadne siły zewnętrzne, albo równoważą się wzajemnie*, t. j. skutki ich znoszą się nawzajem, tak, iż ruch ciała nie doznaje zmiany. Jako objaśnienie tego wniosku Maxwell[1]) przytacza pouczający przykład. Weźmy pod uwagę jeden z wozów kolejowych, w pociągu poruszającym się jedno-

---

[1]) Materya i ruch.

stajnie, po torze prostym i poziomym; na wóz taki działają następujące siły zewnętrzne: 1) napięcie łańcucha przedniego, które ciągnie wóz wprzód; 2) napięcie łańcucha łączącego wóz uważany z dalszymi; ono ciągnie wóz wstecz; 3) tarcie kół o tor i opór powietrza, działające wstecz; 4) ciężar wozu działający na dół; 5) tor uginający się pod ciężarem wozu ciśnie go wskutek swej sprężystości do góry. Ponieważ ruch wozu jest jednostajny i prostolinijny, przeto wszystkie te siły muszą się wzajemnie równoważyć, to znaczy, gdyby siły tego samego kierunku i natężenia działały na wóz nieruchomy, to nie mogłyby go ruszyć z miejsca; działając na wóz poruszający się, nie zdołają zmienić jego ruchu.



Ryc. 32.

36. Ruch pod wpływem stałej siły. Zanim przystąpimy do wykładu drugiej zasady dynamicznej, zastanowimy się naprzód nad tem, w jaki sposób poruszać się będzie ciało, zupełnie zresztą swobodne, jeżeli poddamy je działaniu jednej tylko siły, mającej stałe natężenie i stały kierunek. Ruchy jednostajne: pociągu ciągnionego przez lokomotywę, albo wozu, który konie ciągną, nie należą do tych, o których zamierzamy tu mówić; są to bowiem ruchy (ust. 35), odbywające się wśród równowagi sił (siły pociągowej i oporów ruchu). Gdybyśmy zaprzęgli lokomotywę do pociągu, któryby nie doznawał oporów tarcia i t. p. natenczas ruch nie byłby jednostajny, przeciwnie, pod wpływem siły pociągowej, ciągle działającej i niezrównoważonej, prędkość jego zwiększałaby się nieustannie.

Wyobraźmy sobie wózek, ile możności swobodnie ruchomy (bez tarcia), na gładkiej poziomej podstawie, obciążony jakiemkolwiek ciałem A (ryc. 32); siły pociągowej niech dostarcza sprężyna, albo tasiemka gumowa, którą wydłużyliśmy do długości ab, a następnie ciągniemy jej koniec b, usuwając rękę z taką prędkością, żeby pomimo ruchu wózka, długość sprężyny była zawsze jednakowa. Sprężyna stale wyciągnięta daje siłę niezmiennego natężenia; doświadczenie uczy, że wózek poruszać się będzie ruchem jednostajnie przyśpieszonym, t. j. że *pod wpływem stałej siły prędkość ciała po-*

większa się w równych czasach o równe wielkości. Moglibyśmy też powiedzieć — może nawet trafniej — że stałą nazywamy taką siłę, która wytwarza ruch jednostajnie przyśpieszony; z doświadczenia poprzedniego wnioskowalibyśmy wtenczas, że sprężyna stale wydłużona wywiera stałą siłę.

Odkrycie tego zasadniczego związku między ruchem a siłą jest zasługą Galileusza, który dowiódł doświadczeniami, że pod wpływem ciężkości, która jest również stałą siłą, ciała spadają ruchem jednostajnie przyśpieszonym.

37. Masa. Doświadczenie ostatnie wskazuje nam, że ciało, poddane działaniu stałej siły nie nabywa bynajmniej prędkości odrazu, nagle; przeciwnie, prędkość narasta stopniowo, proporcyonalnie do czasu działania siły. *Przezwyciężenie bezwładności wymaga tedy czasu.* Naodwrót, ciało rozpędzone, któremu przeciwstawiliśmy opór (siłę działającą w kierunku przeciwnym ruchowi), również nie zatrzyma się nagle, lecz biedz będzie jeszcze przez pewien czas, ruchem stopniowo wolniejącym; przykładem pociąg kolejowy, gdy po zamknięciu pary nałożone zostaną hamulce.

Różne ciała zachowują się jednak w tym względzie rozmaicie; bezwładność ich nie jest bynajmniej jednakowa. Pociąg, wiozący duży ładunek biedz będzie po założeniu hamulców dłużej, aniżeli pusty; ale też wprowadzenie go w ruch, za pomocą danej siły pociągowej, wymagać będzie dłuższego czasu. Kawałek drzewa, poddany działaniu sprężyny stale napiętej (jak na ryc. 32), uzyska prędkość około 19 razy większą, aniżeli bryła ołowiu równej wielkości, ciągniona przez taki sam czas, tem samem napięciem sprężyny. Co w tych doświadczeniach najważniejsze, to to że, gdybyśmy zmienili napięcie sprężyny albo czas jej działania, gdybyśmy nawet sprężystość zastąpili inną jaką siłą, n. p. przyciąganiem magnesów lub elektrycznem, w równych warunkach zmiana prędkości bryły drewnianej byłaby zawsze 19 razy większa, aniżeli ołowianej. Różnicy tej w zachowaniu się kawałków drzewa i ołowiu, albo pociągów pustego i naładowanego, nie należy kojarzyć z rozmaitością ich ciężarów. Doświadczenia, któremi obecnie się zajmujemy, nie zależą bezpośrednio od ciężkości. Wynik byłby ten sam, gdyby ciężkość wcale nie istniała, albo gdybyśmy wykonywali doświadczenia, takie jak na ryc. 32, w środku ziemi, gdzie ciała nic nie ważą — bezwładnemi byłyby one jednak i tam.

Spotykamy się tu widocznie z pewną stałą cechą ciał. Dostrzegamy, że bezwładność ciał jest rozmaita, ale daje się wyrazić za pomocą niezmiennych liczbowych stosunków. Liczbę, wyrażającą bezwładność jakiegokolwiek ciała, nazywamy jego masą; powiadamy, że masa ołowiu jest 19 razy większą, aniżeli masa kawałka drzewa równej wielkości. W ogóle, jeżeli oznaczymy przez m i m_1 masy dwu ciał, a przez v i v_1 prędkości, albo zmiany prędkości, nabyte przez nie w jednakowych czasach pod działaniem jednakowych sił, natenczas przyjmiemy — jako określenie:

$$(1) \quad m : m_1 = v_1 : v,$$

t. j. liczymy masy odwrotnie proporcyonalnie do nabywanych przez nie prędkości.

Jednostka masy. Za pomocą doświadczeń dynamicznych możemy, w myśl przyjętej definicyi (1), określić tylko stosunek dwu mas. Jednostka pozostaje dowolną. W układzie miar centymetr-gram-sekundowym przyjmuje się za jednostkę mas masę wody, zajmującej w temperaturze 4⁰ C. objętość centymetra sześciennego. Jednostką masy jest zatem gram (ust. 6). Gdybyśmy wykonali próbę dynamiczną, n. p. według ryc. 32, naprzód z masą grama, przyjętą za jednostkę, następnie z innem jakiem ciałem, moglibyśmy obliczyć, według (1), stosunek tych mas, a zatem wyrazić masę badanego ciała w gramach.

Tablica mas.

1 cm^3 powietrza	0·0012 ($^1/_{850}$) *gr.*
» korka	$^1/_4$ *gr.*
» wody (4^0)	1·00 *gr.*
» ołowiu	11·37 *gr.*
Człowiek dorosły (średnio) .	70000 *gr.*
Wóz kolejowy z ładunkiem .	20×10^6 *gr.*
Lokomotywa	30×10^6 *gr.*
Księżyc	75×10^{24} gr.
Ziemia	5979×10^{24} *gr.*
Słońce	1990×10^{30} *gr.*

Doświadczenia tego rodzaju nie są ani łatwe, ani dokładne. Udowodnimy jednak później (ust. 57), że masy ciał są proporcyonalne do ich ciężarów. Porównanie mas uskutecznia się tedy w rzerzywistości za pomocą ważenia, na zwykłej wadze (ust. 91). Usprawiedliwienie tego postępowania opiera się jednak, w ostatnim rzędzie, na podanem wyżej określeniu pojęć.

38. Pęd (Ilość ruchu). Łącząc wyniki obu poprzedzających ustępów, powiemy: *prędkość nabyta pod działaniem siły stałej jest wprost proporcyonalna do czasu działania tejże* (t), *odwrotnie proporcyonalna do masy ciała poruszanego* (m). Wyraża to wzór:

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad v = P \cdot \frac{t}{m};$$

P oznacza tu spółczynnik proporcyonalności, zależny już tylko od natężenia siły użytej i od jednostki, w jakiej wymierzać będziemy to natężenie. Napiszmy to inaczej:

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad mv = Pt.$$

Po lewej stronie tego równania występuje wielkość, mająca niepoślednie znaczenie w dynamice. Wyobraźmy sobie pociąg kolejowy, ciężko naładowany, biegnący z prędkością 2 metrów w sekundzie; pomyślmy drugi, pusty, mający n. p. 5 razy mniejszą masę, ale tyleż razy szybszy ruch, 10 metrów w sekundzie. Pomimo znacznej różnicy w szybkości biegu ruchy tych dwu pociągów są pod względem dynamicznym zupełnie równoważne. Ażeby je wstrzymać w biegu, należałoby przeciwstawić im równe w obu przypadkach opory, przez przeciąg jednakowych czasów. Ażeby je wprowadzić w bieg, z podanemi wyżej prędkościami, należałoby znowu przyłożyć jednakowe siły pociągowe, przez jednakowe czasy. Powiadamy, że rozmach, rozpęd, albo krócej pęd ich jest ten sam. Mała prędkość jednego wynagradza się odpowiednio większą masą; w drugim naodwrót. Ruch malutkiej kuli karabinowej, dzięki olbrzymiej prędkości, uderza nie gorzej od masywnego, albo wolniej poruszanego młota.

Dynamiczną miarą ruchu nie jest sama prędkość, lecz *iloczyn z prędkości i masy*, zwany *pędem* albo *ilością ruchu*. Jak okazuje równanie (3), *jednakowe siły, działające przez ten sam czas, wytwarzają we wszelkich masach ten sam pęd.*

Pęd jest wielkością kierunkową; kierunek jego jest to kierunek ruchu (prędkości). Jeśli w ruchu jakim prędkość uważać będziemy jako wypadkową dwu (albo więcej) prędkości składowych

v_1, v_2, wówczas i pęd będzie wypadkową odpowiednich pędów składowych, w myśl równania

$$(4) \quad \overline{mv} = \overline{mv_1} + \overline{mv_2}.$$

39. Miara sił. Według (3) jest

$$(5) \quad \frac{mv}{t} = P.$$

co orzeka, że pęd, wytworzony w jednostce czasu, zależy już tylko od natężenia siły użytej. Najprostszą będzie tedy rzeczą przyjąć tę wielkość P wprost za miarę natężenia siły. Tak się też zawsze czyni. Umowa ta mieści w sobie zarazem określenie jednostki sił. Siła P mieć będzie widocznie natężenie $= 1$, jeżeli w czasie $t = 1$ zdolna będzie wytworzyć pęd $= 1$.

Zależnie od wyboru jednostek czasu, masy i prędkości, możemy mieć różne jednostki sił. W układzie miar centymetr-gram-sekundowym (jednostka masy $= 1$ gram) jednostką będzie siła, zdolna wytworzyć w masie 1 grama, w ciągu 1 sekundy, prędkość 1 *cm/sek.* Jednostkę tę nazywamy dyną.

Ażeby n. p. masie 5 *gr* nadać prędkość 12 *cm/sek*, za pośrednictwem siły działającej stale przez przeciąg 6 *sek*, powinniśmy zastosować siłę o natężeniu:

$$P = \frac{5\ gr \,.\, 12\ cm/sek}{6\ sek} = 10\ gr\ cm/sek^2, \text{ albo } 10 \text{ dyn.}$$

Oznaczenia »dyna«, albo »gram centymetr — na kwadrat sekundy« są zupełnie równoważne. Pierwsze jest krótką nazwą, zastępującą drugie. To ostatnie zaś wyraża wymiar siły, w odniesieniu do jednostek zasadniczych: długości, czasu i masy,

Jeżeli zważymy, że $\frac{v}{t} = \gamma$ oznacza przyśpieszenie ruchu, wywołanego przez siłę P, możemy napisać, zamiast (5):

$$(6) \quad P = m\gamma.$$

Natężenie siły mierzy się iloczynem wywołanego przez nią przyśpieszenia przez masę poruszaną. Działając na masę pierwotnie nieruchomą, siła spowoduje odrazu przyśpieszenie γ. Gdyby, przed zaczęciem działania siły, masa posiadała już jaką prędkość początkową

v_0, wówczas v w równaniu (5) oznaczałoby tylko zmianę czyli przyrost prędkości, zależny od działania siły, nie zaś prędkość całkowitą, której wartością byłoby $v_0 + v$. I w tym przypadku zatem $\frac{v}{t}$ miałoby znaczenie jednostkowej zmiany prędkości, t. j. przyśpieszenia; równanie (6) wyrażałoby i teraz natężenie siły.

Równanie (6) stosuje się nakoniec nietylko do sił o natężeniu stałem, lecz i do zmiennych, n. p. stopniowo wzmagających się, albo stopniowo wątlejących. Dość wyobrazić sobie, że cały czas działania takiej siły podzielono w myśli na odstępy niezmiernie krótkie, tak krótkie, żeby w ciągu żadnego z nich zmienność siły nie zaznaczała się (żeby siłę można było uważać w każdym odstępie za stałą). Do każdego stosować się będzie równanie (6). Przyśpieszenie ruchu będzie w tym przypadku zmienne, zawsze proporcyonalne do każdoczesnego natężenia siły.

Zaznaczmy nakoniec, że siła jest wielkością kierunkową, jest wektorem. O kierunku jej świadczy kierunek prędkości, jaka w danej chwili pod wpływem jej działania powstaje, a więc kierunek przyśpieszenia. Pod wpływem siły o zmiennym kierunku powstanie też ruch o zmiennem przyśpieszeniu, zawsze równoległem z siłą. Ażeby zaznaczyć tę równość wielkości P i $m\gamma$, nietylko co do wartości liczebnej, ale i co do kierunku, napiszemy równanie (6) w postaci równania wektorów.

(7) . . . . $P = m\gamma$.

40. Popęd (Impuls). Podobnie jak za miarę dynamiczną ruchu nie można uważać samej prędkości v, lecz iloczyn mv, pęd, tak też miarą dynamicznego skutku siły P nie jest samo jej natężenie, lecz iloczyn Pt z natężenia i czasu działania. Słaba siła, działając długo, wywoła bowiem taką samą ilość ruchu, jak mocna w czasie odpowiednio krótszym. Mamy istotnie, według (3):

$$mv = Pt.$$

Iloczyn natężenia siły przez czas jej działania (przypuszcza się tu, że przez cały ten czas natężenie jej jest stałe) nazwano popędem albo impulsem. Popęd jest miarą wytworzonego ruchu (pędu).

41. Siły chwilowe (Uderzenia). Pojęcie popędu jest szczególnie użyteczne w przypadku sił działających przez czas niezmiernie krótki, t. zw. uderzeń. Jeśli n. p. uderzymy młotkiem kulę krokietową, skutek dynamiczny (pęd nadany kuli) zależeć będzie jedynie od wielkości wywartego popędu. W podobnych przypadkach nie możemy nawet ocenić natężenia siły, które musiało być znaczne, skoro czas działania był niezmiernie krótki. Jedynym objawem, dającym się dostrzedz i zmierzyć, jest pęd nadany, o którym wiemy, że jest równy wywartemu popędowi.

Siły czynne podczas uderzeń są z natury rzeczy zmienne. W pierwszej chwili zetknięcia się młotka z kulą siła zaczyna dopiero działać (co do fizycznej istoty tej siły por. ust. 53). Jej natężenie, zrazu $= 0$, rośnie szybko do wysokiej wartości, poczem szybko spada, a w chwili oddzielenia się kuli od młotka jest znowu $= 0$. Działanie siły zmiennej możemy wyobrazić sobie jako szereg niezmiernie krótkich, a więc i małych impulsów, o rosnącem lub słabnącem natężeniu. Każdy z nich przyczynia się do zwiększenia pędu, o tyle właśnie, ile wynosi jego wartość. Całkowity pęd nadany ciału równa się sumie owych nieskończenie małych popędów.

Zadania.

78) Siła stała, działająca przez czas 10 *sek*, nadaje po kolei masom m_1, m_2, m_3 i 50 *gr*, prędkości 10, 15, 25 i 30 *cm/sek*: znaleźć wartości tych mas. *Odp.* $m_1 = 150$ *gr*, $m_2 = 100$ *gr*, $m_3 = 60$ *gr*.

79) Ta sama siła udziela masie m_4, w przeciągu 5 *sek*, prędkości 12 *cm/sek*; w przeciągu 3 *sek* masie m_5 prędkości 40 *cm/sek*, a w przeciągu 35 *sek* masie m_6 prędkości 20 *cm/sek*; znaleźć wartość tych mas. *Odp.* $m_4 = 62\frac{1}{2}$, $m_5 = 11\frac{1}{4}$, $m_6 = 262\frac{1}{2}$.

80) Obliczyć natężenie siły. *Odp.* 150 dyn.

81) Jak długo powinna działać siła 10000 dyn na masę 50 *kg*, aby wytworzyła prędkość 100 *cm/sek?* *Odp.* 8 *min.* 20 *sek*.

82) Na wóz kolejowy, ważący 20 ton, działa siła 400 milionów dyn; jak daleko zajedzie ten wóz, na torze poziomym, w przeciągu 1 min.? *Odp.* $\gamma = \frac{P}{m} = 20$ *cm/sek*^{2}; $s = 360$ *m*.

83) Jeżeli wóz ten porusza się po torze poziomym z prędkością 5 *m/sek*; jaką siłę potrzeba mu przeciwstawić, chcąc go zatrzymać w przeciągu 10 *sek?* *Odp.* Siła powinna być tak wielka, aby mogła w przeciągu 10 *sek* wytworzyć w kierunku przeciwnym ruchowi wozu pęd 5×20 *ton metrów/sek*, a więc: 10 *ton metrów/sek*^{2} $= 10 \times 100$ milionów *gr cm/sek*^{2} $= 1000$ milionów dyn.

84) Kula ważąca 10 *kg* zostaje wyrzuconą z działa z prędkością 500 *m/sek*; obliczyć popęd sił, które sprawiły ruch kuli. *Odp.* 5000 *kg m/sek*.

85) Jakie jest średnie natężenie tej siły, jeżeli przelot kuli przez rurę działową trwa $^1/_{300}$ *sek?* *Odp.* 300×5000 *kg m/sek*$^2 = 15 \times 10^{10}$ dyn.

86) Jak długo musiałby trwać przelot, gdyby średnie natężenie siły wynosiło 25×10^{10} dyn? *Odp.* $^1/_{500}$ *sek.*

87) Piłka sprężysta uderza prostopadle o ścianę, z prędkością v, i zostaje z tą samą prędkością odbitą; o ile zmienia się jej pęd podczas uderzenia, jeżeli masa jest m? *Odp.* Traci mv i nabywa mv w przeciwną stronę; zmiana wynosi zatem: $mv - (-mv) = 2mv$. (Podobnie jeżeli ktoś posiada 1000 K. majątku, a straciwszy to, zadłuży się jeszcze na tysiąc, to zubożał o 2000 K.).

88) Jaki popęd wywiera sprężyste oddziaływanie ściany na piłkę, sprawiając tę zmianę? *Odp.* $2mv$, od ściany na zewnątrz.

89) Jak wielki (średni) nacisk wywiera piłka na ścianę (albo ściana na piłkę), jeżeli uderzenie trwa τ *sek?* *Odp.* $\frac{2mv}{\tau}$ dyn.

42. Druga zasada dynamiczna. *Zmiana pędu ciała jest równa popędowi, który ją wywołał, i posiada ten sam kierunek.* Pęd i popęd uważa się tu jako wielkości kierunkowe; popęd wytwarza ilość ruchu równą sobie i w swoim własnym kierunku, a ruch w ten sposób wytworzony składa się geometrycznie z ruchem, który poprzednio już istniał. Prawo wypowiedziane dopiero streszcza w sobie twierdzenia, odnoszące się do działania sił, które były już wyżej wyłożone, a nadto stanowi ono, jak zaraz obaczymy, znaczne tych twierdzeń rozszerzenie.

43. Wniosek 1: *Działanie sił nie zależy od ruchu ciała.* Związek między siłą a ruchem, przez nią wywołanym, objaśniliśmy (ryc. 32) doświadczeniem, odnoszącem się do najprostszego przypadku; przyjęliśmy mianowicie, że ciało, pierwotnie nieruchome, zostaje poddane działaniu stałej siły. Otóż doświadczenia, z których wyprowadzono drugą zasadę dynamiczną, obejmują daleko szerszy zakres zjawisk. Jeżeli n. p. siła zaczyna działać na ciało w chwili, gdy ono posiada już jakikolwiek ruch, natenczas pęd, wzbudzony jej działaniem, będzie taki sam, jak gdyby ciało było pierwotnie w spoczynku. Ruch, wytworzony działaniem siły, dodaje się geometrycznie do ruchu, któremu ciało już podlega.

Z tego wynika, między innemi, znane nam już twierdzenie, że ruch, wywołany działaniem stałej siły jest jednostajnie przyśpieszony. Siła stała wytwarza bowiem, w równych czasach, równe przyrosty prędkości, bez względu na to, czy ciało poruszą się prędzej lub wolniej.

W podobny sposób tłumaczy się ruch jednostajnie opóźniony, który powstaje wtenczas, gdy ciało wprowadzone pierwotnie w ruch zostaje następnie poddane działaniu siły stałej, mającej kierunek przeciwny ruchowi; zmiana pędu jest w tym przypadku ubytkiem, posiada bowiem kierunek przeciwny ruchowi istniejącemu. Wreszcie ciało może poruszać się w jakimbądź ukośnym kierunku względem siły działającej. I w tym razie prędkości, wytwarzane przez siłę, będą do niej równoległe; dodając się do prędkości, jaką ciało pierwotnie posiadało, sprawią one zmianę w kierunku ruchu.

Tak n. p. ciało, rzucone w kierunku OA (ryc. 12) z prędkością c, porusza się w tymże kierunku jednostajnie, posiada ilość ruchu mc. Jeżeli jednocześnie działa na nie siła stała, w kierunku równoległym do OB, wtenczas ruch wypadkowy składać się będzie geometrycznie z mc w kierunku OA i z $m\gamma t$, wytworzonego działaniem siły w kierunku OB. Ruch wypadkowy ciała odbywać się będzie po łuku parabolicznym.

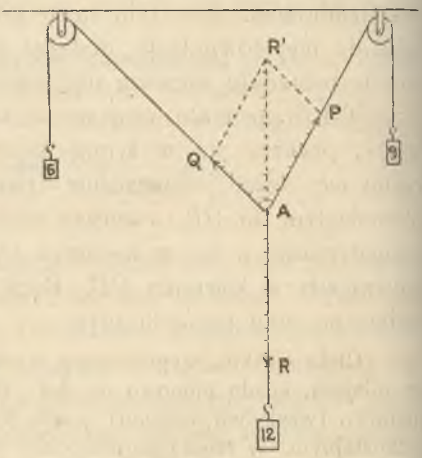
Ciało ciężkie, wypuszczone z ręki w wagonie kolejowym stojącym na miejscu, spada pionowo na dół. Wiadomo, że tak samo spada ono pionowo (względem wagonu) jeżeli tenże porusza się na torze ruchem jednostajnym. W rzeczywistości ciało wypuszczone podczas jazdy porusza się jednocześnie równolegle do toru, t. j. zachowuje wskutek bezwładności ruch, jaki posiadało w ręku. Ciężkość wytwarza zatem ten sam ruch, bez względu na to, czy kula posiada obok tego prędkość w kierunku toru, czy nie. — Jeździec pędzący jednostajnie na koniu podrzuca pionowo do góry kulę, poczem ona spada mu napowrót do ręki; względem jeźdźca kula porusza się tak samo, jak gdyby stał na miejscu; w rzeczywistości zaś biegnie ciągle nad nim, zatrzymując wskutek bezwładności prędkość nabytą w kierunku poziomym.

44. Wniosek 2. S k ł a d a n i e i r o z k ł a d a n i e s i ł. Jeżeli do tego samego ciała przyłożymy jednocześnie kilka sił różnego natężenia w różnych kierunkach, wtenczas każda z nich wytwarzać będzie ilości ruchu, odpowiednie swemu popędowi, we własnym kierunku, jak gdyby pozostałych wcale nie było. Siły nie przeszkadzają sobie wzajemnie. Wytworzone pędy składać się będą z sobą i z ruchem poprzednio już istniejącym, według praw geometrycznego dodawania (ust. 13). Jeżeli n. p. są dwie siły P i Q, to wypadkowy, wytworzony przez nie pęd nie będzie:

$$Pt + Qt, \text{ albo } (P + Q)\,t$$

Ten sam pęd możnaby oczywiście udzielić ciału działaniem jednej tylko siły, mającej natężenie i kierunek: $\overline{P} + \overline{Q}$, a więc równej sobie sumie geometrycznej sił P i Q. Siła, sprawiająca takie działanie, jak kilka sił działających jednocześnie, nazywa się ich **wypadkową**. Wartość liczebną i kierunek wypadkowej znajdujemy, przedstawiając siły pod względem natężenia i kierunku przez odcinki proste i dodając te odcinki geometrycznie.

Siła równa co do natężenia wypadkowej kilku sił, lecz mająca kierunek wprost przeciwny, nazywa się ich **równoważącą**. Równoważąca wzbudza każdej chwili taki sam ruch, jak siły dane, jednakowoż w przeciwnym kierunku; siła tego rodzaju niweczy zatem działanie tamtych, wskutek czego ciało pozostaje w spoczynku czyli w równowadze; ogólnie mówiąc, ciało, znajdujące się pod wpływem takiego zrównoważonego układu sił, nie doznaje zmiany ruchu, a więc spoczywa albo porusza się tak samo, jak gdyby sił żadnych nie było. Suma geometryczna wszystkich tych sił, łącznie z równoważącą, jest równa zeru. Ryc. 33 objaśnia takie zrównoważenie się trzech ciężarów, działających za pośrednictwem sznurów na punkt A.



Ryc. 33.

Z powyższych uwag wynikają bezpośrednio następujące twierdzenia:

1) Jeżeli kilka sił tworzą układ równoważący się, wtenczas którakolwiek z nich jest równoważącą pozostałych. Jeżeli bowiem

$$\overline{P} + \overline{Q} + \overline{R} + \overline{S} = 0,$$

wtenczas będzie:

$$\overline{P} + \overline{R} + \overline{S} = -\overline{Q}.$$

2) Wypadkowa dwu sił, działających w jednej linii prostej, posiada kierunek siły większej i równa się sumie albo różnicy sił

danych, zależnie od tego, czy one działają w tę samą stronę, czy w strony przeciwne.

Każdą siłę można zastąpić dowolną liczbą innych sił, bez zmiany działania, byle wypadkowa tych nowych sił była równa sile danej. Znaczy to, że siły możemy rozkładać na składowe, postępując tak samo, jak przy rozkładaniu prędkości, przyśpieszeń i innych wielkości kierunkowych. Ryc. 7, objaśniająca rozkładanie prędkości, stosuje się również do sił, jeżeli przez Aa rozumieć będziemy siłę przez Ab i Ac jej składowe.

Zadania.

90) Znaleźć natężenie i kierunek wypadkowej sił P i Q, prostopadłych do siebie. *Odp.* $R = \sqrt{P^2 + Q^2}$; $\operatorname{tg}(P, R) = \frac{P}{Q}$.

91) Znaleźć wypadkową sił P i Q, których kierunki zawierają kąt α. *Odp.* $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha}$; $\sin (P, R) = \frac{Q}{R} \sin \alpha$.

92) Zastosować powyższy wzór do przykładu: $P = 6$ dyn, $Q = 9$ dyn, $\alpha = 75^0 31' 21''$. *Odp.* $R = 12$ dyn; $(P, R) = 46^0 34'$.

93) Znaleźć północną i wschodnią składową siły 7540 dyn, działającej poziomo, pod kątem 35^0, licząc od północy ku wschodowi. *Odp.* 6176·4; 4324·8.

45. Trzecia zasada dynamiczna. *Do każdego działania należy równe mu oddziaływanie w kierunku wprost przeciwnym*, czyli: *wzajemne działania wszelkich dwu ciał mają jednakowe natężenia a kierunki przeciwne.*

Dotychczas opisywaliśmy działanie sił jednostronnie; badaliśmy ruch ciała pod wpływem siły zewnętrznej, nie troszcząc się o to, skąd ta siła pochodzi. Trzecia zasada dynamiczna stwierdza przedewszystkiem, że wszelkie siły są wzajemnemi działaniami pomiędzy ciałami albo częściami ciał, t. j. że źródłem siły działającej na ciało jest zawsze inne jakieś ciało; a dalej, że te działania są zawsze wzajemne. Nigdy się nie zdarzy, żeby ciało jakie A działało na B, a nie doznawało jednocześnie wzajemnego działania od ciała B. Jeżeli jednę z tych sił nazwiemy działaniem (akcyą), wtenczas dajemy drugiej miano oddziaływania (reakcyi); te dwie siły są zawsze równe i mają przeciwne kierunki. Gdy zwracamy uwagę nie na jedno tylko ciało, ulegające działaniu siły, jak to czyniliśmy dotąd, lecz zarazem na drugie, które jest przyczyną tej siły, wówczas nazywamy wzajemne ich działania **siłami wewnętrznemi**; są to bowiem siły, działające pomiędzy dwiema częściami układu materyalnego stanowiącego przedmiot badania.

Trzecia zasada stosuje się do wszelkich sił w przyrodzie, bez względu na to, czy one są w równowadze, czy sprawiają ruch. Objaśnimy ją kilku przykładami:

a) Kamień leżący na stole ciśnie na stół swym ciężarem, w kierunku pionowym, na dół; jednocześnie stół działa na kamień, cisnąc go pionowo do góry. Przyczyną tego oddziaływania jest sprężystość stołu, który pod działaniem ciężaru ugina się cokolwiek; usiłując wyprostować się ciśnie na kamień, podobnie jak sprężyna zgięta. Gdyby n. p. ciężkość przestała działać, t. j. gdyby masa leżąca na stole utraciła nagle swój ciężar, wtenczas oddziaływanie stołu rzuciłoby kamień do góry. W podobny sposób zasada równości działań i oddziaływań stosuje się zawsze, ilekroć dwa ciała, będące względem siebie w równowadze, działają wzajemnie na siebie. Jeżeli pomiędzy niemi znajduje się materya, pośrednicząca w działaniu, wtenczas materya ta jest w stanie napięcia (jest wydłużona, skrócona, rozszerzona, ściśnięta, skręcona i t. p.; jak ów stół między ziemią a kamieniem).

b) Kula wylata z rury działowej pod wpływem ciśnienia gazów, wytworzonych przez spalenie prochu. To samo ciśnienie działa jednak i na rurę działową; z tej przyczyny działo cofa się w chwili wystrzału wstecz. Obadwa ciała, kula i działo, ulegają podczas ruchu jednakowym siłom, lecz w kierunkach przeciwnych.

c) W poprzedzającym przykładzie gaz zgęszczony był pośrednikiem we wzajemnem działaniu kuli i działa. Są jednak przykłady wzajemnych działań, w których nie znamy materyi pośredniczącej. Działania takie zowiemy bezpośredniemi; one podlegają również trzeciej zasadzie dynamiki. Gdy n. p. kamień spada ku ziemi, ruch odbywa się pod wpływem ciężkości, t. j. przyciągania ze strony ziemi. Na mocy zasady trzeciej, kamień przyciąga nawzajem kulę ziemską, siłą równą tej, którą sam jest przyciągany. Z tego wynika, że jednocześnie kamień spada ku ziemi i ziemia ku kamieniowi. Ruch ziemi jest jednak nieznaczny, gdyż siła, która wprowadza małą masę kamienia w ruch szybki, udziela olbrzymiej masie ziemi prędkości niezmiernie małej. Wyraźniej objawia się wzajemność działania w zjawiskach astronomicznych; księżyc n. p. krąży około ziemi; wskutek wzajemności działania ziemia odczuwa niejako każdy bieg i odbywa małe ruchy zależne od ruchów księżyca.

Do rzędu działań bezpośrednich należą przyciągania i odpychania się ciał elektrycznych i magnetycznych. Magnes n. p. przyciąga żelazo, ale nawzajem żelazo ciągnie ku sobie magnes; Newton stwierdził to doświadczeniem, umieściwszy magnes i kawałek żelaza w czółenkach, które pływały na wodzie. Jeżeli umieścimy magnes i żelazo w tem samem czółenku, wtenczas ono wcale się nie poruszy; z tej samej przyczyny nie można ciągnąć wozu, siedząc na nim.

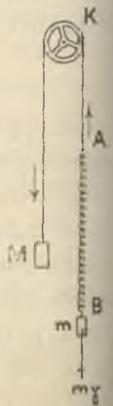
46. Oddziaływanie mas wskutek bezwładności. (Zasada d'Alemberta). Zasadnicze równanie (ust. 39):

$$P = m\gamma,$$

wyrażające związek pomiędzy siłą P a wywołanem przez nią przyśpieszeniem ruchu γ masy swobodnej m, można również uważać jako wyraz prawa akcyi i reakcyi. Siła P jest działaniem; działaniu temu masa przeciwstawia równej wielkości oddziaływanie $m\gamma$, spowodowane jej bezwładnością. Przyśpieszając ruch jakiejkolwiek masy, spotykamy istotnie bezwładny jej opór, rosnący proporcyonalnie z przyśpieszeniem i proporcyonalny do tej masy. Przywiążmy n. p. sznurek albo nitkę do jakiejkolwiek masy zupełnie swobodnej, t. j. nie hamowanej w ruchu swym żadną zaporą, ani żadnem tarciem — dajmy nato — do wózka (ryc. 32), którego używaliśmy w ust. 37 do porównywania mas. Ciągnąc koniec nitki, łagodnie wprowadzimy wózek stopniowo w ruch, nawet gdy naładowany będzie masowemi bryłami ołowiu. Jeżeli natomiast szarpniemy gwałtownie, wówczas nitka przerwie się, nawet przy niewielkim ładunku, jak gdyby wózek był przygwożdżony do toru.

Znaczy to w rzeczywistości, że wytrzymałość nitki nie mogla sprostać tak dużej sile, jaka byłaby potrzebna, ażeby wywołać w wózku zamierzone wielkie przyśpieszenie. Możemy jednak wyrazić to samo inaczej, możemy powiedzieć, że masa m, której dajemy przyśpieszenie γ, przeciwstawia nam reakcyę $m\gamma$ — że potrzeba siły P, tej samej wielkości $m\gamma$, żeby reakcyę zrównoważyć; gdybyśmy użyli siły większej, przyśpieszenie wzrosłoby natychmiast o tyle właśnie, że znowu byłaby równość siły P i reakcyi bezwładnej $m\gamma$.

Widzimy więc, że oddziaływanie, czyli reakcya bezwładna mas, posiada wszelkie znamiona siły: natężenie $m\gamma$, które możemy wyrażać w jednostkach sił, w dynach; kierunek wprost przeciwny przyśpieszeniu, a więc i sile P; tudzież, jak niżej okażemy, określone miejsce działania (jest niem t. zw. środek masy, patrz ust. 49). Ponieważ o dwóch siłach równych a mających przeciwne kierunki powiadamy, że są w równowadze, przeto możemy powiedzieć, że *«oddziaływanie masy bezwładnej równa się iloczynowi z masy i przyśpieszenia ruchu i jest zawsze w równowadze z siłami zewnętrznemi, które na masę działają»*. Twierdzenie to, będące szczególnym przypadkiem trzeciej zasady, nosi nazwę zasady d'Alemberta. Można je objaśnić za pomocą następującego przyrządu. Około poziomej osi obraca się bardzo lekko krążek K (ryc. 34). Na jego obwodzie zawieszona jest nić, obciążona z jednej strony ciężarkiem M, z drugiej sprężyną AB, na której zawieszona jest u spodu masa m. Jeżeli ciężar M przeważa ciężar sprężyny i masy m, wtenczas M spada na dół, zaś masa m podnosi się do góry, ruchem jednostajnie przyspieszonym, mającym pewne przyśpieszenie γ. Dostrzeżemy wtedy, że sprężyna AB wydłuża się i zatrzymuje przez cały czas trwania ruchu długość większą, aniżeli wtenczas, gdy jest nieruchoma; jej napięcie staje się o pewną wielkość $P = m\gamma$ większe, ponad to, ile wynosi w stanie równowagi, albo w czasie jednostajnego ruchu. Rzecz ma się podobnie, jak gdyby masa m usiłowała pozostać w tyle, albo jak gdyby opierała się sprężynie ciągnącej ją do góry. Podczas ruchu przyśpieszonego to napięcie dodatkowe równoważy się z reakcyą, którą m przeciwstawia na mocy bezwładności przyśpieszeniu ruchu, t. j. z $m\gamma$. Rozumie się samo przez się, że wydłużenie sprężyny pojawia się tylko podczas ruchu przyśpieszonego; gdybyśmy ją ciągnęli do góry ruchem jednostajnym ($\gamma = o$), wtenczas długość nie zmieniłaby się wcale.



Ryc. 34.

Reakcya bezwładna mas jest przyczyną wielu zajmujących zjawisk, zwłaszcza, gdy przyśpieszenia są duże. Zawieśmy kulę metalową na gumowej tasiemce i pociągnijmy szybko górny koniec tasiemki do góry; tasiemka wydłuży się znacznie, a kula w pierwszej chwili niewiele się podniesie, jak gdyby była w przestrzeni utwierdzona. Zawieśmy podobną kulę na nitce, a u spodu kuli przywiążmy drugą nitkę; jeżeli pociągniemy dolną nitkę powoli, wtenczas przerwie się naprzód nitka górna, gdyż na nią działa, oprócz naszego ciągnienia, także ciężar kuli; gdy zaś pociągniemy nagle, wtenczas przerwie się nitka dolna, albowiem kula przeciwstawia w tym razie wielką reakcyę bezwładną.

Kłoda drewniana, zawieszona na sznurach, porusza się za najmniejszem naciśnięciem; uderzając nagle młotkiem, możemy wbić w nią głęboko gwóźdź, jak gdyby była o cokolwiek oparta. Dynamit albo rtęć strzelająca wybuchają tak nagle, że wszelkie ciała otaczające, nawet powietrze, przeciwstawiają wielką reakcyę bezwładną; tem się tłumaczy uderzenie, jakie strzał dynamitowy wywiera na podstawę.

47. Siła dośrodkowa. Druga zasada dynamiczna pouczyła nas, że ilekroć prędkość ruchu masy zmienia się: wzrasta, maleje, albo wreszcie zmienia tylko kierunek, dzieje się to zawsze za sprawą siły zewnętrznej. Bez udziału siły prędkość musiałaby być stała co do wielkości i kierunku. Zastosujemy tę zasadę do następującego przykładu: masa m krąży jednostajnie, z prędkością v, po obwodzie koła o promieniu r. Prędkość jest stała co do wielkości, lecz kierunek jej zmienia się nieustannie, jest zawsze styczny do koła. Dowiedliśmy w ust. 20, że masa poruszająca się w ten sposób posiada stałe (co do wielkości) przyśpieszenie $\gamma = v^2 : r$, skierowane ciągle ku środkowi koła. Wnosimy przeto, że krążenie masy m po kole może odbywać się tylko wtenczas, gdy na nią działa siła stałego natężenia $P = m\gamma$, ciągnąca ją bez ustanku ku środkowi koła. Siłę taką, której wyrażeniem ogólnem jest

(1) . . . . $$P = \frac{mv^2}{r},$$

bez względu na to, jaka jest przyczyna fizyczna jej działania, nazywamy siłą dośrodkową. Skierowana wciąż ku środkowi, działa ona zawsze prostopadle do obwodu, a więc prostopadle do prędkości masy m. Wytwarzając wciąż ilości ruchu skierowane ku środkowi, dodające się wciąż (geometrycznie) do ruchu na obwodzie, nie zmienia wprawdzie jego wielkości, ale zmienia bez ustanku jego kierunek. Gdyby nagle przestała działać, ciało nie mogłoby w dalszym ciągu zmieniać kierunku swego biegu; odleciałoby na mocy bezwładności, w linii prostej, w tym kierunku, w którym poruszało się w ostatniej chwili, a więc w kierunku stycznym do obwodu koła.

Siłą dośrodkową nazywa się każda siła, utrzymująca ruch na kole; może to być siła wynikająca ze sprężystości ciał, albo z ciężkości, z działań elektrycznych i t. p.; objaśnią to dokładniej następujące przykłady:

Księżyc krąży około ziemi po linii, którą w przybliżeniu możemy uważać jako koło. Istnieje zatem siła, która przyciąga go ku ziemi i zapobiega oddaleniu się od środka, około którego krąży t. j. od ziemi. Siłą tą, jak w dalszym ciągu dowiedziemy (ust. 119), jest ciężkość, której księżyc ulega tak samo, jak ciała znajdujące się na ziemi.

Weźmy dalej pod uwagę pociąg kolejowy, poruszający się po torze kolistym. Zdawałoby się, że tu niema siły działającej ku środkowi łuku, a tylko siła pociągowa, działająca wzdłuż toru. Zważmy jednak, że na mocy bezwładności, pociąg usiłuje poruszać się po linii prostej, a więc nieustannie usiłuje wyskoczyć z toru na zewnątrz koła. Wskutek tego prze on na szynę zewnętrzną, a oddziaływanie tej sprężystej szyny jest właśnie siłą dośrodkową, cisnącą go ku środkowi koła i utrzymującą w ruchu kolistym. Wiadomo też, że szyny zewnętrzne na łukach bardziej się zużywają, aniżeli wewnętrzne.

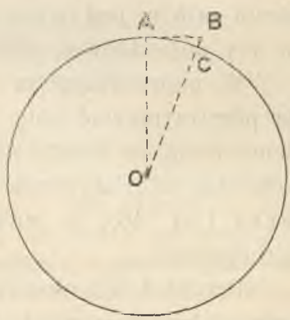
Oto trzeci przykład, podobny do poprzedzającego. Uwiązawszy kamień do końca sznurka, bierzemy drugi koniec w rękę i wirujemy kamień po kole, o promieniu równym długości sznurka. W pierwszej chwili kamień rzucony usiłuje oddalić się od środka koła w tym kierunku, w którym otrzymał początkowy pęd. Sznurek zapobiega temu, wypręża się i zmusza kamień do odbywania ruchu kolistego. Siłę dośrodkową, działającą na kamień, stanowi tu napięcie, wynikające ze sprężystości sznurka. Gdybyśmy sznurek przecięli, siła ta przestałaby działać a kamień odleciałby od koła, na mocy bezwładności, w kierunku stycznym.

Napięcie sznurka wynosi $P = \frac{mv^2}{r}$; ono jest tem większe, im prędzej kamień obracamy. Jeżeli sznurek nie zdoła wytrzymać większego napięcia, aniżeli pewne napięcie Q, wtenczas przerwie się podczas obrotu kamienia, skoro prędkość uzyska wartość wynikającą z równania $v^2 = \frac{Qr}{m}$.

Siłę dośrodkową można też wyrazić przez prędkość kątową promienia wodzącego $\omega = \frac{v}{r}$, albo przez okres obiegu $T = \frac{2r\pi}{v}$; otrzymamy wtenczas z (1): $P = mr\omega^2 \ldots (2)$, albo $P = \frac{4\pi^2 rm}{T^2} \ldots (3)$.

48. Siła odśrodkowa. Napięcie sznurka, w poprzedzającym przykładzie, ciągnie kamień ku środkowi koła, ono jest siłą dośrodkową. To samo napięcie działa na rękę, trzymającą drugi koniec sznurka, w kierunku przeciwnym, t. j. od środka na zewnątrz i objawia się względem ręki jako t. zw. siła odśrodkowa. Jest to oddziaływanie należące do siły dośrodkowej, równe jej w natężeniu — w myśl trzeciej zasady dynamicznej — a skierowane w przeciwną stronę. Ilekroć masa krąży po kole, zmuszona do tego przez jakiekolwiek więzy materyalne, więzy te, naprężając się, dostarczają siły dośrodkowej, kierującej ruchem masy, a same ulegają bezwładnemu jej oddziaływaniu (ust. 44), t. j. sile odśrodkowej. Siła dośrodkowa i odśrodkowa występują zawsze w parze, nie działają jednak na to samo ciało: pierwsza działa na masę krążącą, druga na więzy, które zniewalają ją do tego ruchu. Wyjaśni to nam jeszcze następujący przykład.

Wyobraźmy sobie człowieka, przywiązanego do poziomego kręgu, (n. p. karuzelu), obracającego się jednostajnie około pionowej osi O (ryc. 35). W ręku niechaj on trzyma n. p. kulę, dostatecznie ciężką A. Podczas obrotu, kula owa usiłuje odlecieć na mocy bezwładności w kierunku stycznym AB. Człowiek, biorący również udział w ruchu obrotowym, inaczej ocenia kierunek, w którym kula usiłuje oddalić się od niego; jemu się wydaje, jakoby kula miała odlecieć, nie w kierunku stycznym, lecz w kierunku promienia. W istocie, przypuśćmy, że człowiek wypuszcza kulę z ręki w chwili, gdy ona znajduje się n. p. w A. Kula odleci w kierunku stycznym z tą prędkością, jaką miała w ruchu kolistym i przebiegnie w ciągu pewnego krótkiego czasu t drogę AB. Otóż w przeciągu tego czasu, człowiek również *obrócił* się w tę samą stronę, w którą kula odleciała. Jeżeli AB jest bardzo małe, wtenczas kąt obrotu, o który tu chodzi, będzie prawie równy AOB, t. j. w pierwszej chwili człowiek widzieć będzie odlatującą kulę ciągle przed sobą. Gdyby on nie czuł ruchu obrotowego i nic o nim nie wiedział, przypisywałby taki ruch kuli jakiejś sile, która wyrwała mu ją z ręki i rzuciła na zewnątrz w kierunku promienia.



Ryc. 35.

Natężenie tej siły pozornej można obliczyć w następujący sposób. Kula oddala się od człowieka, w przeciągu czasu t, o długość BC. Jeżeli $\bar{\omega}$ oznacza prędkość kątową kręgu, wtenczas rzeczywista, bezwzględna prędkość kuli wzdłuż AB wynosi $\bar{\omega}r$, (gdzie $r = AO = CO$) t. j. równa się prędkości, jaką kula posiadała przed opuszczeniem punktu A; zatem $AB = \bar{\omega} r t$; dalej: $(BC + CO)^2 = AB^2 + AO^2 = \bar{\omega}^2 r^2 t^2 + r^2$ albo

$$BC^2 + CO^2 + 2BC.\ CO = \bar{\omega}^2 r^2 t^2 + r^2.$$

Zważywszy że BC jest bardzo małe w porównaniu promieniem $CO = r$, możemy kwadrat tej małej wielkości opuścić, a wówczas zostanie:

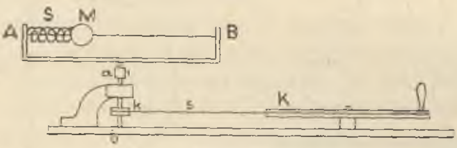
$$BC = \tfrac{1}{2} (\bar{\omega}^2 r) t^2.$$

Kula oddala się tedy pozornie w kierunku promienia, a ruch ten jest w pierwszej chwili jednostajnie przyśpieszony, z przyspieszeniem $\gamma = \bar{\omega}^2 r$. Żeby ruch taki wywołać na kręgu nieruchomym, potrzeba siły działającej w kierunku promienia na zewnątrz, o natężeniu $m\bar{\omega}^2 r$; jest to toż samo wyrażenie, które znaleźliśmy pierwej dla siły dośrodkowej, albo odśrodkowej (ust. 47, wzór 2.).

W poprzedzającym przykładzie musi człowiek taką właśnie siłą przytrzymywać kulę, żeby nie wyrwała mu się z ręki. Zrozumiemy teraz, że działaniem, które on zwalcza, jest nic innego, jak bezwładne oddziaływanie mas, którem zajmuje się zasada d'Alemberta (ust. 46); w uważanym przypadku nazywa się ono siłą odśrodkową.

Przykład ten okazuje, że w układzie wirującym jednostajnie około stałej osi z prędkością kątową $\bar{\omega}$, wszystkie części ułożą się do równowagi tak, jakby się ułożyły, gdyby układ nie wirował wcale, a do wszystkich jego mas, obok sił skądinąd w nim czynnych, były jeszcze przyłożone siły skierowane na zewnątrz, prostopadłe do osi obrotu o natężeniu $m\omega^2 r$. W tem znaczeniu i tylko w tem, można mówić o siłach odśrodkowych, jako działających na same krążące masy. Są to wtedy siły pozorne, czyli fikcyjne, których wprowadzenie uwalnia nas od potrzeby uwzględniania ruchu obrotowego danego układu.

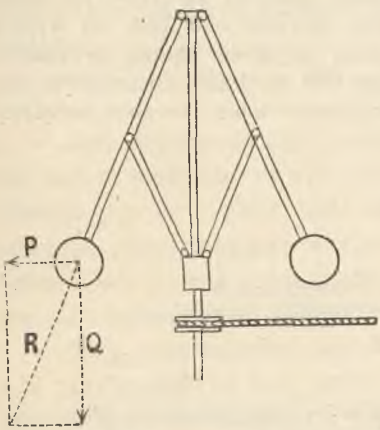
Do objaśnienia praw siły dośrodkowej i odśrodkowej używa się t. zw. wirówki, czyli centryfugi. Przyrząd ten (ryc. 36) służy do wprowadzenia w szybki ruch obrotowy osi *ab*, do której można przytwierdzać rozmaite przyrządy pomocnicze. Duże koło *K*, obracane za pomocą korby, pędzi za pośrednictwem sznurka albo struny *s*, mniejsze kółko *k*, osadzone na osi *ab* i złączone z nią. Osadźmy naprzód na osi wirówki ramkę prostokątną (ryc. 36), w której znajduje się wyprężony drut *AB*. Wzdłuż drutu może się posuwać nawleczona nań kula *M*; pomiędzy kulą a jednym z pionowych boków ramki znajduje się sprężyna *S*. Skoro wprowadzimy przyrząd w ruch obrotowy, kula *M* zostaje odrzucona od osi obrotu, przyciska się do sprężyny, a zgniatając ją, wywołuje reakcyę sprężystą, zwiększającą się w miarę zgniecenia. W końcu nastąpi równowaga na drucie obracającym się, wtenczas mianowicie, gdy bezwładne dążenie kuli do oddalania się od osi obrotu (siła odśrodkowa) zostanie zrównoważone parciem sprężyny na kulę, w stronę osi (siła dośrodkowa). Spólna wartość obu tych sił wynosi wtenczas $P = mr\bar{\omega}^2$, w czem $\bar{\omega}$ oznacza prędkość kątową przyrządu. Ażeby tedy znaleźć położenie równowagi kuli na drucie obracającym się, wystarczy, nie uwzględniając obrotu, wyobrazić sobie, że obok sprężyny



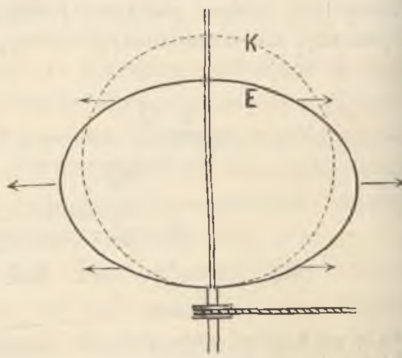
Ryc. 36.

działa na kulę na zewnątrz siła pozorna $m\bar{\omega}^2 r$. Przyśpieszenie obrotu wywołałoby silniejsze zgniecenie sprężyny przez kulę, a odległość *r* tej ostatniej od osi zwiększyłaby się odpowiednio. — Siła odśrodkowa może być także zrównoważona przez ciężkość. Do osi obrotu przytwierdzona jest lekka listwa ruchoma na zawiasach, obciążona u spodu ciężką kulą (na ryc. 37 widzimy dwie takie kule, symetrycznie po obu stronach osi). Podczas obrotu listwa z kulą oddala się od osi, tem więcej, im szybszy obrót. Dopóki prędkość kątowa obrotu nie zmienia się, odchylenie listwy pozostaje stałem. Wielkość odchylenia określa się tem, że wypadkowa *R* ciężaru kuli *Q* i siły odśrodkowej *P* działa w przedłużeniu listwy — wtenczas siła *R* wypręża tylko listwę, nie może zaś zmieniać jej odchylenia (porównaj zadanie 101). Na różne cząstki bryły, wirującej około osi ze stałą prędkością kątową $\bar{\omega}$, działają różnego natężenia siły odśrodkowe: największe (wzór 2, ust. 47) działają na cząstki najdalsze od osi. Z tego powodu stalowa obręcz *K* (ryc. 38), obracana szybko około jednej z średnic, przyjmuje kształt eliptyczny *E*, spłaszcza się w kierunku osi, a wydłuża się w kierunku prostopadłym do niej.

Siły odśrodkowe bywają często stosowane w praktyce. Przy machinach parowych używa się regulatorów, działających na tej zasadzie (ryc. 37). Centryfugi, wirówki, bywają używane do oddzielania miodu od woskowiny, do oddzielania tłuszczu z mleka, do wyrabiania masła i t. p. Części cięższe oddalają się podczas obrotu od osi, lżejsze zaś (tłuszcz) skupiają się koło niej. Postać ziemi, około biegunów nieco przypłaszczona, objaśnia się również działaniem siły odśrodkowej. Części ziemi, leżące w pobliżu równika, a zatem najbardziej od osi obrotu oddalone, ulegały większej sile odśrodkowej, aniżeli części leżące bliżej biegunów i osi; stąd powstała wypukłość około równika, — zapewne jeszcze w epoce, gdy ziemia była gorąca i plastyczna (działanie to objaśnia rys. 38). Mieszkając na ziemi obracającej się, jesteśmy w podobnem położeniu jak ów człowiek na obracającym się kręgu (ryc. 35), który ruchu obrotowego nie jest świadomy, ale dostrzega objawy siły odśrodkowej. Obaczymy, że



Ryc. 37.



Ryc. 38.

ciężar ciał na ziemi jest wypadkową przyciągania tejże i siły odśrodkowej, wynikającej z obrotu ziemi około osi (ust. 124).

Zawiesiwszy na sznurku naczynie napełnione wodą, możemy je szybko obracać po kole pionowem, a woda nie wyleje się, gdyż siła odśrodkowa przyciska ją do dna i równoważy ciężar. Centryfugalne miechy i wentylatory.

Zadania.

94) Dwie masy, 17 *gr* i 25 *gr*, odpychają się wzajemnie siłą 5200 dyn, działającą w linii łączącej je; odległość ich wynosi z początku 10 *cm*, a prędkość = 0. Znaleźć a) odległość ich po upływie 3 *sek*, b) długość dróg przebytych, tudzież c) początkowe i d) końcowe położenie środka masy (ust. 49). *Odp.* a) 2322·6 *cm*, b) 1376·6 i 936 *cm*, c) na linii łączącej, w obległości 5·95 *cm* od pierwszej; d) w odległości 1382·5 *cm* od pierwszej, t. j. w pierwotnem miejscu.

95) Ile wynoszą pędy i prędkości tych mas w chwili $t = 3$ *sek?* *Odp.* 15600 i 15600 *gr cm/sek*; 917·7 i 624 *cm/sek*.

96) Kamień ważący 350 *gr* obracamy w koło, 3 razy na 2 *sek*, na sznurku o długości 1 *m;* obliczyć napięcie sznurka.

Odp. 3 109 000 dyn.

97) Z jaką prędkością należałoby kamień ten obracać, chcąc rozerwać sznurek, działaniem siły odśrodkowej; sznurek zrywa się pod napięciem 5 000 000 dyn? *Odp.* 19 razy na 10 *sek*.

98) Około wspólnej osi obracają się dwie masy, po przeciwnych jej stronach, w ten sposób, że siły odśrodkowe równoważą się; odległości mas od osi mają się jak 5 do 7. Znaleźć stosunek tych mas. *Odp.* 7 : 5.

99) Siła odśrodkowa masy 50 *gr*, obracającej się 4 razy na *sek*, w odległości 18 *cm* od osi, zrównoważona jest ciężarem drugiej masy umieszczonej na samej osi. Znaleźć wartość tej drugiej masy, wiedząc, że ciężar 1 *gr* wynosi 981 dyn. *Odp.* 579 *gr*.

100) Ile wynosi siła odśrodkowa, działająca na masę 1 *gr* na równiku ziemi, wskutek jej dziennego obrotu? ($T = 86164{\cdot}09$ *sek;* $r = 6\,377\,000\,m$). *Odp.* 3 391 dyn.

101) Wahadło składające się z bardzo lekkiej listwy, obracalnej około poziomej osi i z kuli o masie m, przytwierdzonej do dolnego końca listwy (ryc. 37) umieszczamy na wirówce w taki sposób, żeby środek kuli w stanie spoczynku znajdował się na przedłużeniu osi obrotu. Znaleźć warunki równowagi tego wahadła, jeżeli l oznacza długość listwy, α kąt odchylenia liczony od pionu, $Q = mg$ ciężar kuli, $\bar{\omega}$ prędkość kątową obrotu.

Odp. Wypadkowa ciężaru mg i siły odśrodkowej $m\bar{\omega}^2 l \sin\alpha$ powinna działać w kierunku listwy; to daje warunek $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\bar{\omega}^2 l \sin\alpha}{g}$, albo $\cos\alpha = \frac{g}{\bar{\omega}^2 l}$. Dopóki prędkość obrotu jest taka mała, że $\bar{\omega}^2 l < g$, dopóty nie istnieje rzeczywista wartość kąta α; wahadło wisi pionowo. Gdy $\bar{\omega}^2 l > g$, wtenczas w położeniu pionowem wahadło posiada równowagę niestałą, przy najmniejszem wstrząśnieniu oddala się od pionu i ustawia się pod kątem $\alpha = \operatorname{arc}\cos\frac{g}{\bar{\omega}^2 l}$.

49. Środek masy. Wspomnieliśmy w ust. 46, że reakcya, jaką masy stawiają wskutek bezwładności siłom zewnętrznym, zmieniającym prędkość ich ruchu postępowego, posiada wszelkie znamiona siły, albowiem równoważy się z siłą zewnętrzną i, podobnie jak siła, posiada natężenie, kierunek i miejsce działania. Tem miejscem jest t. zw. środek masy. Jest to punkt, mający położenie ściśle określone w każdej masie i w każdym zbiorze mas; położenie jego zależy tylko od ich wielkości i rozmieszczenia. Wyłożymy tu najcelniejsze własności dynamiczne tego punktu.

Weźmy naprzód pod uwagę dwa ciała, mające rozmiary nader drobne w porównaniu z dzielącą je odległością, dwie cząstki, albo punkty materyalne, jak je będziemy nazywali, n. p. dwa drobne pyłki, w oddaleniu kilku metrów od siebie, albo ziemię i słońce, lub t. p. Masy tych ciał oznaczymy przez m_1 i m_2, i przyjmiemy, że one przyciągają się wzajemnie, albo odpychają, wzdłuż prostej łączącej je, siłą $= P$. W myśl trzeciej zasady na każdą z mas działa siła P, ale kierunki działań są przeciwne. Pod wpływem takiego działania masy uzyskają, po upływie pewnego czasu, pędy jednakowe (ust. 38), w kierunkach przeciwnych; oznaczywszy przez v_1 i v_2 prędkości nabyte, mamy:

$$m_1 v_1 = m_2 v_2, \text{ albo } \frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Prędkości nabyte przez masy nie będą zatem w ogóle jednakowe, lecz mają się zawsze odwrotnie jak masy ciał.

Kamień i ziemia przyciągają się wzajemnie (ust. 45 c); kamień spada ku ziemi, a jednocześnie ziemia spada ku niemu. Prędkości ich mają się odwrotnie jak masy; prędkość ziemi jest zatem niezmiernie mała. Działo cofa się przy wystrzale mniej szybko, aniżeli kula wylata, gdyż jego masa jest większa.

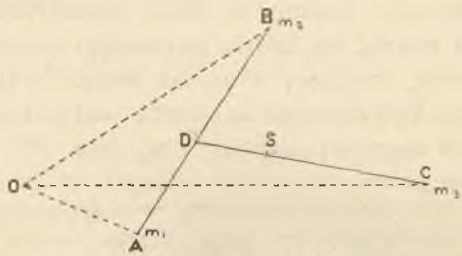
Drogi, przebyte jednocześnie przez te dwie masy, mają się również odwrotnie jak masy, albowiem są proporcyonalne do prędkości. Zaznaczmy na prostej, łączącej masy m_1 i m_2, punkt, dzielący początkową ich odległość na dwa odcinki, mające się odwrotnie jak odpowiednie masy. Z poprzedzającego wynika, że ten sam punkt dzielić będzie także w każdej innej chwili odległość mas m_1 i m_2 na dwa odcinki, mające się odwrotnie jak masy; podczas ruchu mas punkt ten będzie zatem nieruchomy. Nazwiemy go środkiem tych mas. Określamy tedy: *środek masy dwu punktów materyalnych jest to punkt, leżący na prostej łączącej je i dzielący ich odległość w stosunku odwrotnym do mas.*

Jeżeli dwa punkty materyalne, pierwotnie nieruchome, zaczynają się poruszać, wskutek wzajemnego przyciągania się, albo odpychania, środek ich mas pozostaje w spoczynku.

50. Środek masy trzech cząstek. Niech będą trzy cząstki w punktach A, B i C (ryc. 39); masy ich oznaczamy przez m_1, m_2 i m_3. W D znajduje się środek dwu pierwszych mas, m_1 i m_2 jest więc:

$$\frac{DA}{DB} = \frac{m_2}{m_1}, \text{ albo } m_1 \,.\, DA = m_2 \,.\, DB.$$

Wyobraźmy sobie, że w punkcie D skupione zostały obie masy m_1 i m_2, t. j. że umieszczono tam cząstkę o masie $m_1 + m_2$ i poszukajmy środka masy tej cząstki $m_1 + m_2$, tudzież trzeciej



Ryc. 39.

cząstki m_3, znajdującej się w C. Znajdujemy tym sposobem punkt S, leżący na prostej DC, w takiej odległości od puntów D i C, że:

$$\frac{SD}{SC} = \frac{m_3}{m_1 + m_2}.$$

Punkt S, znaleziony tym sposobem, nazywa się środkiem masy trzech cząstek, A, B i C.

51. Środek masy jakiegokolwiek ciała. Środek masy większej liczby cząstek, albo ciała jakiego, albo zbioru kilku ciał, które możemy przecież zawsze uważać jako zbiorowisko drobnych cząstek, określa się podobnie, jak środek dwu albo trzech cząstek. Dzielimy dane masy w myśli na drobne cząstki materyalne, i szukamy naprzód środka którychbądź trzech cząstek; wyobrażamy sobie, że w tym środku skupione zostały masy tych trzech cząstek, i szukamy środka tej masy, tudzież dalszej czwartej cząstki. Następnie przyłączamy piątą, szóstą cząstkę i t. d. aż do końca. Ostatni z tych, po kolei znajdowanych punktów, nazwiemy środkiem całej masy. Postępowanie to można zastąpić przejrzystszem dodawaniem geometrycznym pewnych wektorów, jak to zaraz okażemy:

Wybierzmy gdziekolwiek stały punkt O (ryc. 39) i wykreślmy z tego punktu promienie OA, OB, OC i t. d. do cząstek materyalnych, na które podzieliliśmy daną masę.

Pomnóżmy długość każdego z tych promieni przez masę cząstki, do której on prowadzi; otrzymame w ten sposób iloczyny: $m_1 \times OA$, $m_2 \times OB$, $m_3 \times OC$ i t. d. nazwiemy momentami mas m_1, m_2, m_3,... względem punktu O. Są to wielkości kierunkowe, a kierunkami ich są kierunki promieni: OA, OB i t. d. Jeżeli momenty wszystkich mas dodamy do siebie geometrycznie, natenczas suma otrzymana równać się będzie momentowi całkowitej masy danego zbioru cząstek, skupionej w środku masy. Że tak jest w istocie, o tem można się przekonać zapomocą następującego rachunku. Dodajmy naprzód momenty mas m_1 i m_2 (ryc. 39), t. j. obliczmy sumę geometryczną:

$$m_1 \times \overline{OA} + m_2 \times \overline{OB}.$$

Jeżeli D jest środkiem mas A i B, to mamy:

$$m_1 \times \overline{OA} = m_1 \times \overline{OD} + m_1 DA,$$

$$m_2 \times \overline{OB} = m_2 \times \overline{OD} + m_2 DB.$$

Dodajmy te równania do siebie, uwzględniając, że:

$$m_1 \overline{DA} + m_2 DB = o;$$

(D jest bowiem środkiem mas m_1 i m_2, wskutek czego momenty $m_1 DA$ i $m_2 DB$ są równe, a mając kierunki przeciwne znoszą się). Znajdziemy więc:

$$m_1 \times \overline{OA} + m_2 \overline{OB} = (m_1 + m_2)\, \overline{OD}.$$

Dodajmy do tego moment trzeciej cząstki: $m_3 \overline{OC}$, a otrzymamy:

$$m_1 \overline{OA} + m_2 \overline{OB} + m_3 \overline{OC} = (m + m_2)\, OD + m_3 \overline{OC}.$$

Oznaczywszy przez S środek trzech mas: $m_1 + m_2$, pomyślanych w D i masy m_3 w C, t. j. środek trzech mas A, B i C, znajdziemy, jak pierwej:

$$(m_1 + m_2)\,\overline{OD} + m_3\,\overline{OC} = (m_1 + m_2 + m_3)\,OS,$$

zatem:

$$m_1\,\overline{OA} + m_2\,OB + m_3\,OC = (m_1 + m_2 + m_3)\,OS,$$

czego mieliśmy dowieść. Rozumie się samo przez się, że powyższy rachunek nie kończy się na trzech masach, lecz może być rozszerzony do jakiejbądź ich liczby, t. j.

$$(1)\qquad m_1 OA + m_2 OB + m_3 OC + \ldots \text{ i t. d.}$$
$$= (m_1 + m_2 + m_3 \ldots \text{ i t. d.})\; OS.$$

Dowiedzionej tu własności środka mas można użyć do wyznaczenia położenia tego punktu w jakiemkolwiek ciele albo zbiorze mas. Rachunek będzie jednak prostszy, jeżeli dodawanie geometryczne zastąpimy algebraicznem. Wybierzemy w tym celu stały punkt O (którego miejsce było zupełnie dowolne) w odległości nieskończenie wielkiej od mas danych; promienie OA, OB i t. d. będą wtenczas równoległe, a momenty mas cząstek, mając jednakowe kierunki, dodawać się będą algebraicznie. Ryc. 40 wyobraża kilka mas: m_1, m_2, m_3 i t. d.; punkt O znajduje się nieskończenie daleko po lewej, promienie OA, OB i t. d. są rownoległe. Wykreślmy płaszczyznę YZ prostopadłą do tych promieni, przecinającą je w punktach a, b, c, d... Oznaczmy jeszcze odległości mas od tej płaszczyzny przez x_1, x_2, x_3... t. j. $aA = x_1$, $bB = x_2$...; odległość szukanego środka mas S od tej samej płaszczyzny przez X. Mamy wtenczas:

$$OA = x_1 + Oa,$$
$$OB = x_2 + Ob,$$
$$OC = x_3 + Oc \text{ i t. d.}$$
$$OS = X + Os.$$

Stosując równanie (1), znajdziemy:

$$m_1\,OA + m_2\,OB + m_3\,OC + \text{ i t. d.} = (m_1 + m_2 + m_3 + \ldots \text{ i t. d.})\;OS,$$

czyli

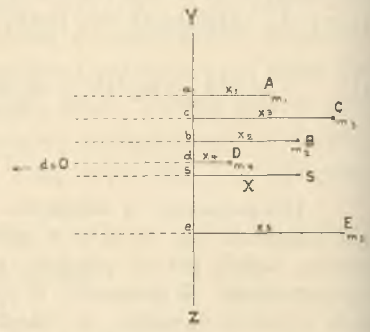
$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \ldots \text{ i t. d.} + [m_1\,Oa + m_2\,Ob + m_3\,Oc \text{ i t. d.}]$$
$$= m_1 + m_2 + m_3 + \text{ i t. d.})\; X + [(m_1 + m_2 + m_3 + \text{i t. d.})\;Os].$$

Otóż linie nieskończenie długie *Oa*, *Ob*,... tudzież *Os*, możemy uważać jako równe sobie; płaszczyznę *YZ* możemy bowiem uważać jako część nieskończenie wielkiej kuli, wykreślonej z *O* jako środka, a linie rzeczone jako promienie tej kuli. Opuszczając zatem, po obu stronach poprzedzającego równania, równe sobie sumy, ujęte w nawiasy [ ], znajdziemy:

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \ldots \text{ i t. d.} = [m_1 + m_2 + m_3 + \text{ i t. d.}]\, X, \text{ albo}$$

$$(2) \qquad \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \text{ i t. d.}}{m_1 + m_2 + m_3 + \text{ i t. d.}} = \frac{\Sigma m x}{\Sigma m} \text{ [1]}.$$

Za pomocą równania (2) można znaleźć, zwykłym algebraicznym rachunkiem, odległość środka mas od jakiejkolwiek płaszczyzny *YZ*. Wyszukawszy tym sposobem odległość środka mas od trzech płaszczyzn, przecinających się n. p. pod kątem prostym, jak ściany pokoju, zdołamy dokładnie określić miejsce, w którem środek masy się znajduje.



Ryc. 40.

Niekiedy można wyznaczyć położenie środka masy ciała bez wszelkiego rachunku, wtenczas mianowicie, gdy ciało posiada postać symetryczną i gdy w jego wnętrzu materya jest symetrycznie rozmieszczona. Tak n. p. środek masy kuli, wypełnionej jednolitą materyą, leży oczywiście w środku geometrycznym; środek masy jednolitego kolistego pierścienia leży także w środku geometrycznym (a zatem zewnątrz ciała). Podobnie wszelkie bryły symetryczne, a wypełnione materyą jednolitą, mają środek masy na linii, albo na płaszczyźnie symetryi.

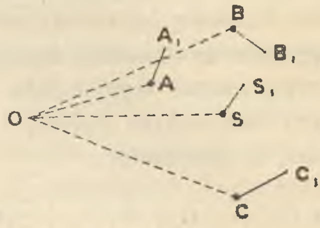
Środek masy brył niesymetrycznych, albo takich, w których nie znamy wewnętrznego rozmieszczenia materyi, nie daje się wyznaczyć rachunkiem. Poznamy jednakowoż sposoby doświadczalne, które umożliwią znalezienie położenia tego punktu w jakiemkolwiek dowolnem ciele (ust. 89).

Mówi się niekiedy o środku płaskiego, ograniczonego ciała. Rozumie się przez to punkt leżący w płaszczyźnie pola, który byłby środkiem masy blachy jednolitej, a nieskończenie cienkiej, mającej kształt i wielkość danego pola.

---

[1] Znak Σ oznacza w skróceniu sumę wyrazów opatrzonych wskaźnikami: 1, 2, 3,... i t. d.

52. Ruch środka masy. Jeżeli masy m_1, m_2, m_3 i t. d. cząstek składających jakie ciało, albo zbiór ciał, są w ruchu, wtenczas w ogólności porusza się także ich środek. Dajmy na to, że masy te posiadają w pewnej chwili prędkości v_1, v_2, v_3 i t. d. w jakichbądź kierunkach; zastanówmy się, jaka jest prędkość ich środka i w jakim kierunku on się porusza. Oznaczmy szukaną prędkość środka mas przez V.



Ryc. 41.

Masy $m_1, m_2, m_3, \ldots$ zajmują w uważanej chwili miejsca A, B, C... (ryc. 41); środek ich znajduje się n. p. w S. Po upływie czasu nieskończenie krótkiego τ przesuną się one do A_1, B_1, C_1 ..., a środek ich do S_1 Otóż mamy:

$$\overline{AA_1} = \overline{v_1\tau},\ \overline{BB_1} = \overline{v_2\tau},\ \overline{CC_1} = \overline{v_3\tau}, \ldots,\ \overline{SS_1} = \overline{V\tau}.$$

Wybierzmy dowolny stały punkt O, względem którego liczyć się będą momenty mas. W pierwszem położeniu mas było, według ust. 51, (1):

$$m_1\overline{OA} + m_2\overline{OB} + m_3\overline{OC} + \ldots = (m_1 + m_2 + m_3 + \ldots)\ \overline{OS}.$$

Następnie momenty mas zmieniły się i przyjęły wartości: $m_1\overline{OA_1}$. $\overline{OA_1}$ i t. p.

Ponieważ jednak $\overline{OA_1} = \overline{OA} + \overline{AA_1} = \overline{OA} + \overline{v_1\tau}$ i t. d., przeto w drugiem położeniu otrzymamy znowu:

$$m_1(\overline{OA} + \overline{v_1\tau}) + m_2(\overline{OB} + \overline{v_2\tau}) + m_3(\overline{OC} + \overline{v_3\tau}) \ldots$$
$$\ldots = (m_1 + m_2 + m_3 + \ldots)(\overline{OS} + \overline{V\tau}).$$

Odejmijmy od tego równania poprzedzające i podzielmy przez τ; zostanie wówczas:

$$(1) \qquad \overline{m_1v_1} + \overline{m_2v_2} + \overline{m_3v_3} + \ldots = (m_1 + m_2 + m_3 \ldots)\ \overline{V},$$

t. j. *suma geometryczna pędów wszystkich mas posiada taką wartość i taki kierunek, jak gdyby wszystkie masy danego zbioru były zebrane w środku mas i poruszały się z prędkością tego środka.*

Przypuśćmy dalej, że ruch mas m_1, m_2, m_3 i t. d. odbywa się pod wpływem sił; na masę m_1 niech działa siła P_1, na m_2 siła P_2

i t. d. Prędkości mas będą się wówczas zmieniały; siła P_1 udzieli masie m_1 przyśpieszenia γ_1, według równania $P_1 = m_1\gamma_1$; podobnież będzie $P_2 = m_2\gamma_2$ i t. d. Po upływie nieskończenie krótkiego czasu $= \tau$ pędy mas nie będą już miały dawniejszych wartości $m_1 v_1$, $m_2 v_2$ i t. d., lecz zamienią się na $m_1(\overline{v_1 + \gamma_1\tau})$; $m_2(\overline{v_2 + \gamma_2\tau})$ i t. d. Podobnież prędkość środka mas zamieni się na $V + \Gamma\tau$, w czem Γ oznacza przyśpieszenie tego punktu. Obliczmy, podług (1), sumę geometryczną tych zmienionych pędów, która i teraz będzie równa pędowi środka mas, a otrzymamy:

$$m_1(\overline{v_1 + \gamma_1\tau}) + m_2(\overline{v_2 + \gamma_2\tau}) + m_3(\overline{v_3 + \gamma_3\tau}) + \ldots$$
$$\ldots = (m_1 + m_2 + m_3 + \ldots)(\overline{V + \Gamma\tau}).$$

Odjąwszy od tego (1) i podzieliwszy przez τ, znajdziemy:

$$\overline{m_1\gamma_1} + \overline{m_2\gamma_2} + \overline{m_3\gamma_3} + \ldots = (m_1 + m_2 + m_3 + \ldots)\,\overline{\Gamma}.$$

albo:

(2) $$\overline{P_1} + \overline{P_2} + \overline{P_3} + \ldots = (m_1 + m_2 + m_3 + \ldots)\,\overline{\Gamma}.$$

Lewa strona tego równania oznacza sumę geometryczną, czyli wypadkową R wszystkich sił, obliczoną tak, jak gdyby one wszystkie działały na jeden punkt. Siła tego natężenia i kierunku, działając na jeden punkt o masie $= m_1 + m_2 + m_3, \ldots$, wywołałaby ruch, mający przyśpieszenie: $\dfrac{R}{m_1 + m_2 + m_3 \ldots}$, równe zatem Γ, co do wielkości i kierunku. Wnosimy więc, że *środek masy jakiegokolwiek ciała, albo zbioru ciał, porusza się tak, jak gdyby wszystkie masy były w tym punkcie zebrane i jak gdyby do niego przeniesione były wszystkie siły działające na masy, bez zmiany natężenia i kierunku.*

Jeżeli między masami danego zbioru działają tylko siły wewnętrzne, a zewnętrznych nie ma wcale, wtenczas, na mocy trzeciej zasady dynamicznej, siły te są zawsze parami równe i działają w przeciwnych kierunkach, t. j. do każdej z nich należy druga. będąca względem niej oddziaływaniem. Przy obliczeniu wypadkowej R, siły te zniosą się parami. Wypadkowa R będzie równa zeru, a przeto, podług (2), będzie $\Gamma = o$ t. j. środek masy nie porusza się wtenczas wcale, albo porusza się na mocy bezwładności, bez przyśpieszenia.

Siły wewnętrzne, działające pomiędzy częściami ciała, albo zbioru ciał, nie mogą zmienić ruchu środka masy; jeżeli zewnętrznych sił *niema, wtenczas środek masy pozostaje w spoczynku, albo porusza się jednostajnie po linii prostej. Jeżeli obok sił wewnętrznych są także zewnętrzne, natenczas tylko te ostatnie mają wpływ na ruch środka mas.* Zważywszy, że pęd środka masy jest to samo według (1), co wypadkowa pędów poszczególnych mas, możemy to samo twierdzenie wypowiedzieć jak następuje: *pęd wypadkowy jakiegokolwiek układu materyalnego nie może się zmienić pod wpływem wzajemnych oddziaływań pomiędzy częściami układu. Jeżeli są siły zewnętrzne, wówczas on zmienia się tak, jak gdyby wszystkie masy były zebrane w jednym punkcie.* Dostrzeżemy łatwo, że twierdzenie to stanowi uogólnienie zasady bezwładności.

Granat, wyrzucony z działa, zakreśla drogę łukową w powietrzu; skoro w ciągu tego ruchu pęknie, odłamy rozlatają się na wszystkie strony pod wpływem sił wewnętrznych, ale środek masy tych odłamów nie ulega wstrząśnieniu i zakreśla dalej drogę łukową, aż do chwili, gdy którykolwiek z odłamów spadnie na ziemię. Człowiek, stojący na zupełnie gładkiej powierzchni lodu, nie mógłby poruszyć się ani o krok z miejsca, potrącony, nie mógłby znowu powstrzymać się; w tym przypadku bowiem nie byłoby wcale sił zewnętrznych, działających nań w kierunku poziomym. Ruchy członków wzbudzałyby tylko siły wewnętrzne; przy poruszeniu n. p. głowy naprzód, oddziaływanie cofnęłoby nogi wstecz, a środek ciała nie poruszyłby się wcale. Po powierzchni mniej gładkiej możemy chodzić z łatwością, albowiem tarcie stóp o powierzchnię stanowi siłę zewnętrzną, która nas porusza.

Zadania.

102) Na linii prostej umieszczone są w czterech punktach po kolei masy: 5, 17, 32 i 3. Odległości ich wzajemne wynoszą kolejno: 16, 40, 25 *cm.* Znaleźć ich środek. *Odp.* Szukając kolejnych środków mas przekonamy się, że żądany punkt leży na linii łączącej masy 5 i 3 w odległości 40·47 *cm* od masy 5; toż samo znajdziemy bezpośrednio:

$$\frac{17 \times 16 + 32 \times 56 + 3 \times 81}{57} = 40{\cdot}47.$$

103) W wierzchołkach A, B, C trójkąta leżą masy 70, 30 i 40. Znaleźć ich środek, wiedząc, że $AB = 100$, $BC = 80$, $CA = 60$ *cm.* *Odp.* Połączywszy C z punktem D, leżącym na AB w odległości 30 *cm* od A, znajdziemy S na tej prostej DC, w odległości $DS = 13{\cdot}82$ *cm.*

104) Znaleźć środek masy bryły, złożonej z dwu równoległych sześcianów, sklejonych wzdłuż jednej pary ścian, jeżeli jeden z nich waży 500, drugi 1300 gramów, a długość krawędzi każdego sześcianu wynosi 10 *cm.* *Odp.* Na linii łączącej środki, w odległości 2·78 *cm* od środka cięższego.

105) Znaleźć środek masy blachy płaskiej i cienkiej, mającej postać trójkąta (środek trójkątnego pola). *Odp.* Na linii łączącej środek któregokolwiek boku z przeciwnym wierzchołkiem, w $^1/_3$ odległości boku od wierzchołka. (Podzielić pole na nieskończenie wązkie paski, liniami równoległemi do boku).

106) Znaleźć środek dowolnego wielokątnego pola. *Odp.* Podzielić na trójkąty.

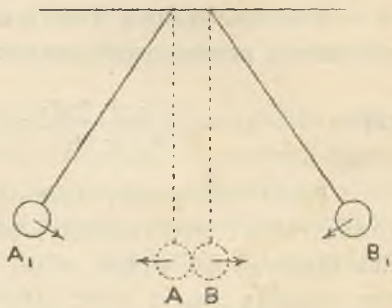
107) Znaleźć środek masy czworościanu jednolitego. *Odp.* Na linii łączącej środek jednej ze ścian, z przeciwnym wierzchołkiem, w $^1/_4$ odległości od ściany wierzchołka. (Podzielić na nieskończenie cienkie warstwy, płaszczyznami równoległemi do ściany).

108) Znaleźć środek masy jednolitej bryły kulistej o promieniu 50 *cm*, w której wnętrzu znajduje się kuliste wydrążenie, o promieniu 10 *cm*, przyczem środek tej kuli mniejszej oddalony jest o 15 *cm* od środka kuli większej. *Odp.* [Umieścić w środku większej kuli masę $(50)^3$, zaś w środku mniejszej, ujemną masę $(10)^3$]. Na linii łączącej środki obu kul, w odległości 0·12 *cm* od środka większej, po przeciwnej stronie, aniżeli środek mniejszej.

53. Uderzenie się ciał. Kula, spoczywająca na poziomej, gładkiej podstawie, uderzona młotkiem, zaczyna nagle poruszać się; jednocześnie zmienia się ruch młotka. Kula lekka poskoczy szybko naprzód; młotek lekki odskoczy od kuli masywnej. Przez krótką chwilę zetknięcia ciało uderzone doznaje popędu ze strony uderzającego, ale jednocześnie — w myśl zasady działania i oddziaływania — odwzajemnia się mu takimże popędem w kierunku przeciwnym. Ogólna ilość ruchu obu ciał, razem wziętych, nie doznaje zatem, wskutek uderzenia, żadnej zmiany (ust. 52); uderzenie jest bowiem zawsze wzajemne, ile pędu jedno zyska, tyleż straci drugie.

Fizyczną przyczyną sił występujących podczas uderzenia jest sprężystość ciał, wzbudzona przez ich odkształcenie: przypłaszczenie się, albo zgniecenie wzajemne. W chwili, kiedy n. p. wóz kolejowy, toczący się po torze, dogoni drugi, idący przed nim, zaczynają zgniatać się sprężyny (zderzaki), umieszczone na przodzie i z tyłu każdego wozu. Siła, wywiązana przez ich ugięcie, popędza naprzód wóz uderzony, zarazem zwalnia bieg uderzającego, dopóki prędkości ich nie zrównają się. Zaczyna się teraz drugi akt uderzenia: parcie sprężyn, trwające wciąż jeszcze, w tym samym kierunku, odrzuca jeden wóz od drugiego. Uderzenie kończy się z chwilą, gdy wozy oddzielają się zupełnie od siebie. Podobnie dzieje się w każdem uderzeniu.

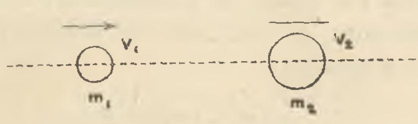
Stosunek prędkości (względnej) oddalania się, odbicia, ciał po uderzeniu, do pierwotnej ich prędkości zbliżania się zależy od rodzaju ciał, od większej lub mniejszej ich sprężystości. Jest to dla danego rodzaju ciał liczba przybliżenie stała $= k$, zawsze ułamek mniejszy od jedności. Newton zawieszał na nitkach kule A, B (ryc. 42) obok siebie. Odchylone do A_1, B_1 nie dosięgały po odbiciu się nigdy do wysokości pierwotnej A_1, B_1; znaczy to, że prędkość odbicia była mniejsza od prędkości uderzenia. Sprężyste kule stalowe, albo z kości słoniowej, odbijają się z niewielką stratą prędkości, ołowiane tracą dużo, kule pozbawione zupełnie sprężystości nie odskoczyłyby od siebie wcale, zostałyby po uderzeniu, trwale złączone. W granicach $k = 1$ (ciała doskonale sprężyste) i $k = 0$ (zupełnie niesprężyste) mieszczą się wszystkie przypadki spotykane w przyrodzie.



Ryc. 42.

Na podstawie znanych nam już praw dynamiki możemy zdać sobie całkowicie sprawę z przebiegu centralnego uderzenia się dwu kul jakichkolwiek.

Dajmy na to, że dwie kule (ryc. 43), mające masy m_1 i m_2, poruszają się po jednej prostej z prędkościami v_1 i v_2. Prędkości uważać będziemy jako dodatnie, jeżeli ruch odbywa się n. p. od lewej ku prawej; w przeciwnym razie uważać je będziemy jako ujemne. Uderzenie się kul nastąpi oczywiście tylko wtenczas, gdy prędkości będą nierówne; n. p. m_1 jest lewą kulą, a obie mają prędkości dodatnie, wtenczas musi być $v_1 > v_2$.



Ryc. 43.

Srodek mas obu kul porusza się z prędkością (ust. 52, 1.);

$$(1) \qquad V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Prędkość ta nie może zmienić się wskutek uderzenia, albowiem przy uderzeniu działają tylko siły wewnętrzne.

Kule zupełnie niesprężyste n. p. dwie kule z miękkiej gliny, z ołowiu, nie odskoczą od siebie, nie odbiją się, pozostaną po uderzeniu się trwale złączone i będą poruszały się nadal wspólnie, z tą prędkością, jaką już przedtem posiadał środek ich mas, t. j. z prędkością V. Kule natomiast sprężyste odskoczą od siebie i mieć będą po uderzeniu się pewne prędkości u_1 i u_2.

Ponieważ jednak i w tym razie ruch środka mas wcale się nie zmieni, przeto będzie znowu:

$$(2) \qquad \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2} = V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Przed uderzeniem kule zbliżały się z prędkością względną, równą różnicy rzeczywistych prędkości: $v_1 - v_2$; po uderzeniu względna prędkość ich wynosi: $-(u_1 - u_2)$; znak $-$ oznacza, że obecnie one oddalają się od siebie. Otóż, stosunek tych prędkości posiada, jak wspomnieliśmy wyżej, wartość stałą, zależną od rodzaju kul:

$$(3) \qquad \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2} = k.$$

Równania (2) i (3) zawierają dwie prędkości nieznane u_1 i u_2; rozwiązując je względem tych wielkości, znajdziemy:

$$(4) \qquad \begin{aligned} u_1 &= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - k \frac{m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2), \\ u_2 &= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} + k \frac{m_1}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2). \end{aligned}$$

W przypadku kul wcale nie sprężystych ($k = 0$) wynika stąd, jak już powiedzieliśmy: $u_1 = u_2 = V$. W przypadku doskonale sprężystych ($k = 1$) otrzymamy:

$$(5) \qquad \begin{aligned} u_1 &= \frac{v_1(m_1 - m_2) + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} \\ u_2 &= \frac{v_2(m_2 - m_1) + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

Jeżeli nadto masy obu kul są jednakowe, n. p. $m_1 = m_2 = m$, wtenczas równania (5) zamieniają się na następujące:

$$u_1 = v_2, \; u_2 = v_1;$$

t. zn. kule doskonale sprężyste o jednakowych masach **wymieniają między sobą prędkości**; każda z nich porusza się po uderzeniu z taką prędkością i w tym kierunku, jak druga poruszała się przed uderzeniem. Przypuśćmy n. p., że jedna kula znajduje się w spoczynku, a druga uderza ją z prędkością u_1; wtenczas ruch przenosi się po uderzeniu całkowicie na pierwszą kulę, a druga zatrzymuje się nieruchoma na miejscu. Łatwo to sprawdzić doświadczeniem (ryc. 42), jeżeli kule są jednakowe i sprężyste n. p. ze słoniowej kości.

Z równań (5) można również wyprowadzić prawo prostopadłego odbicia się kuli doskonale sprężystej od stałej i masowej ściany. Ściana tego rodzaju zachowuje się bowiem jak ogromna kula o nieskończenie wielkiej masie. Podzielmy liczniki i mianowniki ułamków, po prawej stronie równań (5), przez m_2, napiszemy je w następującej postaci:

$$u_1 = \frac{v_1\left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right) + 2v_2}{\frac{m_1}{m_2} + 1},$$

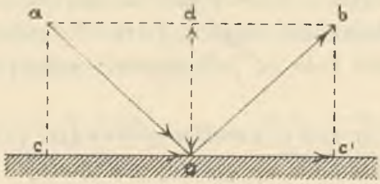
$$u_2 = \frac{v_2\left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) + 2\frac{m_1}{m_2}v_1}{\frac{m_1}{m_2} + 1}.$$

Niechaj tu oznacza m_1 masę kuli, m_2 nieskończenie wielką (w porównaniu z m_1) masę ściany; nadto przyjmiemy $v_2 = o$, uważając ścianę jako nieruchomą. Ponieważ wskutek tych założeń jest $\frac{m_1}{m_2} = o$, przeto otrzymamy:

$$u_1 = -v_1, \qquad u_2 = o,$$

t. j. ściana nie poruszy się wcale wskutek uderzenia; kula *odbije się od ściany z taką prędkością, z jaką uderzyła, lecz w przeciwnym kierunku.* Przypadek ten objaśnia dostatecznie grę w piłkę, albo w bilard.

Jeżeli kula sprężysta uderza o ścianę ukośnie, (jak w bilardzie) wtenczas rozłożymy prędkość uderzenia *a o* (ryc. 44) na składową równoległą do ściany *c o*, i prostopadłą do niej *d o*. Wskutek uderzenia pierwsza nie zmieni się, albowiem ściana oddziaływa na kulę tylko w kierunku prostopadłym; po uderzeniu będzie tedy $oc' = co$. Druga, jak widzieliśmy przed chwilą, zmienia kierunek na przeciwny, nie zmieniając wartości, zamienia się tedy na *od*. Składając *oc'* i *od*, znajdujemy prędkość *ob* kuli po odbiciu się; z przystawania



Ryc. 44.

trójkątów *ado* i *dob* wynika, że kąt *dob* odbicia się kuli równa się kątowi uderzenia.

Czas trwania uderzenia ciał małych i twardych jest niezmiernie krótki, rośnie zresztą proporcyonalnie do rozmiarów ciał. Można go zmierzyć sposobami elektrycznymi, jeżeli chodzi o uderzenie się przewodników elektrycznych, n. p. metali. Znaleziono tym sposobem, że dwie kule mosiężne, średnicy 26 milim., uderzające się z prędkością kilkunastu *cm/sek*, trwały w zetknięciu zaledwie przez niecałe dwie tysiączne sekundy. Uderzenie kul wielkości ziemi trwałoby jednak w tych warunkach przeszło dobę.

54. Równowaga uderzeń i ciśnienia ciągłego. Kula doskonale sprężysta o masie m, uderzywszy prostopadle o ścianę z prędkością v, odbija się z tą samą prędkością v. Przez czas uderzenia ściana ciśnie na kulę; ciśnienie to niszczy naprzód pęd $m\,v$ w kuli, skierowany ku ścianie. a następnie udziela jej pędu $m\,v$ w kierunku przeciwnym. Siła sprężystości, która uskutecznia tę zmianę pędu kuli, musi wywierać w ciągu czasu uderzenia całkowity popęd $2\,m\,v$ (ust. 40), gdyż popęd $m\,v$ jest potrzebny do zniszczenia pierwotnej prędkości kuli, drugi takiż sam, do odbicia jej.

Gdyby ściana była ruchoma, wtenczas uderzenie kuli ruszyłoby ją z miejsca; aby temu zapobiedz, musielibyśmy ją niejako podeprzeć z przeciwnej strony zapomocą siły, działającej tylko przez krótką chwilę uderzenia a wywierającej w ciągu tego czasu popęd $2\,mv$.

Wyobraźmy sobie, że kula o masie m uderza o ścianę bardzo często, n. p. n razy w sekundzie w równych odstępach czasu i zawsze z tą samą prędkością. Uderzenia takie działać będą na ścianę, jak gdyby ciągłe ciśnienie; celem podparcia jej będzie można użyć siły P, ciągle działającej, byle całkowity popęd tej siły, w ciągu dłuższego czasu np. t, był równy sumie popędów, potrzebnych do odbicia kuli za każdem uderzeniem. Ponieważ w ciągu czasu t mamy nt uderzeń, przeto:

$$Pt = nt \,.\, 2mv.$$

Natężenie siły potrzebnej będzie tedy:

$$P = 2mnv. \tag{1}$$

Weźmy dalej pod uwagę ścianę mającą pole S cm^2, którą uderza nie jedna kula, ale gęsty grad kul sprężystych. Oznaczmy przez N liczbę kul uderzających i odbijających się od ściany, w punktach, rozsianych jednostajnie na całej powierzchni.

Jeżeli wszystkie kule są jednakowe i uderzają jednakowemi prędkościami, wtenczas do podparcia ściany potrzebować będziemy widocznie siły N razy większej aniżeli poprzednio, gdy uderzała jedna kula, mianowicie siły:

$$P = 2mnNv. \tag{2}$$

Oznaczywszy nakoniec przez p ciśnienie, jakiego doznaje jednostka powierzchni ściany, mamy:

$$p = \frac{2mnNv}{S}. \tag{3}$$

Widzimy tedy, że gęste, a bardzo częste uderzenia o ścianę są równoważne ciągłemu ciśnieniu; ciśnienie to jest proporcyonalne do pędu kul uderzających, do ilości kul i uderzeń, zaś odwrotnie proporcyonalne do pola ściany.

Wzór (3) ma ważne zastosowanie w t. zw. kinetycznej teoryi gazów, o której będzie mowa w fizyce molekularnej.

Zadania.

109) Kule żelazne o masach 500 i 750 *gr* poruszają się po linii prostej: pierwsza na prawo, z prędkością 70 *cm/sek*, druga na lewo, z prędkością 40 *cm/sek*. Znaleźć ich prędkości po uderzeniu ($k = \frac{5}{9}$). *Odp.* Pierwsza na lewo 32·66 *cm/sek*, druga na prawo 28·44 *cm/sek*.

110) Znaleźć prędkość środka mas tych kul. *Odp.* Przed i po uderzeniu na prawo 4 *cm/sek*.

111) W jakim kierunku należy rzucić kulę na bilardzie prostokątnym, aby kula, wychodząc z jednego wierzchołka, dostała się po pięciu odbiciach do sąsiedniego bliższego wierzchołka.

Odp. Do naprzeciwległej krótszej ściany, w $\frac{1}{4}$ od przeciwległego wierzchołka.

112) Kula doskonale sprężysta spada z wysokości z pionowo na dół, ruchem jednostajnie przyśpieszonym (przyśpieszenie $= g$), na poziomą płaszczyznę; odbiwszy się, oddala się ruchem jednostajnie opóźnionym (przyśpieszenie $= -g$); ile uderzeń doznaje płaszczyzna w ciągu jednostki czasu i jaka jest prędkość uderzenia.

Odp. $n = \sqrt{\frac{g}{8z}}, \quad v = \sqrt{2gz}.$

113) Jeżeli te uderzenia są tak częste, że można je porównać z siłą ciągle działającą, a masa kuli jest m, obliczyć natężenie tej siły. *Odp.* $2mnv = mg$.

114) 50000 kul doskonale sprężystych uderza w ścianę mającą pole $1 m^2$, w punktach jednostajnie rozmieszczonych; obliczyć ciśnienie, jakiego doznaje ściana, jeżeli prędkość uderzeń wynosi 10 *m/sek*, częstość tychże 5 na *sek*, masa każdej kuli $\frac{1}{2}$ *gr*. *Odp.* 25000 dyn na każdy cm^2.

ROZDZIAŁ III.

O ciężkości.

55. Prawo pierwsze. Spadanie ciał ku ziemi tudzież nacisk, jaki one wywierają na podstawę, jeżeli są podparte albo zawieszone, przypisujemy działaniu siły, zwanej ciężkością. Są ciała, które na pozór zdają się nie ulegać ciężkości; cząstki mgły, chmur, albo pyłu, unoszą się w powietrzu; dym, ciepłe powietrze, balony i t. p. okazują nawet dążność do oddalania się od ziemi. Przekonamy się jednak, że to wyjątkowe zachowanie się wspomnianych ciał daje się wytłumaczyć wpływem otaczającego je powietrza, które stawia opór wszelkiemu ruchowi, a przeto także spadaniu ciał, a nadto — wskutek własnego ciężaru — wywiera ono na nie parcie skierowane w górę, przewyższające niekiedy rzeczywisty tych ciał ciężar.

Odłożymy na później dokładniejsze określenie wpływu, jaki powietrze wywiera na ruch ciał spadających; we właściwym również miejscu opiszemy przyrządy, których się używa do wydalania powietrza z naczyń zamkniętych. Obecnie zaś przypuszczać będziemy, że ciała poddawane badaniu znajdują się w t. zw. próżni t. z. w przestrzeni, w której nie ma powietrza, ani żadnej innej materyi.

Doświadczenie uczy, że w takich warunkach wszystkie ciała są ciężkie, t. j. spadają ku ziemi, ilekroć mają swobodę poruszania się; jeżeli zaś są podparte, albo zawieszone, wywierają nacisk na ciało podpierające.

Przypatrzywszy się ruchowi ciała spadającego swobodnie z większej wysokości, n, p. z dachu, lub z wieży, dostrzeżemy, że w ciągu ruchu prędkość jego ustawicznie i szybko się powiększa. Wnosimy stąd, że istnieje siła sprawiająca owe przyśpieszenie w kierunku z góry na dół; tą siłą jest właśnie ciężkość, czyli ciężar ciała. Ciężkością nazywamy wogóle siłę, o której mowa; siłę ciężkości, działającą na jakie określone ciało, nazywamy jego c i ę ż a r e m. Siła ta objawia się wyraźnie naszym zmysłom, gdy podnosimy w ręku kawałek ołowiu, żelaza i t. p.; przekonywamy się nadto, że ona działa ciągle i ustawicznie, gdziekolwiek na ziemi ciało umieścimy. Jeżeli po upływie dnia, roku, albo wieku, ciało lub ziemia nie uległy jakiej zmianie, to i ciężar będzie taki sam, jaki był poprzednio.

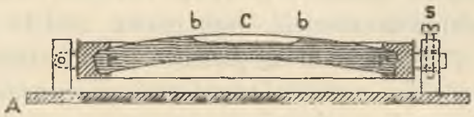
Aby znaleźć kierunek ciężkości, a zarazem uwydatnić w przybliżeniu jej natężenie, zawieszamy ciało badane na cienkim sznurku. W miarę wielkości ciężaru sznurek wydłuża się i wypręża, a skoro nastąpi równowaga, kierunek sznurka wskaże nam ściśle kierunek, w którym działa siła ciężkości (ust. 44). Urządzenie takie nazywamy pionem, a kierunek w którym działa ciężkość, nazywa się p i o n o w y m. Wszelkie kierunki prostopadłe do pionu nazywają się p o z i o m y m i.

Pobieżne spostrzeżenie uczy, że wszystkie piony w obrębie niewielkiego pola na powierzchni ziemi są do siebie równoległe. Ściślejsze wymierzenie okazuje jednak, że kierunki ich zwrócone są mniej więcej ku środkowi ziemi; z tego wynika, że w dwu miejscach na ziemi piony są względem siebie pochylone pod kątem, odpowiadającym łukowi największego koła na kuli ziemskiej, łączącemu te miejsca. Kąt pomiędzy pionami w dwu miejscach, blizkich siebie, jest wobec ogromnych rozmiarów ziemi tak mały, że kierunki pionów możemy uważać jako równoległe.

Zbierając to, co wyżej o ciężkości powiedziano, możemy wypowiedzieć następujące prawo pierwsze: »*Wszystkie ciała i części ciał, znajdujące się na ziemi, są ciężkie, t. j. ulegają stałym siłom, działającym na nie w kierunku pionowym, na dół*«.

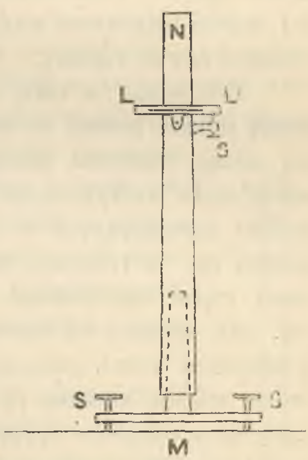
Pion jest najprostszem narzędziem, służącem do wyznaczenia kierunku ciężkości. Jeżeli chodzi o wyższy stopień dokładności, n. p. w przyrządach naukowych, używa się częściej l i b e l l i do wyznaczenia kierunku pionowego albo poziomego.

Jest to rurka szklana *rr*, wygięta lekko w łuk wzniesiony do góry (ryc. 45), napełniona jakąkolwiek ruchliwą cieczą, np. eterem. Ciecz nie wypełnia rurki całkowicie, zostaje bańka powietrza i pary *bb*, która ustawia się zawsze w najwyższej części łuku; jej środek zajmuje to miejsce, gdzie płaszczyzna styczna do wewnętrznej powierzchni rurki jest pozioma. Bańka nie mogłaby bowiem zatrzymać się w miejscu, w którem płaszczyzna styczna jest pochylona, gdyż dążąc do najwyższego miejsca, musiałaby wzdłuż takiej płaszczyzny posunąć się w górę. Jeżeli płaszczyzna styczna w punkcie n. p. *C* jest równoległa do podstawy libelli *AB*, natenczas podstawa ta będzie pozioma, ilekroć środek bańki znajdować się będzie w *C*. Taki punkt *C* bywa zwykle oznaczony kreską na rurce. Aby sprawdzić, czy kreska ta jest rzetelna, ustawia się libellę



Ryc. 45.

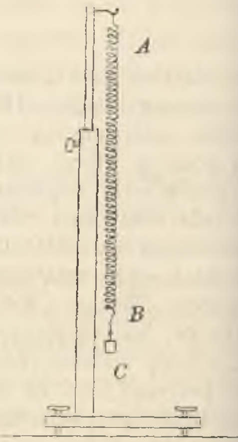
na płaskim stole i obraca ją tak, żeby środek bańki ustawił się w *C*; po obrocie libelli o 180° powinien środek bańki tamże pozostać. Lepsze libelle opatrzone są śrubką rektyfikacyjną *s*, za pomocą której można zmieniać nieco pochylenie rurki względem podstawy *AB*, a to w celu ustawienia płaszczyzny stycznej w *C* równolegle do *AB*. Często używa się libelli do pionowego ustawiania osi rozmaitych przyrządów. Niechaj *MN* (ryc. 46) wyobraża taką oś, mającą się pionowo ustawić, (chodzi tu o linię matematyczną, około której obraca się przyrząd albo oś rzeczywista); *LL* oznacza libellę przytwierdzoną do obracalnej części przyrządu. Przypuszczamy, że oś można dowolnie pochylać (przyrządy stoją zwykle na trzech śrubach nożnych *S*) i że pochylenie libelli do osi daje się również zmieniać za pomocą śruby *s*. Gdybyśmy wiedzieli, że płaszczyzna styczna w punkcie *C* libelli jest prostopadła do osi przyrządu, natenczas moglibyśmy od razu ustawić tę oś pionowo, pochylając ją za pomocą śrub *S* w taki sposób, żeby środek bańki zajął miejsce *C* i przy obrocie przyrządu około osi (albo przynajmniej w dwu do siebie prostopadłych położeniach) z tegoż punktu nie wychodził. Zwykle jednak potrzeba naprzód ustawić libellę prostopadle do osi. Aby to uskutecznić sprowadzamy bańkę do *C* i obracamy przyrząd razem z libellą o 180°. Jeżeli się okaże, że po obrocie bańka odchyliła się, wówczas poprawiamy połowę odchylenia, zmieniając pochylenie osi śrubami *S*, drugą połowę usuwamy, zmieniając pochylenie libelli względem osi, za pomocą śruby *s*. Po kilku próbach ustawimy libellę prostopadle do osi, samą zaś oś pionowo.



Ryc. 46.

56. Prawo wtóre. *»Ciężar tego samego ciała jest w różnych miejscach różny«.*

Prawo powyższe odkryte było i potwierdzone doświadczalnie, przez wymierzenie ciężaru tego samego ciała w różnych miejscach na ziemi. Dokładne sposoby mierzenia ciężaru ciał opisane będą w rozdz. VI; obecnie opiszemy przyrząd nazwany wagą sprężynową, który ułatwi zrozumienie tego prawa. Jest to sprężyna spiralna *AB* (ryc. 47), z metalu sprężystego (n. p. z drutu stalowego) przytwierdzona górnym końcem do stosownego wieszadła, obciążona u dolnego końca ciałem *C*, o którego ciężar tu chodzi. Pod wpływem ciężaru sprężyna wydłuża się, a wielkość wydłużenia, które mierzymy podziałką umieszczoną obok sprężyny, daje nam pewne wyobrażenie o wielkości ciężaru. Dwa ciała, sprawiające na tej wadze jednakowe wydłużenia, mają widocznie równe ciężary.



Ryc. 47.

Gdybyśmy z taką, albo z podobną wagą odbyli podróż do rozmaitych miejsc na ziemi, wówczas okazałoby się, że to samo ciało wydłuża sprężynę więcej w okolicach, sąsiadujących z biegunami ziemi, aniżeli np. na równiku, lub w pobliżu. Słowem, ciężar tego samego ciała powiększa się, gdy idziemy od równika ku jednemu z biegunów ziemi. Zmiana ta nie jest wprawdzie wielka, zdołano ją jednak dokładnie zmierzyć. Pomiary okazały, że wydłużenie sprężyny, obciążonej jakiemkolwiek ciałem, jest pod biegunami o tyle większe, iż potrzeba około $^1/_{200}$ ciężaru zdjąć z wagi, aby mieć wydłużenie takie jak na równiku. Stosunek ten wyraża się dokładniej następującemi liczbami: 983 n. p. jednakowych ziaren śrutu ważą na równiku tyleż, co 978 takichże ziaren pod biegunem. Jest to różnica dosięgająca ledwie pół od sta pomiędzy równikiem a biegunem. W obrębie niewielkiej przestrzeni możemy przeto uważać ciężary ciał jako niezmienne, t. j. możemy uważać ciężar jako siłę stałą zarówno co do kierunku jak i natężenia.

Przekonano się nadto, że oddalenie ciała od ziemi, wzniesienie nad powierzchnię ziemi (nad poziom morski) sprawia również zmniejszenie ciężaru. Wzniesienie o jeden kilometr zmniejsza ciężar każdego ciała w przybliżeniu o $^1/_{5000}$ część. Ograniczamy się tu do podania faktów; teoryą ich zajmować się będziemy w rozdz. VII, w związku z nauką o grawitacyi.

57. Prawo trzecie. Z doświadczeń codziennych wiadomo, że ciężary różnych ciał nie są jednakowe. W przybliżeniu możemy porównywać ciężary, ważąc ciała w ręku, albo lepiej zawieszając je na wadze sprężynowej. W ten sposób przekonamy się, czy jedno ciało jest cięższe, czy lżejsze od drugiego, zdołamy uporządkować różne ciała według wartości ich ciężarów. Aby jednak dowiedzieć się, jak wielki jest ciężar pewnego ciała (wyrażony w jednostkach siły, np. w dynach) należy uciec się do ogólnego sposobu mierzenia sił, wyłożonego w poprzedzającym rozdziale, polegającego na wymierzeniu masy ciała, tudzież ruchu wywołanego przez daną siłę.

Tym sposobem zdołamy wykryć warunki, od których zależy wartość ciężaru jakiego ciała.

Pierwsze doświadczenia tego rodzaju wykonywał Galileusz około roku 1590; rzucał on z wieży w Pizie ciała rozmaitej wielkości i ciężaru, i przekonał się, że wszystkie spadały z tej samej wysokości w ciągu jednakowych czasów (o ile powietrze nie przedstawiało ruchowi ich znaczniejszego oporu); tak n. p. kula $\frac{1}{2}$ funtowa i 100 funtowa spadały z wysokości 200 stóp prawie jednocześnie, gdyż cięższa wyprzedziła lżejszą zaledwie o szerokość piędzi. Doświadczenia te zbijały stanowczo dawniejsze mniemanie, jakoby ciała cięższe spadały szybcej aniżeli lżejsze.

Różnice, jakie w prędkości spadania często spostrzegać się dają, zależą wyłącznie od wpływu, jaki powietrze wywiera na ruch ciał. Aby uwolnić się od tego wpływu, używamy za przykładem Newtona rury szklanej, długości około 2 m. (ryc. 48), zamkniętej szczelnie u jednego końca *A*, u drugiego *B* zaopatrzoną w kurek do wydalania albo wprowadzania powietrza. Wrzuciwszy na dno takiej rury kawałek ołowiu, piórko, skrawki papieru, i t. p. przekonamy się, ustawiając rurę pionowo, że ołów spada najszybcej, piórko znacznie wolniej. Po wydaleniu jednak powietrza, zapomocą pompy pneumatycznej, wszystkie te ciała spadają jednocześnie od jednego końca

Ryc. 48.

rury do drugiego; spuszczone jednocześnie z jednego poziomu spadają zawsze razem, t. j. mają jednakowy ruch. Możemy tedy powiedzieć, że *wszystkie ciała, spadające swobodnie w próżni, w tem samem miejscu na ziemi, spadają jednakowo.*

Galileusz przekonał się nadto, za pośrednictwem doświadczeń, o których jeszcze będzie mowa, że ruch ciał spadających pod wpływem ciężkości jest jednostajnie przyśpieszony; z tego wnosimy, że ciała podlegają podczas spadania sile stałej. Ciężar ciała jest zatem siłą stałą, nietylko wtenczas gdy ciało jest nieruchome, ale także podczas ruchu.

Jeżeli oznaczymy przez g przyśpieszenie ruchu ciał spadających, czyli t. zw. przyśpieszenie ciężkości — wspólne wszystkim ciałom, spadającym w próżni, w tem samem miejscu na ziemi — przez m masę pewnego ciała, natenczas przyrost pędu ciała spadającego, w ciągu jednostki czasu, będzie wyrażony przez iloczyn: mg. Iloczyn ten jest miarą siły, pod wpływem której ruch się odbywa (ust. 39), a więc miarą ciężaru P ciała; mamy więc:

$$P = mg. \tag{1}$$

Pisząc to wyrażenie ciężaru ciała w następujący sposób:

$$\frac{P}{m} = g,$$

dostrzeżemy, że stosunek ciężaru jakiegokolwiek ciała do jego masy jest dla wszystkich ciał ten sam, gdyż g jest dla wszystkich ciał to samo; ciężary ciał, w danem miejscu, są zatem proporcyonalne do ich mas. Ciała mające większą masę spadają w próżni tak samo jak drobne masy, albowiem masa większa posiada proporcyonalnie większy ciężar — przeto przyśpieszenie jest zawsze jednakowe. Na podstawie powyższych doświadczeń i objaśnień możemy wypowiedzieć następujące trzecie prawo ciężkości:

»*Ciężary ciał (w próżni) nie zależą od postaci, objętości ani od rodzaju materyi; zależą tylko od mas i są do mas wprost proporcyonalne*«.

Jeżeli we wzorze $P = mg$, służącym do obliczania ciężaru, podstawimy za m masę ciała, wyrażoną w gramach, za g przyśpieszenie ciężkości, w cm/sek^2, wówczas uzyskamy ciężar ciała P, określony w jednostkach siły, należących do układu miar $c.\ g.\ s.$ t. j. w dynach.

Doświadczenia Galileusza i Newtona dają odpowiedź na znane pytanie: czy funt pierza więcej waży, czy funt ołowiu. Z góry niema powodu do przypuszczenia, jakoby ziemia przyciągała jednakową siłą jednakowe masy pierza i ołowiu. Rozstrzyga to dopiero doświadczenie w sposób twierdzący.

Prawa trzeciego dowiódł Newton o wiele ściślej przez doświadczenia wahadłowe. Wahadła jednakowej długości, składające się z rozmaitych ciężarów (ołów, wełna, drzewo, zboże i t. p.), zawieszonych na nitkach jednakowej długości, mają jednakowe okresy wahań. Wahanie wahadeł takich jest również spadaniem pod wpływem ciężkości, wzdłuż łuków kołowych; jednakowe ich ruchy świadczą, że siły (ciężary) są proporcyonalne do mas.

Opór powietrza wywiera wpływ tem znaczniejszy na ruch ciał, jednakowej zresztą postaci, im mniejszy jest ich ciężar; im mniejszy ciężar ciała, tem więcej znaczy opór powietrza, w porównaniu z ciężarem. Krążek metalowy spada w powietrzu szybciej, aniżeli równej wielkości krążek papierowy; jeżeli jednak położymy papier na metalu i puścimy je razem, natenczas powietrze nie działa bezpośrednio na papier i oba krążki spadają razem.

58. Wnioski. 1. *Ciężar każdego ciała równa się sumie ciężarów wszystkich jego części.* Jeżeli podzielimy ciało jakie na dowolną liczbę części i dozwolimy im spadać swobodnie w próżni, natenczas każda część poruszać się będzie tak samo, jakby poruszało się ciało niepodzielone; jeżeli te części były w zetknięciu, natenczas nie rozdzielą się one podczas spadania. Siła, działająca na całą masę, jest zatem sumą sił działających na jej części.

2. *Dwa ciała, mające* (w próżni) *równe ciężary, mają także równe masy.* Na tej zasadzie polega zastosowanie wag do mierzenia mas. Jeżeli dwa ciała, zawieszone po kolei n. p. na wadze sprężynowej, (ryc. 47, albo na jakiejbądź innej) dają w próżni jednakowe wydłużenia sprężyny, natenczas ciężary ich są równe, a przeto (prawo 3) i masy są równe. Zapomocą wag możemy porównywać masy ciał z masą obraną za jednostkę (np. z 1 gramem), łatwiej i szybciej aniżeli przez mierzenie ruchu, sposobem ogólnym, wynikającym z określenia masy (ust. 37). Dobrze jest jednak pamiętać, że zastosowanie wag do mierzenia mas usprawiedliwione było przez doświadczenia kinetyczne i opiera się właśnie na tym sposobie ogólnym. Pomiary ruchu zostały raz na zawsze wykonane przez Galileusza, Newtona i innych, a po wysnuciu z nich ogólnego prawa proporcyonalności mas i ciężarów, nie potrzebujemy już powtarzać ich przy każdem ważeniu.

59. Spadanie ciał swobodnych. 1) Ciało puszczone swobodnie, bez prędkości początkowej, t. j. bez rzutu, spada na dół w kierunku pionowym; prędkość, z początku równa zeru, wzrasta pod wpływem ciągle działającej ciężkości nader szybko. Przyśpieszenie ciężkości g jest tak znaczne, że bezpośrednie zmierzenie ruchu ciał spadających byłoby trudne. Zdołano jednak sprawdzić, zapomocą dokładnych przyrządów, że ruch ten w próżni jest rzeczywiście jednostajnie przyśpieszony, a przyśpieszenie jego wynosi w naszym kraju około:

$$g = 981 \; cm/sek^2.$$

Stosując znane równania ruchu jednostajnie przyśpieszonego (ust. 16), znajdziemy następujące wyrażenia prędkości v i drogi z, przebytej w ciągu t *sek.* t. j. wysokości spadku: (patrz zadania 35 i 36)

(1) $$v = gt = 981 \, . \, t \; cm/sek^2.$$

(2) $$z = \frac{gt^2}{2} = 490{\cdot}5 \; t^2 \; cm.$$

(3) $$v = \sqrt{2gz} = 44{\cdot}29547 \sqrt{z} \; cm/sek.$$

(4) $$z = \frac{v^2}{2g} = 0{\cdot}005\,096\,84 \, v^2 \; cm.$$

Prędkość ruchu v związana jest z wysokością spadku z za pośrednictwem równań (3) i (4). Wysokość $z = \frac{v^2}{2g}$, z której ciało powinno spadać, aby u dołu uzyskało prędkość v, nazywa się wysokością prędkości v.

2) Ruch ciał rzuconych w jakimkolwiek kierunku jest podług ust. 21 wypadkową dwu ruchów: jednostajnego, prostolinijnego, w kierunku rzutu, i jednostajnie przyśpieszonego, wywołanego przez ciężkość, w kierunku pionowym. Ciężkość działa na ciała, mające nadany sobie ruch jakikolwiek, tak samo, jak na ciało pierwotnie nieruchome (ust. 43). Ruch spadający jest niezależny od ruchu jednostajnego i dodaje się do niego geometrycznie.

Jeżeli n. p. ciało zostało rzucone w kierunku ukośnym OA (ryc. 12) natenczas odbywa ono ruch po paraboli $OWDC$. Linie A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3 i t. d. wskazują, o ile ciało zostaje z biegiem czasu ściągnięte na dół, działaniem ciężkości, od miejsc A_1, A_2... i t. d. któreby zajmowało, gdyby poruszało się jedynie wskutek rzutu. Linie te mają takie długości, jak drogi OB_1, OB_2.. i t. d., któreby ciało przebywało, spadając pionowo z punktu O, jedynie pod wpływem ciężkości.

Też same uwagi odnoszą się do rzutu pionowego ciał ciężkich, w górę albo na dół; do tych ruchów stosują się wzory podane w ust. 16 (2, 3), tudzież w ust. 18 (1, 2, 3, 4), skoro zamiast γ napiszemy g, t. j. przyśpieszenie ciężkości $= 981$ *cm/sek*^{2}.

Przyjąwszy $g = 981$ *cm/sek*^{2} obliczymy z łatwością następującą tablicę wysokości spadku ciał w próżni:

Droga w ciągu	0·1	*sek*	wynosi	4·91	*cm*
»	0·2	»	»	19·62	»
»	0·3	»	»	44·15	»
»	0·4	»	»	78·48	»
»	0·5	»	»	122·62	»
»	0·6	»	»	176·58	»
»	0·7	»	»	240·35	»
	i t. d.			i t. d.	

Rachunki powyższe stosują się ściśle tylko do ruchu w próżni; w powietrzu, albo w innych płynach, można je zastosować tylko w przybliżeniu i to wtenczas, gdy opór otaczającego płynu nie jest wielki: a więc do ciał gęstych, mających małą powierzchnię i do niewielkich prędkości spadku. Kartka papieru, zwinięta w małą gałkę, spada szybcej, aniżeli rozpostarta. Opór powietrza wzmaga się podczas spadania w miarę powiększania się prędkości ruchu; w końcu staje się równy ciężarowi ciała; od tej chwili począwszy, ciało spada ruchem jednostajnym, gdyż siła pędząca, ciężkość, jest zrównoważona przez przeciwny jej opór powietrza (por. ust. 170). Postać drogi parabolicznej ciał, rzuconych ukośnie, zmienia się również wskutek oporu powietrza; linia przestaje być symetryczną względem wierzchołka (W, ryc. 12), druga jej gałęź spada bardziej stromo ku poziomowi, albowiem opór powietrza zmniejsza szybko poziomą składową prędkości, tak iż w końcu przeważa pionowe działanie ciężkości.

Prędkość ruchu spadającego mierzy się niekiedy za pomocą widełek strojowych, które, wprowadzone w drganie, kreślą ślad na powierzchni deski spadającej (podobnie jak na ryc. 16). Gdyby ruch był jednostajny, ślad ów byłby zwyczajną linią falową; w rzeczywistości otrzymuje się fale o długości rosnącej w stosunku 1 : 3 : 5 i t. d. Jeżeli okres drgań widełek jest znany, można tym przyrządem zmierzyć g.

60. Pozorny ciężar ciał poruszanych. Wyobraźmy sobie ciało o masie m, spoczywające na poziomej podstawie, którą można dowolnie poruszać w kierunku pionowym, do góry albo na dół. Przypuśćmy, że pewna siła zewnętrzna podnosi podstawę razem z ciałem do góry, ruchem jednostajnie przyśpieszonym, którego przyśpieszenie oznaczymy przez γ. Pytamy, jak wielki nacisk wywiera podczas ruchu ciało na podstawę albo, co na jedno wychodzi, podstawa na ciało. Łatwo zrozumieć, że podczas wznoszenia się podstawy nacisk ten musi przewyższać rzeczywisty ciężar ciała, albowiem ciało przeciwstawia sile, podnoszącej je do góry, reakcyę wynikającą z bezwładności. Reakcya ta, której miarą jest $m\gamma$ (ust. 46), objawia się w kierunku przeciwnym ruchowi, powiększa zatem nacisk, który ciało wywiera na podstawę wskutek swego ciężaru. Jeżeli całkowity nacisk na podstawę oznaczymy przez Q, przez P ciężar ciała, wówczas otrzymamy:

$$Q = P + m\gamma \text{ albo}$$

(1) $$Q = mg + m\gamma.$$

Nacisk Q, czyli pozorny ciężar ciała poruszanego do góry z pewnem przyśpieszeniem, przewyższa więc rzeczywisty ciężar ciała, tem więcej, im większe jest przyśpieszenie ruchu. Można to sprawdzić, podnosząc do góry, ruchem przyśpieszonym, n. p. wagę sprężynową, na której wisi masa m. Dogodniej jest użyć przyrządu, opisanego w ust. 46 (ryc. 34). Wydłużenie sprężyny, które mierzy tu siłę Q, będzie podczas ruchu przyśpieszonego większe, będzie mianowicie takie, jak gdyby na sprężynie nieruchomej zawieszona była masa $M = \frac{Q}{g} = m + \frac{m\gamma}{g}$. Podobnie, jeżeli wyciągamy do góry ciężar zawieszony na sznurze, napięcie sznura będzie dopóty tylko równe ciężarowi, dopóki tenże porusza się jednostajnie, albo nie porusza się wcale; podczas ruchu przyśpieszonego napięcie zwiększa się, ono stanowi bowiem siłę, która ciało podnosi, a więc nietylko równoważy ciężar ciała, ale nadto pokonywa jego bezwładność.

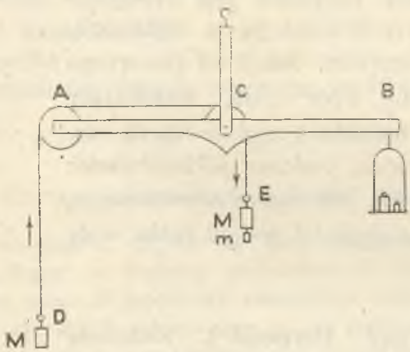
Jeżeli podstawa, unosząca ciało, spada na dół z przyśpieszeniem γ, wtenczas będzie oczywiście

(2) $$Q = P - m\gamma = mg - m\gamma.$$

Gdyby było $\gamma = g$, wtenczas $Q = 0$, albowiem podstawa i ciało spadają swobodnie i nacisku pomiędzy niemi niema.

Pozorną zmianę ciężaru ciał poruszanych można stwierdzić także zapomocą zwyczajnej wagi, urządziwszy ją, według Poggendorffa, w następujący sposób.

Na jednym końcu belki umieszczony jest, zamiast szalki, lekki i łatwo obracalny krążek A (ryc. 49). Drugi krążek podobny znajduje się w środku belki. Przez oba krążki przechodzi sznur $DACE$, obciążony u obu końców jednakowemi masami M i M. Na szalce B umieszcza się ciężarki równoważące ciężar, znajdujący się na przeciwnym końcu belki. Jeżeli koniec sznura E obciążymy więcej,



Ryc. 49.

dodając do M dodatkowy ciężarek m, wtenczas belka nie wyjdzie z równowagi, dopóki nie dopuścimy, żeby ciężarek $M + m$ spadał. Skoro jednak E pocznie spadać, D wznosić się do góry, równowaga ustaje, a mianowicie koniec A belki idzie na dół; potrzeba wówczas włożyć na szalkę pewien ciężarek q, aby sprowadzić wagę do poziomu. Jeżeli oznaczymy przez γ przyśpieszenie, z jakiem poruszają się ciężary zawieszone w D i E, jeden do góry, drugi na dół, wtenczas napięcie AD sznurka wynosić będzie według (1), $Mg + M\gamma$; napięcie części CE (podług 2) będzie: $(M + m)g - (M + m)\gamma$. Ponieważ napięcie sznurka musi być wszędzie jednakowe, (bo przypuszczamy, że tarcie na obwodach krążków nie istnieje), przeto:

$$Mg + M\gamma = (M + m)g - (M + m)\gamma,$$

skąd wypada wartość przyśpieszenia:

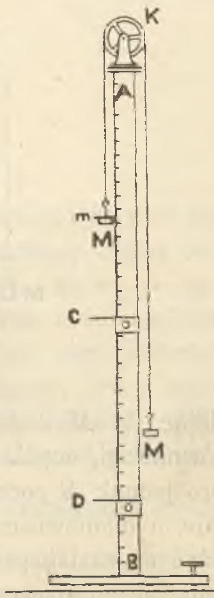
$$\gamma = g \frac{m}{2M + m}.$$

Koniec *A* wagi staje się więc pozornie cięższym, wskutek bezwładnej reakcyi masy *M*. o

$$q = M\gamma = g \frac{mM}{2M + m}.$$

Doświadczenia tego rodzaju są ważne z tego powodu, że dozwalają wymierzyć natężenie siły ciężkości, działającej na ciała podczas ruchu i porównać ją z ciężkością, działającą w spoczynku. Jeżeli od pozornego ciężaru odejmiemy opór ciała, wynikający z bezwładności, natenczas okaże się, że *rzeczywisty ciężar ciała, podczas jakiegokolwiek ruchu, jest taki sam, jak ciężar nieruchomego, czyli, że działanie ciężkości jest od ruchu ciała niezależne.*

61. Przyrząd Atwooda[1]. Zadaniem tego przyrządu jest zwolnienie ruchu spadającego ciał ciężkich, w stosunku dokładnie znanym, a to w tym celu, żeby ułatwić pomiar tego ruchu i wyznaczyć w przybliżeniu wartość przyśpieszenia ciężkości; obok tego służy przyrząd Atwooda do objaśnienia ogólnej zależności pomiędzy siłą, masą i przyśpieszeniem. Składa się on z lekkiego krążka *K* (ryc. 50), obracającego się z wielką łatwością około poziomej osi, opartej na łożyskach utwierdzonych na szczycie (2—3 *m*) słupa *AB*. W rowku wyciętym na obwodzie krążka umieszcza się cienką nić i obciąża końce jej równymi ciężarkami *M* i *M*; ciężary tych mas równoważą się, wskutek czego nie mogą one poruszać się same przez się ani na dół, ani do góry. Jeżeli którą z nich potrącimy w kierunku pionowym, natenczas obie będą się poruszały jednostajnie, na mocy bezwładności. Skoro jednak dodamy po jednej stronie jeszcze małą masę *m*,



Ryc. 50.

[1] Czytaj: Etłud.

wtenczas strona przeciążona spadać będzie na dół, pod wpływem ciężaru $P = mg$ masy dodanej. Ciężar ten jest siłą stałą, przeto wzbudza on ruch jednostajnie przyśpieszony; przyśpieszenie γ tego ruchu będzie jednak mniejsze, aniżeli przyśpieszenie ciężkości g, właściwe swobodnemu spadaniu. Gdyby bowiem m spadało swobodnie, ciężar mg tej masy udzieliłby jej przyśpieszenia g. Tu zaś ten sam ciężar mg wprowadza w ruch masę większą: $m + M + M$ (nie licząc masy krążka i nitki). Prędkości ruchu (a więc i przyśpieszenie) będą przeto w tym stosunku mniejsze, w jakim masa jest większa (ust. 37) a więc:

$$\gamma : g = m : m + 2M, \quad \text{czyli } \gamma = g\frac{m}{m + 2M}$$

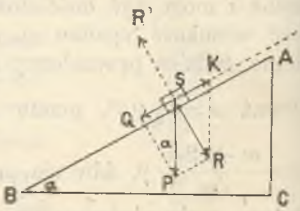
(jak w poprzednim ustępie). Jeżeli n. p $M = 22{\cdot}5$ gr, $m = 5$ gr, wtenczas $\gamma = {}^1/_{10}\, g$; ruch będzie 10 razy wolniejszy, aniżeli spadanie swobodne i może być dość dokładnie wymierzony. W tym celu należy zmierzyć wysokość spadku n. p. $AC = s$, ku czemu służy podziałka na słupie, tudzież przynależny czas t, zapomocą zegarka sekundowego; ponieważ $s = \frac{1}{2}\gamma t^2$, przeto łatwo następnie obliczyć $\gamma = \frac{2s}{t^2}$, nakoniec $g = \frac{m + 2M}{m}\gamma$. Aby się przekonać, że w istocie prędkość powiększa się w tym ruchu jednostajnie, używa się dwu podstawek C i D, przesuwalnych wzdłuż słupa; w wyższej podstawce C znajduje się okrągły otwór, przez który masa M przechodzi swobodnie; ciężarek zaś dodatkowy m jest cokolwiek szerszy i zatrzymuje się na podstawce C. Masy spadają od A do C ruchem przyśpieszonym; podstawka C zdejmuje następnie m, poczem masa M przebywa drogę od C do D, wskutek bezwładności, ruchem jednostajnym, z tą prędkością, jaką posiadała w C. Podzieliwszy długość drogi CD przez czas potrzebny do przebycia jej, znajdziemy prędkość w C, właściwą wysokości spadku AC.

Jeżeli czasy potrzebne do przebycia dróg AC i CD mają być równe — co najdogodniejsze — natenczas należy podstawki tak ustawić, żeby było: $CD = 2AC$ (bo $AC = \frac{1}{2}\gamma t^2$, $v = \gamma t$, przeto $CD = vt = \gamma t^2 = 2AC$).

Celem uzmysłowienia sił działających na masy, korzystnie jest połączyć przyrząd Atwooda z przyrządem, przedstawionym na ryc. 34; w tym celu zawieszamy z jednej strony przyrządu Atwooda czułą sprężynę spiralną, obciążoną u spodu masą M. Gdy pod wpływem większego ciężaru, zawieszonego na drugim końcu sznura, sprężyna podnosi się do góry, wtenczas wydłużenie jej zwiększa się, jak gdyby obciążenie jej było o $M\gamma$ zwiększone; przeciwnie, przy spadaniu przyśpieszonem sprężyna skraca się, jak gdyby obciążenie jej stało się o $M\gamma$ lżejsze.

62. Płaszczyzna (równia) pochyła. Inny sposób zwolnienia ruchu spadającego, ważny ze względu na różne zastosowania, polega na użyciu płaszczyzny pochylonej względem poziomu. Ciała nie spadają wcale, ani nie zsuwają się po płaszczyźnie poziomej; wzdłuż pionowej spadają tak, jak gdyby były swobodne; po płaszczyznach pochyłych spadają tem wolniej, im mniejsze jest pochylenie.

AB (ryc. 51) wyobraża widok boczny płaszczyzny, n. p. deski, albo jakiegokolwiek toru pochylonego do poziomu *BC*, pod kątem $ABC = \alpha$. Na płaszczyźnie tej znajduje się ciało *S*, mające pewną masę *m*, ciężar $P = mg$. (Ciężar ciała wyobrażony na rysunku przez odcinek *SP*). Aby zapobiedz zsunięciu się ciała wzdłuż *AB*, musimy je podeprzeć albo przywiązać, słowem musimy poddać je działaniu takiej siły, któraby zrównoważyła dążność do spadania. Siłą tą może być n. p. napięcie sznurka *SK*, do którego ciało *S* jest przywiązane. Ciało poddane sile *SK* a jednocześnie ciężarowi swemu *SP*, ciśnie się na płaszczyznę *AB* pewną siłą *SR* i nawzajem doznaje od płaszczyzny oddziaływania *SR'* tej samej wielkości, w kierunku przeciwnym. Te trzy siły: *SP*, *SK* i *SR'*, działające jednocześnie na ciało *S*, równoważą się wzajemnie, skoro ciało jest w spoczynku; przeto *SR'* musi być równoważącą, *SR* wypadkową sił *SP* i *SK*. Aby znaleźć wielkość siły *SK*, potrzeba przedewszystkiem znać kierunek *RR'* siły, którą płaszczyzna wywiera na ciało *S*. Przyjąwszy, że kierunek ten jest dany, dość będzie wykreślić *PR* || *SK*, wówczas $PR = SK$ będzie szukaną wartością siły, potrzebnej do zrównoważenia ciała na płaszczyznie pochyłej.



Ryc. 51.

Jeżeli płaszczyzna *AB* jest tak gładką (ślizką), że przesuwanie się ciała wzdłuż *AB* nie spotyka żadnego oporu (tarcia), wtenczas kierunek oddziaływania *SR'* musi być prostopadły do płaszczyzny. Po płaszczyznie takiej ciało zesuwa się nawet przy najmniejszem jej pochyleniu do poziomu; gdyby oddziaływanie nie było w tym przypadku prostopadłe do płaszczyzny, możnaby łatwo znaleźć takie pochylenie, przy którem to oddziaływanie byłoby pionowe, i równoważyłoby się z ciężarem ciała bez pomocy siły *SK*.

Przypuśćmy, że *AB* (ryc. 51) jest płaszczyzną zupełnie gładką, zatem SR' prostopadłe do AB. Rozłożywszy ciężar SP na składową SR, prostopadłą do płaszczyzny, i SQ równoległą do niej, dostrzeżemy natychmiast, że trójkąty KSR i SQP są przystające, bo oba są prostokątne, $SR = QP$, a nadto kąty QPS i SRK są równe sobie i równe kątowi α. Z tego wynika, że $SK = SQ$ t. j. *siła równoległa do płaszczyzny pochyłej, mająca zrównoważyć na tej płaszczyźnie ciało nie doznające tarcia, powinna być równa składowej ciężaru ciała, równoległej do płaszczyzny;* nacisk (SR), jaki ciało wywiera wówczas na płaszczyznę, równa się składowej ciężaru prostopadłej do AB. Znając ciężar ciała P, obliczymy obie siły $SK = SQ = Q$ i $SR = R$ zapomocą wzorów: $SK = SQ = SP \sin \alpha$; $SR = SP \cos \alpha$; albo krócej:

$$Q = P \sin \alpha; \; R = P \cos \alpha.$$

Q oznacza tu siłę równoległą do płaszczyzny, która równoważy dążność ciała do zesunięcia się; R oznacza nacisk, jaki ciało wywiera na płaszczyznę, w kierunku prostopadłym do niej.

63. Spadanie po płaszczyźnie pochyłej. Jeżeli ciało na płaszczyźnie pochyłej nie jest uwiązane, albo inaczej zrównoważone, wówczas zesuwa się ono na dół ruchem przyśpieszonym. Oddziaływanie SR' płaszczyzny na ciało i nacisk SR ciała na płaszczyznę są i w tym przypadku prostopadłe do AB (o ile płaszczyzna jest gładką); ruch ciała odbywa się jedynie pod wpływem siły $SQ = Q$. Będzie to ruch jednostajnie przyśpieszony, podobny do swobodnego spadania; przyśpieszenie jego (γ) będzie jednak mniejsze.

Siła P (ciężar) udziela bowiem ciału przy swobodnem spadaniu przyśpieszenia g; siła mniejsza $Q = P \sin \alpha$ wytworzy tyle razy mniejsze przyśpieszenie (ust. 39):

$$\gamma : g = P \sin \alpha : P, \quad \text{skąd:} \; \gamma = g \sin \alpha.$$

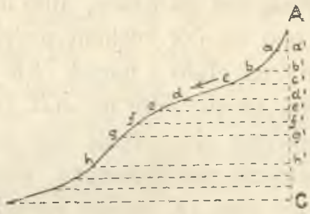
Przyśpieszenie zsuwania się po gładkiej płaszczyźnie jest zatem tem mniejsze, im mniejsze jest pochylenie płaszczyzny. Prędkość zesuwania się $= v$ powiększa się jednostajnie podczas ruchu.

Dajmy na to, że ciało zostało strącone na dół z punktu A, po płaszczyźnie pochyłej, z prędkością początkową $= v_0$ i obliczmy prędkość, jaką ono uzyska spadłszy na dół. W B prędkość jego wynosić będzie $v = v_0 + \gamma t$; ponieważ $AB = v_0 t + \frac{\gamma}{2} t^2$, skąd:

$t = -\frac{v_0}{\gamma} + \sqrt{\frac{v_0^2}{\gamma^2} + \frac{2AB}{\gamma}}$, przeto, podstawiwszy tę wartość t w równanie dla v, znajdziemy $v = \sqrt{v_0^2 + 2\gamma AB}$, albo: $v = \sqrt{v_0^2 + 2gAB \sin\alpha}$, albo: $v = \sqrt{v_0^2 + 2gAC}$.

AC (ryc. 51) oznacza różnicę wysokości punktów A i B, mierzoną w kierunku pionowym, t. j. różnicę wysokości poziomów przechodzących przez A i B. Wzór ostatni okazuje, że ciało rzucone na dół po płaszczyznie pochyłej, gładkiej, nabywa na niej takiej prędkości, jak gdyby było rzucone pionowo na dół i spadało swobodnie do tego samego niższego poziomu. Istotnie, ciało rzucone z A pionowo na dół z prędkością początkową v_0, uzyskałoby, spadłszy do C, prędkość: $v = v_0 + gt$, w czem $t = -\frac{v_0}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + \frac{2AC}{g}}$; zatem jak pierwej byłoby $v = \sqrt{v_0^2 + 2gAC}$

Toż samo twierdzenie stosuje się także do spadania po jakiejbądź, dowolnie zakrzywionej, ale gładkiej powierzchni AB (ryc, 52). Drogę ciała spadającego po takiej powierzchni możemy bowiem



Ryc. 52.

podzielić na tak krótkie odcinki Aa, ab, bc, i t. d., żeby je było można uważać jako proste. Ciało spadające n. p. z miejsca c, z prędkością początkową v_0, uzyska po przybyciu do d taką prędkość, jak gdyby spadało swobodnie z c' do d' i t. d. Widzimy przeto, że *prędkość ciała spadającego zależy tylko od różnicy wysokości poziomów, między którymi ono spada, a nie zależy od postaci toru.*

64. Natężenie ciężkości. Ciężar jakiegobądź ciała znajdujemy, mnożąc jego masę przez przyśpieszenie ciężkości, ważne dla danego miejsca (ust. 57), $P = mg$. Tak n. p. litr wody (masa $= 1000$ gr)

waży u nas: 981000 dyn ($g = 981$ *cm/sek*^{2}). *Siłę ciężkości działającą na jednostkę masy, czyli ciężar jednostki masy, nazywamy natężeniem ciężkości w danem miejscu.* Założywszy w poprzedzającym wzorze $m = 1$, znajdujemy $P = g$ t. j. natężenie ciężkości jest liczebnie równe przyśpieszeniu swobodnego spadania.

Natężenie ciężkości w rozmaitych miejscach posiada następujące wartości: na równiku ziemskim 978, na biegunach 983, na powierzchni księżyca: 185·9, Jowisza: 2180, słońca: 27120 *dyn/gr*. Sposoby mierzenia będą opisane w rozdz. szóstym i ósmym.

65. Ciężarowy układ miar. Przed wprowadzeniem bezwzględnego układu miar (*c. g. s.*), w którym określono jednostkę sił (dynę) na podstawie ogólnych, w całym wszechświecie ważnych zasad dynamiki, mierzono siły innemi miarami, a mianowicie porównywano je z ciężarami rozmaitych mas (funta, kilograma, grama i t. d.) na powierzchni ziemi. Jednostki te są nader dogodne, gdyż siła ciężkości istnieje wszędzie i z łatwością można jej użyć do wymierzania innych sił (n. p. siły mięśniowej, sprężystości, przyciągania magnesów i t. p.). Pomiar uskutecznia się najczęściej przez zrównoważenie siły nieznanej ciężarem jakiejś znanej masy. Ze stanowiska naukowego nie można tych jednostek uznać za ścisłe, albowiem ciężar tej samej masy nie jest wszędzie jednakowy. Ponieważ jednak różnica ciężarów tej samej masy, w różnych miejscach powierzchni ziemi, nie przewyższa nigdzie $^1/_{200}$ części ciężaru (ust. 56), przeto w wielu przypadkach zadawalniamy się tą dokładnością i używamy ciężarów do wymierzania sił. Układ miar, w którym jednostkę sił stanowi ciężar pewnej masy, nazywa się układem ciężarowym. W dalszym wykładzie będziemy nieraz używali ciężarowego układu miar; podajemy przeto zestawienie najważniejszych jednostek, należących do tego układu.

Dla długości czasu, prędkości i przyśpieszenia pozostają dawne jednostki: *cm*, *sek*, *cm/sek*, *cm/sek*^{2}.

Jako ciężarową jednostkę siły przyjmiemy ciężar grama (w próżni $= 981$ *dyn*). Wyraz »gram« użyty jest tu w odmiennem od dotychczasowego znaczenia; dotąd odznaczał jednostkę masy, w układzie ciężarowym jest nazwą jednostki siły. Aby uniknąć dwuznaczności będziemy, ile możności, używali wyrażenia »ciężar grama«, ilekroć będzie chodziło o nazwanie siły; w piśmie oznaczać będziemy przez wyraz »*gr*« masę, zaś przez »*Gr*» ciężar grama, przyjęty tu za jednostkę siły. Podobnie odróżniać będziemy znaki innych wag: *kg* i *Kg*, *mgr* i *Mgr* i t. p.

Ażeby zasadniczy wzór dynamiki (ust. 39): $P = \frac{mv}{t}$ był prawdziwy także w zastosowaniu do ciężarowego układu miar, należy określić jednostkę mas w taki sposób, żeby dla $P = 1$, $v = 1$ i $t = 1$ było $m = 1$.

Jednostką mas będzie więc ta masa, która pod wpływem siły 1 *Gr* t. j. pod wpływem ciężaru grama nabywa w przeciągu 1 *sek* prędkości 1 *cm/sek*. Będzie to widocznie masa 981 *gr*. Skoro bowiem masa 1 *gr* nabywa pod wpływem siły 1 *Gr*, (t. j. pod wpływem własnego ciężaru) prędkości 981, przeto masa 981 razy większa uzyska w tymże czasie prędkość 981 mniejszą, t. j. 1 *cm/sek*; jednostką mas w układzie ciężarowym jest więc masa 981 cm^3 wody w temp. 4°. Wskutek tego wyboru znane wyrażenie ciężaru $P = mg$, albo masy $m = \frac{P}{g}$ pozostaje ważnem także w ciężarowym układzie miar; istotnie, ciężar jednostki masy wynosi 981 *Gr*. Ciało ważące 10 *Kg* posiada masę $^{10000}/_{981}$ jednostek ciężarowych i t. p. Zgodnie z tem wypada przyjąć jako jednostkę pędu: (981 *gr*) *cm/sek*. Jednostką popędu siły będzie: *Gr. sek*.

Zadania.

115) Przyjąwszy, że ziemia jest kulą o promieniu 6 370 000 *m*, obliczyć kąt między pionami w dwu miejscach, odległych od siebie o 10 *m*. *Odp.* 0·324″.

116) Ile waży jeden kilogram u nas, na słońcu i na księżycu? *Odp.* 981 000, 27 120 000, 185 900 dyn.

117) Znaleźć masę ciała, którego ciężar wynosi u nas 10 000 dyn? *Odp.* 10 *gr* 194 *mgr*.

118) Waga sprężynowa wydłuża się proporcyonalnie do natężenia siły, działającej na nią; w pewnej wadze siła 50 000 dyn przedłuża sprężynę o 5 *cm*. Znaleźć wydłużenie, sprawione ciężarem masy 20 *gr*, na równiku i biegunie ziemi. *Odp.* 1·956 i 1·966 *cm*.

119) Podobna waga, mająca jednak czulszą sprężynę, obciążona 20 gramami, wydłuża się o 4 *cm*; ile wynosić będzie wydłużenie sprężyny, jeżeli poruszać będziemy wagę pionowo do góry, z przyśpieszeniem 490·5 cm/sek^2; następnie na dół z temże przyśpieszeniem? *Odp.* 6 *cm*, 2 *cm*.

120) Na przyrządzie Atwooda zawiesiliśmy z jednej strony 50, z drugiej 51 *gr*; obliczyć przyśpieszenie ruchu ciężarka spadającego,

drogę przebytą w ciągu 3-ch *sek* i prędkość nabytą po upływie tego czasu. *Odp.* 9·713 *cm/sek*², 43·71 *cm* i 29·14 *cm/sek.*

121) Na tym przyrządzie wisi z jednej strony masa 100 *gr*, z drugiej lekka sprężyna obciążona 90 gramami; znaleźć wydłużenie sprężyny podczas spadania, wiedząc, że sprężyna nieruchoma, obciążona ciężarem 15 *Gr*, wydłuża się o 2 *mm. Odp.* Wydłużenie 12·7 *mm.*

122) Znaleźć siłę potrzebną do utrzymania ciała (ciężar P) na gładkiej płaszczyznie pochyłej, jeżeli ta siła równoważąca działa w kierunku poziomym. *Odp.* $P \operatorname{tg} \alpha$.

123) Jakiej siły pociągowej (x) potrzeba, aby wyciągnąć wóz ważący 5 ton (P) na drodze mającej spad 1 : 10 (nie licząc oporów tarcia i t. p.)? *Odp.* $x : P = 1 : \sqrt{101}$.

124) Jakie jest przyśpieszenie ruchu ciała zsuwającego się (bez tarcia) po płaszczyznie pochylonej do poziomu pod kątem 20°? *Odp.* 335·5 *cm/sek*².

125) Rzucamy ciało do góry, wzdłuż gładkiej płaszczyzny, pochylonej do poziomu pod kątem 15°, dając mu początkową prędkość 10 *m/sek;* znaleźć długość drogi przebytej i prędkość po upływie 3 *sek. Odp.* 18·57 *m;* 2·383 *m/sek.*

126) Znaleźć wysokość, do której ciało powyższe dobiegnie, nad poziomem, z którego zostało rzucone. *Odp.* 5·096 *m* $\left(= \frac{v_0^2}{2g}\right)$.

127) Ciało spada po obwodzie pionowego koła (promień r), wychodząc z końca poziomej średnicy, bez prędkości początkowej; znaleźć prędkość w najniższym punkcie koła. *Odp.* $\sqrt{2g \cdot r}$.

128) Jak daleko dobiegnie ono po przeciwnej stronie, mając taką prędkość u spodu. *Odp.* Do drugiego końca poziomej średnicy.

129) Ile wynosi w układzie ciężarowym siła 5×10^6 dyn. *Odp.* 5097 *Gr* = 5·097 *Kg.*

130) Ile wynosi w układzie ciężarowym masa 10 *kg? Odp.* 10·194 jednostek ciężarowych.

131) Znaleźć przyśpieszenie, wywołane w ciele, którego masa wynosi 12 jednostek ciężarowych, działaniem siły 20 *Gr.*

Odp. 1·67 *cm/sek*².

132) Jaką prędkość wytworzy siła 100 *Gr*, działając przez 5 *sek* na ciało ważące 50 *gr? Odp.* $2 \times 981 \times 5$ *cm/sek.*

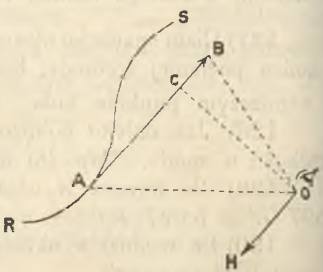
133) Kamień ważący 2 *kg* obracamy na sznurku o długości 30 *cm* po obwodzie pionowego koła, z taką prędkością, żeby w punkcie najwyższym koła sznurek był tylko wyprostowany, ale nie napięty; znaleźć prędkość v_1 kamienia w najwyższym punkcie koła, prędkość v_2 w najniższym i napięcie F sznurka w tem drugiem położeniu. *Odp.* Siła odśrodkowa $= \frac{2000 v_1^2}{30} = 2000 \times 981$; $v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2 \times 981 \times 60}$ (ust. 63);

$$F = 2000 \times 981 + \frac{2000 \times v_2^2}{30} \text{ dyn} = 2000 + \frac{2000 \times v_2^2}{30 \times 981} \text{ Gramów.}$$

ROZDZIAŁ IV.

O momentach.

66. Moment ruchu względem punktu stałego. W rozdziale niniejszym zastanawiać się będziemy nad siłami, o ile one sprawiają ruch obrotowy ciał. Jeżeli chodzi tylko o opisanie ruchu obrotowego jakiego ciała, w pewnej chwili, wtenczas dość jest znać prędkość kątową obrotu, tudzież kierunek i położenie osi, albo punktu, około którego ciało obraca się albo kręci. W dynamice jednakowoż (gdy chodzi o poznanie sił sprawiających obrót) znajomość prędkości kątowej i osi obrotu nie jest jeszcze wystarczającą; potrzeba nadto znać wielkość i rozmieszczenie masy. Ze stanowiska dynamiki uważamy, nie samą prędkość, lecz pęd ciał, czyli ilość ruchu, jako miarę ruchu postępowego; podobną miarę dla ruchów obrotowych znajdziemy w t. zw. momentach ruchu (łać. momentum, od movimentum, movere = poruszać, oznacza ważność, potęgę, czyli doniosłość obrotu). Nazwą momentów określamy wogóle iloczyny utworzone z rozmaitych wielkości n. p. z mas, pędów, sił i z pewnych odległości, bądź to od stałego punktu, bądź też od prostej lub płaszczyzny. Momentem ruchu nazywamy w szczególności iloczyn z ilości ruchu, czyli pędu, przez odległość od punktu lub osi.



Ryc. 53.

Niechaj A oznacza (ryc. 53) położenie jakiej masy m, poruszającej się w kierunku AB (wzdłuż toru RS niekoniecznie kolistego) i mającej w tem miejscu prędkość v; O oznacza pewien stały, dowolnie obrany punkt. Wykreślmy prostą AB, wyobrażającą co do kierunku i wielkości pęd $= mv$ ciała; wykreślmy z O prostopadłą OC do tej prostej. *Iloczyn z pędu i długości prostopadłej, wykreślonej ze stałego punktu do prostej, wyobrażającej pęd, t. j. iloczyn* $mv \times OC$, *nazywa się momentem ruchu masy, względem punktu stałego* O.

Wielkość określona w ten sposób równa się widocznie podwójnemu polu trójkąta, którego podstawą jest odcinek AB wyobrażający pęd, wierzchołkiem punkt stały.

67. Kierunek momentu ruchu. Wykreślmy z punktu O odcinek prosty OH, (ryc. 53) mający taką długość, żeby przedstawiał wartość momentu ruchu (według pewnej umówionej podziałki); dajmy mu kierunek prostopadły do płaszczyzny trójkąta, o którym była dopiero co mowa, t. j. do płaszczyzny przechodzącej przez O i AB. Wykreślmy go w tę stronę, (jak wskazuje strzałka kierunkowa), żeby ruch masy A około punktu O przedstawiał się oku, będącemu w O, a patrzącemu w stronę wskazaną przez strzałkę, w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegarowych (od lewej, górą, ku prawej ręce). Taki odcinek kierunkowy OH[1]) określa zupełnie wielkość i kierunek momentu ruchu. Zaliczymy momenty ruchu do rzędu wielkości kierunkowych (wektorów) i będziemy je wyobrażali wykreślnie, podług podanej tu reguły.

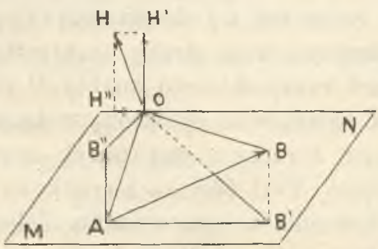
Przykład. Na płaszczyznie poziomej krąży masa 5 *gr*, po kole o promieniu 7 *cm*, z prędkością 40 *cm/sek*, od południa przez wschód, północ ku zachodowi, znaleźć moment ruchu tej masy względem środka koła. *Odp.* Jest on zwrócony pionowo do góry i wynosi stale 1400 *gr . cm/sek . cm* . = 1400 *gr cm²/sek.*

68. Składanie i rozkładanie momentów ruchu. Prosta AB (ryc. 54) wyobraża pęd masy znajdującej się w A; pole trójkąta ABO równe jest połowie momentu ruchu tej masy względem punktu O; nakoniec odcinek OH, prostopadły do AOB, wyobraża, stosownie do umowy (ust. 67) wielkość i kierunek tego momentu. Rozłóżmy pęd AB na dwie składowe: jednę AB', równoległą do pewnej płaszczyzny MN, drugą AB'', prostopadłą do niej. Pola trój-

---

[1]) Rysunek na ryc. 53-ej jest perspektywiczny. Należy wyobrazić sobie, że AB leży w płaszczyznie papieru, a OH skierowane jest od patrzącego z O naprzód, t. j. ku nam.

kątów AOB' i AOB'' równają się połowom momentów tych ruchów składowych. Wykreślmy odcinki OH' i OH'', wyobrażające wielkości i kierunki tych momentów, t. j. wykreślmy OH' prostopadle do MN i odetnijmy odcinek OH' równy podwójnemu polu AOB'; podobnie OH'' jest prostopadłe do AOB'' i równe podwójnemu polu AOB''. Ponieważ pole AOB', jako rzut na MN pola AOB, równa się iloczynowi AOB przez dostawę kąta zawartego między płaszczyznami AOB i MN, albo, co na jedno wychodzi, kąta HOH', przeto będzie także $OH' = OH \times$ dost. kąta HOH'; znaczy to, że odcinek OH' jest składową odcinka OH, w kierunku prostopadłym do AOB'. Podobnie OH'' jest składową odcinka OH, prostopadłą do AOB''. Z tego wynika, *że wypadkowa momentów* (OH' i OH'' *dwu ruchów* (AB' i AB''), *jest równa momentowi* (OH) *ruchu wypadkowego* (AB).

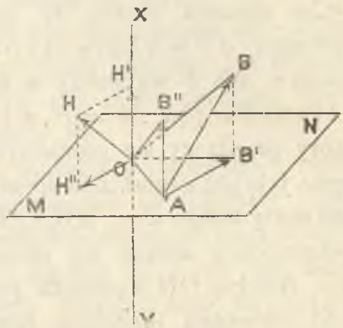


Ryc. 54.

Innemi słowy: momenty ruchu, wyobrażone przez odcinki kierunkowe, dodają się, podobnie jak inne wektory, podług reguły geometrycznego dodawania.

69. Moment ruchu względem osi. Obok momentów ruchu względem punktu stałego, uważać będziemy momenty względem stałej prostej, czyli osi. Określenie tych momentów jest następujące. Wyobraźmy sobie płaszczyznę (MN, ryc. 55). wykreśloną prostopadle do prostej czyli osi, (XY), około której porusza się pewna masa. Pomyślmy dalej, że na ową płaszczyznę padają promienie światła równoległe do osi; one rzucają na płaszczyznę cień osi, przedstawiający się jako jeden punkt O. Otóż przez moment ruchu masy względem osi rozumiemy moment tego ruchu, który przedstawia się na cieniu, względem punktu, w którym znajduje się cień osi, przyczem należy wyobrazić sobie, że ruch cienia wykonywa masa równa danej.

Z tego określenia wynika, że, obliczając moment ruchu względem osi, nie troszczymy się wcale o składową ruchu równoległą do osi, a zwracamy jedynie uwagę na składową ruchu prostopadłą do niej, wskutek której ciało tę oś okrąża. Niechaj XY wyobraża oś, A położenie masy, AB jej pęd. Kładziemy naprzód przez A płaszczyznę MN prostopadłą do osi, przecinającą oś w najbliższym punkcie O. Rozkładamy następnie AB na składową AB'' równoległą do osi i na AB' równoległą do MN, zatem prostopadłą do osi. Odcinki OH'' i OH' wyobrażają momenty tych składowych względem punktu O; są to, jak wiemy (ust. 68), składowe odcinka OH, który wyobraża moment ruchu AB względem O. Otóż: odcinek OH' leżący na osi, a należący do składowej AB', nazywa się momentem danego ruchu AB, względem osi XY. Moment ruchu względem osi równa się tedy *iloczynowi prostopadłej do osi składowej pędu, przez jej odległość od osi.*



Ryc. 55.

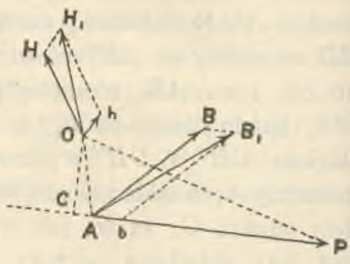
70. Wypadkowy moment ruchu kilku mas. Jeżeli w sąsiedztwie punktu wybranego jako punkt stały, porusza się jednocześnie kilka mas, których momenty ruchu (wyobrażone przez odcinki kierunkowe, wychodzące z O) są: H_1, H_2, H_3, i t. d. natenczas wypadkowym momentem ruchu całego zbioru mas nazywamy sumę geometryczną:

$$\overline{H} = \overline{H}_1 + \overline{H}_2 + \overline{H}_3 + \text{i t. d.}$$

t. j. wypadkową momentów ruchu wszystkich mas.

Wypadkowy moment ruchu kilku mas względem osi oblicza się przez utworzenie sumy algebraicznej wszystkich momentów, albowiem w tym razie odcinki, wyobrażające momenty mas, leżą na jednej prostej (na osi).

71. Zmiana momentu ruchu pod wpływem siły. Dopóki masa porusza się jednostajnie, po linii prostej — na mocy bezwładności swej — dopóty nie zmienia się wcale jej moment ruchu, liczony względem jakiegoś stałego punktu O. W tym razie bowiem nie zmienia się ani pęd masy, ani odległość linii ruchu od punktu O. Jeżeli jednak masa A (ryc. 56), poruszająca się w pewnej chwili w kierunku jakimkolwiek AB, poddana zostanie działaniu siły $AP = P$, wówczas zmieniać się będzie pęd jej, a zatem także moment ruchu. W przeciągu pewnego dowolnie krótkiego czasu τ, siła P wytworzy w własnym kierunku pęd $Ab = P . \tau$ (ust. 42), który przyłączy się geometrycznie do pędu, jaki już istniał. Z końcem czasu τ pęd masy będzie więc: $\overline{AB_1} = \overline{AB} + \overline{Ab}$. Jednocześnie zmieni się moment ruchu. Niechaj OH wyobraża jego wartość pierwotną (liczebnie równą podwójnemu polu trójkąta AOB); odcinek Oh zaś niechaj wyobraża, w podobny sposób, moment pędu Ab, wytworzonego w ciągu czasu τ, działaniem siły P[1]). Z końcem tego czasu zmieniony moment ruchu będzie (według ust. 68):



Ryc. 56.

$$\overline{OH_1} = \overline{OH} + \overline{Oh}.$$

Otóż Oh równa się liczebnie iloczynowi z Ab, czyli $P . \tau$, przez prostopadłą odległość OC linii AP od O, t. j.

$$Oh = P . \tau \times OC\ ^{2});$$

co do kierunku zaś, Oh jest prostopadłe do płaszczyzny AOP. Podzieliwszy ostatnie równanie przez czas τ znajdziemy:

$$\frac{Oh}{\tau} = P \times OC.$$

---

[1]) Ryc. 56 wyobraża te odcinki rysunkiem perspektywicznym. Jeżeli AB i Ab leżą w płaszczyznie papieru, to należy wyobrazić sobie, że O leży w głębi, OH zaś i Oh są prostopadłe do płaszczyzn OAB i OAb.

[2]) Ściśle biorąc odległość OC skróci się o pewne nieskończenie małe δ wskutek przesunięcia, jakiego doznał punkt A w ciągu czasu τ. Popełniamy więc tutaj błąd $= P . \tau . \delta$, który atoli jest nieskończenie mały w porównaniu z obliczanem Oh.

Oh jest zmianą momentu ruchu w przeciągu czasu τ; $\frac{Oh}{\tau}$ oznacza przeto zmianę momentu ruchu, przypadającą na jednostkę czasu. Iloczyn $P \times OC$ oznacza wielkość, utworzoną z siły w taki sam sposób, jak moment ruchu tworzy się z pędu; jest to mianowicie iloczyn z natężenia siły przez długość prostopadłej, wykreślonej z punktu O do jej linii działania. Wielkość ta, zwana »momentem siły względem punktu O«, może być wyobrażona na rysunku przez odcinek kierunkowy, w sposób zupełnie podobny jak moment ruchu. Odcinek, wyobrażający moment siły AP, wychodzi także z punktu O i jest równoległy do odcinka Oh.

Na zasadzie ostatniego równania możemy wypowiedzieć twierdzenie, że *zmiana momentu ruchu, przypadająca na jednostkę czasu, równa się, co do wielkości i kierunku, momentowi siły działającej na masę.*

Moment siły względem osi tworzy się z siły tak samo, jak moment ruchu względem osi z pędu. Wskutek tego, twierdzenie ostatnie jest ważne zarówno dla momentów obliczanych względem stałego punktu, jakoteż względem stałej osi. W drugim przypadku uwzględniamy tylko składowe prostopadłe do osi, zarówno ruchu, jak siły.

72. Moment siły. 1) Momentem siły względem jakiegokolwiek punktu stałego nazwaliśmy iloczyn z natężenia siły przez długość prostopadłej, wykreślonej z tego punktu do linii, wzdłuż której siła działa. Moment siły uważamy jako wielkość kierunkową i wyobrażamy go na rysunku zupełnie podobnie jak momenty ruchu. Ryc. 53, zapomocą której objaśnialiśmy moment ruchu, może nam również uzmysłowić moment siły. Odcinek AB wyobrażać będzie wówczas siłę, odcinek $OH = AB \times OC$ jej moment względem O. Kierunek tego odcinka określamy tak samo, jak momentu ruchu; kierunek jego jest taki, że ruch, który siła może wywołać, przedstawia się oku umieszczonemu w punkcie stałym, a patrzącemu w stronę wskazaną przez odcinek, w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegarowych.

2) Moment siły wypadkowej AB (ryc. 54), której składowemi są siły AB', AB''..., równa się wypadkowej momentów tych składowych; momenty sił dodają się podług reguły dodawania geometrycznego. Uzasadnia się to tak samo, jak odpowiednie twierdzenie w ust. 68.

3) Mając obliczyć moment siły AB względem prostej (osi XY ryc. 55), rozkładamy siłę na dwie składowe, równoległą i prostopadłą do osi i tworzymy iloczyn ze składowej prostopadłej, przez odległość jej od osi. Uwzględniamy więc tylko tę składową siły, która może sprawić krążenie, albo obrót około osi, pomijamy zaś składową, która przesuwa ciało równolegle do niej.

4) Momentem wypadkowym kilku sił P_1, P_2, P_3..., działających w rozmaitych miejscach względem stałego punktu O, nazywamy sumę geometryczną momentów M_1, M_2, M_3... tych sił, wykreślonych z tego samego punktu stałego, t. j.

$$\overline{M} = \overline{M_1} + \overline{M_2} + \overline{M_3} + \ldots$$

Moment wypadkowy kilku sił względem osi oblicza się, tworząc sumę algebraiczną momentów wszystkich sił względem tej osi; liczy się przytem jako dodatnie momenty tych sił, które obracają, albo usiłują obracać, w kierunku obranym za dodatni; momenty, obracające w przeciwną stronę, uważamy jako ujemne.

73. Zmiana wypadkowego momentu ruchu. Zmiana momentu ruchu jakiej masy, przypadająca na jednostkę czasu, równa się momentowi siły działającej na masę (ust. 71). Wypadkowy moment ruchu kilku punktów materyalnych jest sumą geometryczną ich momentów ruchu. Ponieważ suma ta zmienia się o tyleż, ile wynosi suma zmian jej składników, przeto: *zmiana wypadkowego momentu ruchu jakiegokolwiek układu materyalnego, przypadająca na jednostkę czasu, równa się wypadkowemu momentowi sił, działających na układ.* [Będzie rzeczą korzystną rozróżnić między siłami, siły zewnętrzne, wywierane na układ przez ciała nie należące do niego, od sił wewnętrznych, jakie ciało albo punkty materyalne stanowiące układ wywierają na siebie nawzajem. Jeżeli przyjmiemy, że te ostatnie działają wzdłuż prostych, łączących te punkty (ciała) parami, wówczas momenty ich nie będą miały żadnego udziału w wypadkowym momencie sił. Według zasady reakcyi siły te są bowiem parami równe sobie, a skierowane przeciwnie; momenty ich przeto znoszą się również, gdyż są równe i obracają w strony przeciwne]. Zmiana wypadkowego momentu ruchu układu materyalnego *zależy zatem tylko od sił zewnętrznych.*

74 Moment ruchu bryły obracającej się około osi. Ryc. 57 wyobraża bryłę sztywną jakąkolwiek, obracającą się około osi XY, z prędkością kątową $\bar{\omega}$. Uważać będziemy to ciało jako zbiór cząstek m_1, m_2, m_3 i t. d. tak małych, żeby było można uważać je jako punkty materyalne.

Wszystkie te cząstki poruszają się jednocześnie po kołach, których płaszczyzny są prostopadłe do osi obrotu. Mając obliczyć wypadkowy moment ruchu całego ciała, zwróćmy naprzód uwagę n. p. na cząstkę m_1, znajdującą się w odległości r_1 od osi. Prędkość jej, w ruchu na kole o promieniu r_1, wynosi $r_1\bar{\omega}$; pęd $= m_1 r_1 \bar{\omega}$; nakoniec moment ruchu (pęd jest tu prostopadły do osi, styczny do koła o promieniu r_1) wynosi $m_1 r_1^2 \bar{\omega}$. W podobny sposób znajdziemy momenty ruchu innych cząstek: $m_2 r_2^2 \bar{\omega}$, $m_3 r_3^2 \bar{\omega}$ i t. d. Ponieważ wszystkie te momenty mają ten sam kierunek, gdyż są równoległe do osi obrotu, przeto wypadkowy moment ruchu H całego ciała będzie:

Ryc. 57.

$$H = \bar{\omega}(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \text{i t. d.}$$

albo, jeżeli rzeczywiste sumowanie wyrazów w nawiasie zastąpimy dla krótkości znakiem sumowym:

$$H = \bar{\omega} \Sigma m r^2.$$

Suma, którą oznaczyliśmy tu w skróceniu przez $\Sigma m r^2$, a którą oznaczać będziemy nadal przez B, zależy od wielkości mas poszczególnych cząstek i od rozmieszczenia ich w stosunku do osi obrotu; nie zależy zaś wcale od ruchu, t. j. od prędkości obrotu; sumę tę nazywamy m o m e n t e m b e z w ł a d n o ś c i danej bryły względem osi XY. *Moment ruchu ciała stałego, obracającego się koło osi, równa się iloczynowi z prędkości kątowej przez moment bezwładności:* $H = \bar{\omega} B$.

75. Moment bezwładności. *Moment bezwładności bryły stałej, względem pewnej osi, oblicza się, dzieląc bryłę w myśli na bardzo małe cząstki i tworząc sumę iloczynów z mas tych cząstek przez kwadraty odległości ich od osi:*

$$B = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \text{i t. d.}$$

albo krócej:

$$B = \Sigma m r^2.$$

Moment bezwładności, prędkość kątowa, moment ruchu i moment siły mają podobne znaczenie w ruchu obrotowym, jak masa prędkość zwyczajna, pęd i siła w postępowym; uwydatnia to następujące zestawienie:

Pęd = masa × prędkość; moment ruchu = moment bezwładności × prędkość kątowa.

Zmiana pędu = siła × czas; zmiana momentu ruchu = moment siły × czas.

Jednostką momentów bezwładności w układzie bezwzględnym miar jest gram-centymetr kwadratowy ($gr\, cm^2$), albowiem moment bezwładności jest sumą iloczynów z mas przez kwadraty długości.

Moment bezwładności można również określić w następujący sposób. Wyobraźmy sobie punkt, w którymby była skupiona masa m całej bryły: $m = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots$ Jeżeli punkt ten obracać będziemy około osi, po kole o promieniu $= k$, z tą samą prędkością kątową $\tilde{\omega}$, z jaką obraca się bryła, wówczas moment ruchu takiego punktu będzie równy momentowi ruchu bryły, skoro bierzemy k w taki sposób, żeby było:

$$B = m \,.\, k^2.$$

Ta odległość k osi, w której cała masa, skupiona w jednym punkcie miałaby moment bezwładności równoważny danemu, nazywa się ramieniem bezwładności bryły względem uważanej osi.

Znając moment bezwładności B i masę m ciała, oblicza się ramię bezwładności z równania:

$$k = \sqrt{\frac{B}{m}}.$$

Nawzajem, znając ramiona bezwładności pewnego ciała względem różnych osi i masę jego, znamy zarazem momenty bezwładności względem tych osi.

Kwadrat ramienia bezwładności (k) jakiejkolwiek bryły względem dowolnej osi równa się sumie dwu kwadratów: kwadratu ramienia bezwładności (k_0) względem osi równoległej, przechodzącej przez środek masy i kwadratu odległości (f) obu tych osi:

$$k^2 = k_0^2 + f^2. \tag{1}$$

Dowód. Niechaj S oznacza (ryc. 58) oś, przechodzącą przez środek masy jakiej bryły; O jakąbądź inną oś, równoległą do tamtej (obie przedstawione są na rysunku w widoku z góry, jako punkty); oznaczmy nadto przez r odległość pewnej cząstki m od osi O; przez ϱ jej odległość od osi S; przez B_0 moment bezwładności danej bryły względem osi S; przez B jej moment bezwładności względem osi O i nakoniec $SO = f$. Mamy wówczas:

$$B = \Sigma m r^2, \quad B_0 = \Sigma m \varrho^2.$$

W trójkącie SOm mamy:

$$r^2 = f^2 + \varrho^2 - 2 f \varrho \cos(f\varrho);$$

$(f\varrho)$ oznacza tu kąt między liniami SO i Sm. Podstawiwszy to w B znajdziemy:

$$B = \Sigma m [f^2 + \varrho^2 - 2 f \varrho \cos(f\varrho)] =$$
$$= f^2 \Sigma m + \Sigma m \varrho^2 - 2 f \Sigma m \varrho \cos(f\varrho).$$

Iloczyn $\varrho \cos(f . \varrho)$ ($= mn$, ryc. 58) oznacza atoli odległość cząstki m od płaszczyzny przechodzącej przez środek masy, a prostopadłej do f. Podług ust. 51, jest zawsze $\Sigma m \varrho \cos(f\varrho) = 0$, albowiem suma ta równa się iloczynowi masy ciała przez odległość x środka masy od płaszczyzny Sn (która to odległość jest tutaj zerem). Zważywszy wreszcie, że Σm oznacza całkowitą masę ciała $= m$, mamy:

Ryc. 58.

$$B = B_0 + f^2 m,$$

podzieliwszy przez m, znajdziemy równanie (1).

Obliczenie momentów, albo ramion bezwładności, można uskutecznić za pomocą reguł wyższej matematyki, jeżeli postać ciała jest prosta, a rozmieszczenie materyi we wnętrzu ciała znane. Dzięki dowiedzionej wyżej własności, dość jest znać momenty bezwładności tylko względem osi, przechodzących przez środek masy. Jeżeli kształt ciała jest nieregularny albo rozmieszczenie materyi we wnętrzu nieznane, wtenczas obliczenie momentu bezwładności nie jest możliwe. Wszelako można zawsze tę wielkość wymierzyć doświadczalnie; sposób wykonania takiego pomiaru poznamy, gdy będzie mowa o ruchu wahadeł.

Przytoczymy tu, bez dowodu, kilka wzorów, wyrażających ramiona bezwładności niektórych brył prostszej postaci; odnoszą się one do ciał jednolitych, mających wszędzie tę samą gęstość.

1) *Kula*, promień $= r$, oś przez środek:

$$k^2 = {}^2/_5\, r^2. \qquad k = \frac{r}{5}\sqrt{10} = 0\cdot632455\, r.$$

2) *Równoległościan prostokątny*; długość $= a$, szerokość $= b$, wysokość $= c$; oś przez środek, równoległa do krawędzi c, t. j. do wysokości:

$$k^2 = {}^1/_{12}\,(a^2 + b^2).$$

3) *Walec* prosty kolisty; promień podstaw $= r$, wysokość $= l$, oś przez środki podstaw (podłużna):

$$k = \tfrac{1}{2} r^2;$$

oś przez środek masy, prostopadła do wysokości (poprzeczna):

$$k^2 = \frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{12}.$$

Przykład obliczenia momentu bezwładności. Obliczyć moment bezwładności pręta bardzo cienkiego, o masie m i długości l, względem osi przechodzącej przez jeden z końców a prostopadłej do pręta. Podzielmy pręt w myśli na nader wielką liczbę n części, o równych długościach $\frac{l}{n} = \xi$, o masach równych $\mu = \frac{m}{n}$. Zważywszy na małość odcinków ξ, możemy wyrazić moment bezwładności, jak następuje:

$$B = \mu\xi^2 + \mu(2\xi)^2 + \ldots + \mu(n\xi)^2$$
$$= \mu\xi^2(1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) = \mu\xi^2 \Sigma n^2.$$

Ponieważ, jak łatwo wprost sprawdzić, $n^2 = \frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{3}n^3 - n - \frac{1}{3}$, przeto, podstawiając za n kolejno: 1, 2, ... n, otrzymamy szereg równań:

$$1^2 = \tfrac{1}{3}(2)^3 - \tfrac{1}{3}(1)^3 - 1 - \tfrac{1}{3},$$

$$2^2 = \tfrac{1}{3}(3)^3 - \tfrac{1}{3}(2)^3 - 2 - \tfrac{1}{3},$$

. . . .

$$n^2 = \tfrac{1}{3}(n+1)^3 - \tfrac{1}{3}(n)^3 - n - \tfrac{1}{3}.$$

których suma wynosi: $\Sigma n^2 = \frac{1}{3}(n+1)^3 - \Sigma n - (n+1)\frac{1}{3}$; nadto wiadomo, że suma postępu arytmetycznego: Σn wynosi $\frac{1}{2} n (n+1)$. Jeżeli n jest liczbą bardzo wielką, wtenczas wobec n^3 można opuścić niższe potęgi; wartość sumy kwadratów: Σn^2 wynosi więc w przybliżeniu $\frac{(n+1)^3}{3}$, albo, w tem samem przybliżeniu $\frac{n^3}{3}$. Biorąc coraz większe n, można to przybliżenie zbliżać bez granic do dokładności. Wówczas znajdziemy: $B = \mu\xi^2 \frac{n^3}{3}$, albo pisząc znowu $\xi = \frac{l}{n}$, $\mu = \frac{m}{n}$:

$$B = \tfrac{1}{3} ml^2.$$

To samo wypada z podanego wyżej wzoru dla walca, gdy położymy $r = o$.

Zadania.

134) Obliczyć moment ruchu masy 25 *gr*, poruszającej się jednostajnie po linii prostej, z prędkością 20 *cm/sek*, względem punktu leżącego w odległości 30 *cm* od prostej. *Odp.* $25 \times 20 \times 30$ *gr* cm^2/sek.

135) Dowieść, że moment ruchu planety, poruszającej się około słońca po elipsie, liczony względem słońca, jest stały. *Odp.* Z drugiego prawa Kepplera wyprowadziliśmy (ust. 20), że $v = \frac{2h}{SC}$ (ryc. 11), gdzie SC oznacza prostopadłą odległość linii ruchu od słońca; zatem moment ruchu $= mv \,.\, SC = 2mh =$ stała.

136) Na koniec korby, mającej 50 *cm* długości, działa siła prostopadła do korby, wynosząca 5 *Kg*; obliczyć moment tej siły względem osi korby. *Odp.* 5×50 *Kg cm.*

137) Ile wynosi ten moment w układzie bezwzględnym miar? *Odp.* $5 \times 50 \times 1000 \times 981$ *dyn cm.*

138) Na drążek poziomy, obracalny około osi poziomej, przechodzącej przez jego środek a prostopadłej do drążka, działają następujące siły; na prawe ramię: w odstępie 5 *cm* od osi, pionowo na dół, 12 *Gr*; w odstępie 8 *cm*, na dół, 20 *Gr*; w odstępie 15 *cm*, do góry, 10 *Gr*; na lewe ramię: w odstępie 10 *cm*, na dół, 18 *Gr*; w odstępie 20 *cm*, do góry, 3 *Gr*; obliczyć moment wypadkowy tych sił względem osi. *Odp.* $5 \times 12 + 8 \times 20 - 15 \times 10 - 10 \times 18 + 20 \times 3 = -50$, t. j. 50 *Gr cm,* z obrotem na lewo.

139) Jednolita kula, o promieniu 3 *cm*, ważąca $1\frac{1}{2}$ *kg*, obraca się około średnicy, 4 razy na sekundę; ile wynosi moment ruchu?
Odp. $4 \times 2\pi \times 1500 \times {}^2/_5 \times 9 = 135720$ *gr* cm^2/sek.

140) Ile wynosi moment bezwładności kuli o masie m, o promieniu r, względem linii stycznej do powierzchni. *Odp.* $\frac{7}{5} mr^2$.

141) Obliczyć moment bezwładności walca prostego, kolistego, mającego promień 2 *cm*, ważącego 200 *gr*, względem jednej z krawędzi.
Odp. $\frac{3}{2} mr^2 = 1200$ *gr* cm^2.

142) Na końcach lekkiego drążka osadzone są kule o jednakowych masach (m) i promieniach (r); odległość środków kul wynosi $2d$. Obliczyć moment bezwładności, względem osi prostopadłej do drążka, przechodzącej przez jego środek. *Odp.* $2[{}^2/_5 r^2 + d^2]m$.

76. Zachowanie momentu ruchu. Powiedzieliśmy w ust. 73, że w układzie ciał podlegającym działaniu zewnętrznych i wewnętrznych sił, te ostatnie nie wchodzą wcale w rachubę przy obliczaniu wypadkowego momentu wszystkich sił względem jakiegokolwiek punktu stałego. Na mocy bowiem zasady akcyi i reakcyi momenty ich znoszą się wzajemnie.

Wypadkowy moment sił jest atoli miarą i warunkiem zmienności wypadkowego momentu ruchu (ust. 71, 73). Jeżeli tedy układ jest zupełnie swobodny, t. j. jeżeli nie ma żadnych zewnętrznych sił, ani poruszających, ani opierających się (jak tarcie o zewnętrzne ciała i t. p.) wówczas wypadkowy moment ruchu nie będzie wcale się zmieniał, ani co do wielkości, ani co do kierunku. *Każde ciało, albo układ ciał* (czy to stałych czy płynnych, lub gazowych), *podlegający tylko wewnętrznym siłom, zachowuje stały i niezmienny moment ruchu.*

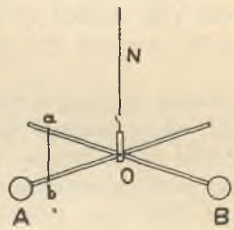
Siły wewnętrzne nie mogą tedy ani poruszyć środka masy układu (ust. 52), ani też zmienić momentu jego ruchu.

Ważna ta zasada tłumaczy dlaczego n. p. kula ziemska obraca się ze stałą prędkością kątową około osi, a wypadkowy moment ruchu jej względem środka posiada stały kierunek. Kulę ziemską możemy bowiem uważać jako bryłę niezmienną, obracającą się w pustej przestrzeni, zatem wolną od wszelkich oporów (o nader powolnej zmianie kierunku osi będzie mowa w ust. 78). Siły wewnętrzne mogą sprawić znaczniejsze ruchy mas składających ziemię, mogą nawet zmienić jej postać, nie mają jednak wpływu na wypadkowy moment ruchu.

Jeżeli obliczymy wypadkowy moment ruchu wszystkich mas, stanowiących układ słoneczny, n. p. względem jego środka masy, to otrzymamy również wielkość niezmienną, albowiem masy te poruszają się pod wpływem wzajemnych przyciągań, które są względem całego układu siłami wewnętrznemi.

Moment ruchu zachowuje niezmienną wartość i kierunek stały nawet wtedy, gdy na masy działają siły zewnętrzne, byle wypadkowy moment tych sił zewnętrznych był równy zeru. Weźmy n. p. pod uwagę koło (jak na ryc. 31) osadzone na osi, wspartej na łożyskach, a obracające się z zupełną swobodą t. j. bez tarcia. Wiadomo, że bryła taka, wprowadzona w ruch obrotowy, obraca się jednostajnie przez dłuższy czas; obracałaby się bez końca, gdyby było można oswobodzić ją zupełnie od oporów zewnętrznych. Na cząstki koła działają w tym razie siły zewnętrzne, mianowicie ciężkość; jednakowoż, z powodu symetrycznego względem osi rozmieszczenia materyi, możemy do każdej dowolnej cząstki dobrać drugą, po przeciwnej stronie osi, którą ciężkość usiłuje obracać w przeciwną stronę; momenty ciężarów wszystkich cząstek względem osi znoszą się wzajemnie, a koło obraca się tak, jak gdyby ciężkości nie było wcale. Tarcie natomiast osi w łożyskach, tudzież tarcie o powietrze, stanowią siły zewnętrzne, których momenty nie znoszą się i dlatego po upływie pewnego czasu, zatrzymują ruch koła.

Dalsze przykłady. Połóżmy zegarek kieszonkowy na lekkim talerzyku (z kawałka kartonu) i zawieśmy talerzyk nakształt szalki wagowej, na dłuższej nitce, przytwierdzonej u góry do stosownego wieszadła. Talerzyk razem z zegarkiem pocznie niebawem drgać na prawo i lewo, naśladując ruchy wahadła sprężynowego, wahającego wewnątrz zegarka.

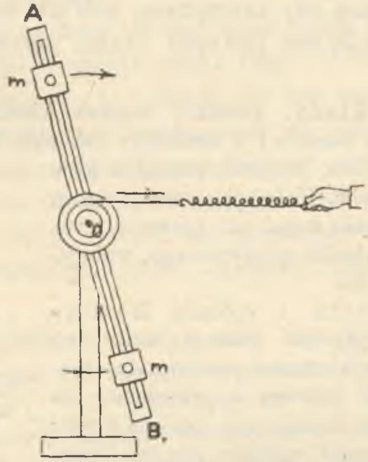


Ryc. 59.

Turbina Segnera i eolopila Herona obracają się pod wpływem reakcyi wody lub pary, wypływającej w kierunku przeciwnym obrotowi naczynia. Jeżeli bowiem w przyrządzie jakimkolwiek, który w całości nie posiada ruchu obrotowego, jedna część zacznie pod wpływem sił wewnętrznych, obracać się n. p. na prawo, wtenczas inne części muszą uzyskać obrót przeciwny; w ten sposób moment wypadkowy nie ulegnie zmianie.

Moment ruchu ciała stałego, obracającego się około osi, równa się iloczynowi momentu bezwładności przez prędkość kątową: $B\tilde{\omega}$. Gdyby z jakiegokolwiek powodu B zwiększyło się lub zmniejszyło, wtenczas na mocy prawa o zachowaniu momentu, $\tilde{\omega}$ musi również zmienić się, w taki sposób, żeby iloczyn $B\tilde{\omega}$ pozostał niezmieniony. Objaśnia to przyrząd na ryc. 59. Kule A i B osadzone są na końcach listewek, które mogą obracać się około zawiasu O; nitka ab trzyma kule w oddaleniu. Przyrząd zawiesza się na długiej, nieskręconej nici ON i wprowadza w obrót około tej nici. Podczas obrotu przepala się nitkę ab; kule spadają wówczas ku sobie, moment bezwładności zmniejsza się, a wskutek tego obrót ON staje się szybszy. — Gdyby (n. p. wskutek ostygania) objętość kuli ziemskiej zmniejszyła się, zmniejszyłby się także jej moment bezwładności, a prędkość kątowa obrotu dziennego powiększyłaby się. Przypuszcza się, z tego samego powodu, że obrót słońca około własnej osi był niegdyś powolniejszy.

77. Ruch obrotowy bryły stałej około osi. Bryła osadzona na osi i poddana działaniu siły, której moment względem osi obrotu nie jest zerem, poczyna obracać się; wskutek ciągłego działania momentu siły ruch ten staje się coraz szybszy. Można to okazać zapomocą przyrządu przedstawionego na ryc. 60. Na osi, opartej w stosownych łożyskach, osadzony jest zbiór krążków o różnych promieniach, tworzący jednę całość; do krążków przymocowane są dwie listwy *OA* i *OB*, do których można przytwierdzać, w różnych odległościach od osi, dwie jednakowe ciężkie masy *m* i *m*. Na obwód



Ryc. 60.

jednego z krążków nawijamy sznurek i ciągniemy drugi jego koniec za pośrednictwem sprężyny, która uwidocznia siłę *P*. Moment jej względem osi równa się iloczynowi *P* przez promień *r* wybranego krążka. Moment siły, zarówno jak moment bezwładności przyrządu, możemy zmieniać według upodobania, wybierając krążek o większym lub mniejszym promieniu, tudzież odsuwając masy *m* od osi, albo zbliżając je do niej.

Otóż, jeżeli ciągnąć będziemy sznurek stałem napięciem sprężyny, wtenczas siła *P* i moment jej $P \times r = M$ będą stałemi. Moment ruchu całego przyrządu powiększa się wówczas jednostajnie; przyrost jego bowiem, przypadający na jednostkę czasu, równa się momentowi siły (ust. 73) a zatem jest stały, tak samo jak moment siły. Jeżeli zważymy, że moment ruchu bryły stałej (ust. 74) $= \tilde{\omega} B$, moment zaś bezwładności B jest wielkością niezmienną, to zrozumiemy, że *prędkość kątowa $\bar{\omega}$ bryły, poddanej stałemu zewnętrznemu momentowi, powiększa się jednostajnie.* Oznaczywszy przez φ przyrost prędkości kątowej w jednostce czasu (przyśpieszenie kątowe), otrzymamy:

$$\bar{\omega} = \varphi t; \ \varphi B = M,$$

a stąd:

$$\bar{\omega} = \frac{Mt}{B},$$

to znaczy, że nabyta *prędkość kątowa jest proporcyonalna do momentu siły działającej na ciało i do czasu działania tego momentu; natomiast odwrotnie proporcyonalna do momentu bezwładności bryły.*

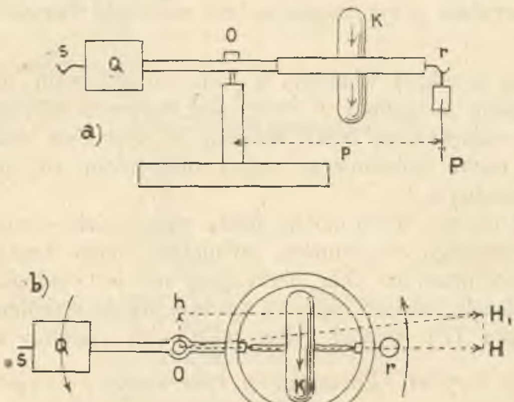
Stosowny przykład widzimy w kole zamachowem machiny parowej, którą właśnie puszczono w ruch; pod wpływem siły, wywartej przez machinę, koło rozpędza się coraz bardziej — w końcu jednak, gdy moment oporów ruchu zrównoważy się z momentem siły pędzącej, ruch staje się jednostajnym.

Przyrząd na ryc. 60 ej można także wprowadzić w ruch za pomocą ciężarka, zawieszonego na sznurku, owiniętym około krążka; masę ciężarka oznaczymy przez μ. Siłą obracającą nie jest jednak cały ciężar μg tej masy. Jeżeli bowiem ciężarek spada z przyśpieszeniem γ, wówczas napięcie sznurka (P) wynosi tylko $\mu(g - \gamma)$ (podług ust. 60); zatem $B\bar{\omega} = \mu(g - \gamma) rt$. Ponieważ w tym razie $\gamma = r\varphi = \frac{r\bar{\omega}}{t}$, przeto $\bar{\omega} = \frac{\mu grt}{B + \mu r^2}$, tudzież $\gamma = g \frac{\mu r^2}{B + \mu r^2}$. Związek masy μ z przyrządem obracającym się, zwalnia tedy spadanie jej, a to tem więcej, im większy jest moment bezwładności przyrządu.

Jeżeli zewnętrzny moment sił M nie jest stały, wtenczas także prędkość kątowa nie zwiększa się jednostajnie; w każdej chwili jednak przyrost jej, przypadający na jednostkę czasu (przyśpieszenie kątowe), jest proporcyonalny do wartości, jaką w tejże chwili posiada moment siły (na podobieństwo przyśpieszenia ruchu postępowego pod wpływem siły zmiennej).

78. Ruchy precessyjne. W poprzedzającym ustępie rozważaliśmy ruch obrotowy, który powstaje i wzmaga się pod działaniem momentu siły zewnętrznej, mającego tenże sam kierunek, co moment ruchu; wówczas zmienia się tylko wielkość momentu ruchu, kierunek jego nie ulega zmianie. Jeżeli natomiast mamy ciało, obracające się, ale nie mające ustalonej osi (jak n. p. kula ziemska), a poddamy je działaniu sił zewnętrznych, które usiłują obracać się koło innej osi, aniżeli ta, około której ono w pewnej chwili się obraca, wówczas moment ruchu zmieniać się będzie nietylko co do wielkości, ale także co do kierunku; w następstwie tego zmienia się także położenie osi, około której ciało się obraca.

Ruchy tego rodzaju, zwane p r e c e s s y j n y m i[1]), dają się najłatwiej objaśnić zapomocą przyrządu, zwanego ważką giroskopową (ryc. 61, *a* widok z boku, *b* z góry). W przyrządzie tym widzimy



Ryc. 61.

drążek metalowy *rs*, podparty w punkcie *O* na ostrzu, na podobieństwo igły magnesowej; u jednego końca łączy się on z obręczą, w której znajduje się masowy krążek *K*, obracający się łatwo około osi, mającej łożyska na obwodzie obręczy. U drugiego końca drążka widać ciężarek *Q*, który równoważy ciężar obręczy i krążka. Gdy na haczyku *r*, albo *s*, zawiesimy dodatkowy ciężarek *P*, wówczas strona obciążona spadnie na dół. Inaczej ma się rzecz, jeżeli wprowadzimy poprzednio krążek *K* w bardzo szybki ruch obrotowy:

[1]) Od łać. praecedere = poprzedzać; precessyą nazwano powolną, ale nieustanną zmianę kierunku osi ziemskiej, względem ekliptyki, wynikającą z działań, o których w niniejszym ustępie mowa.

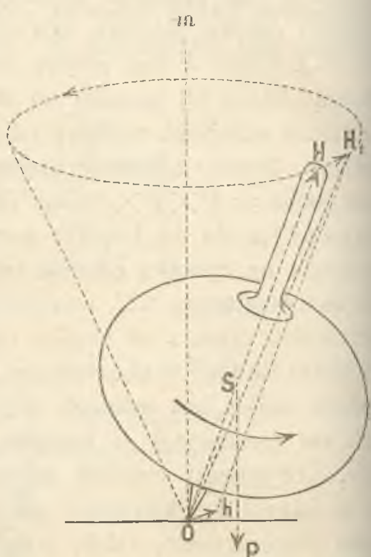
w tym razie przyrząd nie spada, mimo dodatkowego obciążenia, natomiast obraca się zwolna w płaszczyźnie poziomej około punktu O, w jednym lub drugim kierunku, zależnie od kierunku obrotu krążka i od tego, czy ciężarek P zawieszono na r czy na s; ruch ten stanowi właśnie t. zw. precessyę osi krążka.

Aby zjawisko to objaśnić, przypuśćmy naprzód, że obrót krążka jest tak szybki, w porównaniu z ruchem około O, iż można przyjąć, że moment ruchu względem O posiada zawsze kierunek osi obrotu krążka (ryc. 61, *b*). Jeżeli B oznacza moment bezwładności krążka, $\bar{\omega}$ jego prędkość kątową, wtenczas przy obranym w rysunku kierunku obrotu, odcinek $OH = \bar{\omega} B$ przedstawia moment ruchu (ust. 67). Ciężar P jest jedyną siłą zewnętrzną, która może obracać przyrząd około O; moment jej względem O wynosi $P \times p$, w czem p oznacza odległość ciężarka od pionu idącego przez ostrze. W ciągu pewnego, bardzo krótkiego czasu τ, siła ta wytwarza malutki moment ruchu $= P \times p \times \tau$ (ust. 73), w kierunku poziomym i prostopadłym do osi krążka; moment ten, jego wielkość i kierunek wyobraża na rysunku odcinek Oh. Dodając ten moment wytworzony Oh, do istniejącego OH, otrzymamy moment wypadkowy OH_1, t. j. przy końcu czasu τ oś krążka zajmie położenie OH_1; w ciągu czasu τ obróciła się tedy w płaszczyźnie poziomej o kąt HOH_1. Ponieważ ciężkość działa bez ustanku, otrzymamy więc ciągły i jednostajny ruch osi (precessyę), w kierunku wskazanym przez strzałki łukowate. Zawiesiwszy ciężarek na haczyku s, otrzymalibyśmy precessyę osi w odwrotnym kierunku. Aby znaleźć prędkość kątową Ω tego ruchu precessyjnego, należy podzielić kąt $H\Theta H_1$, określony w mierze łukowej, przez czas τ. Otóż kąt rzeczony wynosi $\frac{HH_1}{OH}$ (możemy bowiem, dla małości linii HH_1, uważać ją jako łuk o promieniu OH albo OH_1), czyli $\frac{Pp\tau}{B\bar{\omega}}$, zatem: $\Omega = \frac{Pp}{B\bar{\omega}}$.

Wzór ten okazuje, że ruch precessyjny jest proporcyonalny do momentu siły zewnętrznej, odwrotnie proporcyonalny do momentu ruchu krążka. W miarę zwolnienia obrotu krążka precessya staje się naprzód szybszą, niebawem jednak przyrząd zaczyna chwiać się i w końcu upada.

[Z ryc. 61 wyczytamy łatwo regułę ogólną wskazującą kierunek ruchu precessyjnego: oś obrotu (OH) ciała wirującego stara się najkrótszą drogą ustawić równolegle do tej osi (Oh), około której moment zewnętrzny usiłuje ciało obracać, tak, iżby oba obroty odbywały się w tę samą stronę].

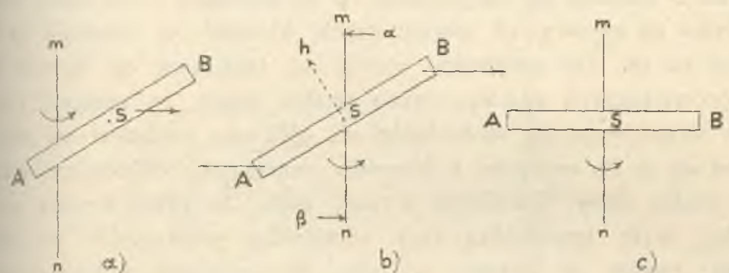
Ruch precessyjny można zauważyć przy obrocie t. zw. bąka, albo frygi (ryc. 62), jeżeli oś jest względem pionu nieco pochylona; oś ta zakreśla około pionu *om* powierzchnię stożkową w kierunku, oznaczonym na rysunku za pomocą strzałek. Momentem zewnętrznym, zmieniającym moment ruchu, jest w tym razie moment ciężaru P frygi, działającego w środku ciężkości S. — Ruch precessyjny, podobny do tego, który objaśnia ryc. 62, posiada także oś obrotu ziemi. Już Hipparchowi (r. 180 przed Chr.) znany był fakt, że biegun niebieski (punkt, w którym przedłużona oś ziemi trafia pozorną kulę nieba) zmienia zwolna położenie swe wśród gwiazd stałych. Obecnie znajduje się on w pobliżu gwiazdy biegunowej (α Małej Niedźwiedzicy). W przeciągu 25800 lat przebiega on na niebie koło o promieniu $23\frac{1}{2}^0$ do około bieguna ekliptyki (punkt, w którym kulę niebieską trafia prostopadła do płaszczyzny ekliptyki; punkt ten leży w konstelacyi Smoka, mniej więcej pośrodku między gwiazdą biegunową a gwiazdą Vega. Znaczy to, że w rzeczywistości oś obrotu ziemi zmienia zwolna kierunek, zakreślając w ciągu 25800 lat stożek około normalnej do ekliptyki. Zjawisko to tłumaczy się tem, że ziemia nie jest dokładnie kulistą, lecz podobną raczej do elipsoidy obrotowej, spłaszczonej cokolwiek na obu biegunach (podobnie, tylko mniej wydatnie, jak fryga na ryc. 62; przy obranym tam kierunku obrotu należy sobie wyobrazić, że biegun południowy ziemi leży po stronie O, północny po stronie H, gdyż ziemia obraca się od zachodu ku wschodowi; *Om* oznaczałoby normalną do ekliptyki). Ziemia jest jakby kulą opasaną dokoła równika pierścieniem wystającym; a że oś jej jest pochylona ku płaszczyznie ekliptyki, przeto przyciąganie słońca (i księżyca), działając na bliższą część owego pierścienia silniej, aniżeli na dalszą, odwróconą od słońca, wytwarza moment sił, dążący do ustawienia osi ziemskiej prostopadle do ekliptyki. Z tego powodu oś ziemska, zachowując stale kąt $23\frac{1}{2}^0$ z normalną ekliptyki, zmienia nieustannie kierunek, podobnie jak oś frygi na ryc. 62, tylko w odwrotnym kierunku, gdyż kierunek momentu siły P jest tam przeciwny. — Precessyą osi tłu-



Ryc. 62.

maczy się także zboczenie w prawo lub w lewo pocisków wyrzucanych z dział gwintowych, wskutek czego one mają szybki ruch obrotowy około podłużnej osi. Pocisk taki, zazwyczaj walcowy, z przodu stożkowo zaostrzony, usiłuje zachować podczas ruchu pierwotny kierunek osi obrotu; wskutek tego oś ta ustawia się skośnie względem drogi parabolicznej, po której pocisk się porusza. W położeniu tem pocisk spotyka opór powietrza, starający się obrócić przedni jego koniec do góry; dążenie to, w połączeniu z ruchem obrotowym, sprawia zboczenie precessyjne przedniego końca pocisku, a w następstwie tego opór powietrza wywołuje zboczenie drogi na prawo, albo na lewo — zależnie od tego, w którym kierunku pocisk wiruje.

79. Swobodne osi obrotu. Weźmy pod uwagę bryłę jakiejkolwiek postaci, n. p. walec *AB* (ryc. 63 a) i wprowadźmy ją w obrót



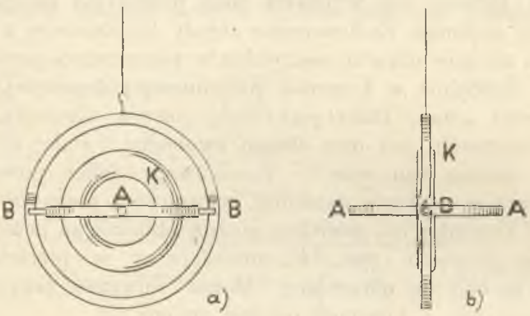
Ryc. 63.

około dowolnej osi mn. Jest rzeczą jasną, że przy takiem położeniu osi, jakie widzimy na rysunku, siła odśrodkowa, wywołana obrotem ciała, starać się będzie wyrwać oś z łożysk m i n. Nie możemy tedy w tym przypadku oswobodzić osi z łożysk, lecz owszem potrzeba dać tym ostatnim stosunkowo silną konstrukcyę. Położywszy oś obrotu przez środek masy S, jak pokazuje ryc. 63 b, usuniemy dążność osi do wyrwania się z łożysk, jednakowoż pozostaną jeszcze siły odśrodkowe działające na obie połowy walca, w przeciwnych kierunkach; one starają się ustawić oś walca prostopadle do osi obrotu i sprawiają znowu ciśnienie osi na łożyska. I w tym przypadku oś nie jest swobodna, t. j. nie możnaby uwolnić jej z łożysk, nie zmieniwszy ruchu ciała. Gdy jednak położymy oś, jak wskazuje ryc. 63 c, znowu przez środek masy, ale zarazem prostopadle do osi walca, wtedy i to drugie działanie będzie usunięte;

pomiędzy osią a łożyskami nie będzie żadnego oddziaływania (pominąwszy tarcie), wynikającego z obrotu. Gdybyśmy oś oswobodzili, przez zdjęcie łożysk, obrót odbywałby się mimo to dalej, około tej samej osi. Osi mające tę własność nazywamy swobodnemi. One przechodzą koniecznie przez środek masy; nie wszystkie jednak osi przechodzące przez ten punkt są swobodne. Przyczyna leży w tem, że moment ruchu, obliczony względem środka masy, nie zawsze jest równy momentowi obliczonemu względem wybranej osi obrotu; niektóre tylko osi mają tę własność. Tak n. p. moment względem osi mn (na ryc. 63 b) posiada kierunek sm, podczas gdy sh przedstawia moment ruchu względem środka masy. Podczas ruchu bryły odcinek sh kręci się około osi mn, jak gdyby był stale związany z ciałem; stąd wynika, że moment ruchu sh względem środka S zmienia się nieustannie, co do kierunku — co może dziać się tylko za sprawą sił zewnętrznych, któremi są ciśnienia α i β łożysk na oś. Osi swobodne różnią się tedy tem od innych osi, przeprowadzonych również przez środek masy, *że moment ruchu ciała obracającego się około takiej osi, obliczony względem osi obrotu, równa się co do wielkości i kierunku momentowi obliczonemu względem środka masy.* Rachunek wyższy uczy, że przez środek masy każdej bryły przechodzą trzy wzajemnie prostopadłe osi swobodne; można je poznać po tem, że względem jednej z nich moment bezwładności bryły jest największy, względem drugiej najmniejszy, a względem trzeciej posiada pewną wartość pośrednią. W bryłach symetrycznych (n. p. obrotowych), wypełnionych jednolicie materyą, oś symetryi jest widocznie taką swobodną osią obrotu. Ciało, wprowadzone w obrót około jednej z osi swobodnych, a następnie usunięte z pod wpływu wszelkich sił zewnętrznych, będzie się ciągle obracało około tej samej osi. Prędkość kątowa będzie stała, jak tego wymaga prawo zachowania momentu ruchu; kierunek osi obrotu w przestrzeni będzie również niezmieniony.

Wspomniane osi swobodne nie mają jednakowej w tej mierze wartości: jedne są zarazem osiami stałemi, inne nie mają tej własności. [Jeżeli bryła wiruje około tej osi swobodnej, względem której jej moment bezwładności posiada wartość największą, (jak walec na ryc. 63c) wtedy obrót jest stały. Oś obrotu można potrącić, albo uderzyć lekko, a ruch bryły nie zmieni się wiele. Im znaczniejszy jest moment bezwładności i im szybcej bryła wiruje, tem uporczywiej oś obrotu trwa w nadanym jej pierwotnie kierunku. Szybki obrót około osi swobodnej umożliwia utrzymywanie się bryły w takich położeniach, w jakich bez udziału obrotu nie mogłaby żadną miarą trwać. Fryga (ryc. 63), ustawiona pionowo na ostrym kolcu, wirując szybko, nie przewraca się. Nie przewraca się również bicykl, gdy jest w biegu, jakkolwiek wspiera się na dwu tylko kołach; od pochylenia się chroni go wirowanie tych kół, których osi obrotu są osiami swobodnemi, odpowiadającemi znacznemu momentowi bezwładności.

Taka równowaga sztuczna, wytworzona przez szybki obrót brył, nazywa się równowagą girostatyczną. Girostatem (gr. gyros = koło, zwój) zwiemy bryłę obrotową, masywną, zwykle w kształcie grubego krążka (jak K na ryc. 61 albo 62), zdolną do szybkiego wirowania około swej osi geometrycznej, która powinna być zarazem osią największego momentu bezwładności. Girostatów używa się obecnie do zmniejszania kołysania się okrętów i t. p.; próbowano nawet budować koleje żelazne



Ryc. 64

o jednej tylko szynie, utrzymując równowagę wozów zapomocą potężnych girostatów].

Zajmujące zastosowanie girostatu do wykazania obrotu ziemi około osi zawdzięczamy Foucaultowi. Krążek metalowy K (ryc. 64), starannie wytoczony, osadzony jest na osi, której końce spoczywają w łożyskach umieszczonych w dwu naprzeciwległych miejscach na obwodzie pierścienia AA. Pierścień ten opiera się za pośrednictwem dwu stalowych ostrzy (jak belka wagi) na pionowym pierścieniu B, który znowu jest zawieszony na długiej nieokręconej nici. Dzięki temu urządzeniu, oś krążka może poruszać się swobodnie na wszystkie strony. Skoro się wprowadzi krążek w szybki ruch obrotowy około osi AA, natenczas traci on swobodną ruchliwość, a oś jego zatrzymuje uporczywie pierwotny kierunek. Za pomocą tego przyrządu Foucault wykazał naocznie dzienny ruch obrotowy ziemi około osi. Oś krążka obracającego się posiada bowiem kierunek stały w przestrzeni, a zatem w miarę obrotu ziemi zmienia oś girostatu położenie względem ziemi, ale zachowuje niezmienny kierunek względem gwiazd. Jeżeli ustawimy oś krążka w kierunku której gwiazdy stałej, natenczas będzie ona ciągle wskazywała ku tej samej gwieździe. [Obecnie zdołano urzeczywistnić pomysł, rzucony również przez Foucaulta zastosowania girostatu, zamiast kompasu magnetycznego, do wskazywania stron świata podczas żeglugi morskiej. Wyobraźmy sobie girostat, wirujący niezmiernie szybko (popęd elektromagnetyczny) około poziomej osi, wspartej na łożyskach, umocowanych do czółenka pływającego swobodnie po cieczy (rtęci). Przypuśćmy, że oś obrotu ma z początku kierunek mniej więcej wschodnio-zachodni. Wskutek obrotu ziemi powierzchnia rtęci nie pozostaje równoległą do siebie, lecz pochyla się ustawicznie ku wschodowi (najsilniej na równiku, na biegunach wcale nie, tam też przyrząd nie działałby wcale). Wskutek tego wschodnia część czółenka, które za działaniem girostatu dąży do utrzymania się w pierwotnem położeniu, wynurza się odrobinę z rtęci. Działanie ciężkości daje wówczas moment dążący do wyprostowania czółenka, starający się zatem obracać je w tę stronę, w którą obraca się kula ziemska. Moment ten wytwarza ruch precesyjny osi girostatu i złączonego z nią czółenka. Zastosowanie reguły kierunkowej z ust. 78 okazuje, że oś ta zacznie obracać się zwolna w płaszczyznie poziomej i ustawi się w końcu dokładnie w kierunku południowo-północnym].

Oś obrotu ziemi, która jest bryłą prawie obrotową, spłaszczoną nieco przy biegunach, jest osią obrotu swobodną i stałą; dla tego kierunek jej jest zawsze ten sam — pominąwszy nader powolne zmiany, sprawione przez zewnętrzne działania, wywołujące precesyę.

Stałość kierunku osi ziemskiej można objaśnić za pomocą przyrządu podobnego do girostatu (ryc. 64), umieściwszy w pierścieniu zamiast krążka, kulę szybko się obracającą. Można wówczas przyrząd dowolnie poruszać i pochylać, a kierunek osi nie zmieni się.

80. Wpływ obrotu dziennego ziemi na ruch ciał. Wpływ ten pochodzi stąd, że wskutek obrotu dziennego, rozmaite punkty powierzchni ziemi, względem której uważamy ruch ciał, posiadają niejednakowe prędkości w przestrzeni. Oznaczmy przez $\tilde{\omega}$ prędkość kątową obrotu ziemi, przez R jej promień; punkty leżące na równoleżniku AB (ryc. 65) w szerokości geograficznej λ, poruszają się od zachodu ku wschodowi z prędkością $V = \tilde{\omega} R \cos\lambda$. Punkty, leżące na sąsiednim równoleżniku, mającym cokolwiek większą szerokość geograficzną $\lambda + \mu$, gdzie μ jest bardzo małym kątem $= AOA_1$, mają nieco mniejszą prędkość: $V' = \tilde{\omega} R \cos(\lambda + \mu) = \tilde{\omega} R (\cos\lambda \cos\mu - \sin\lambda \sin\mu)$. Tu możemy przyjąć, dla małości kąta μ: $\cos\mu = 1, \sin\mu = \mu$, wtedy będzie:

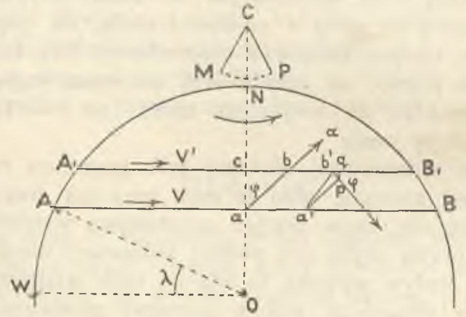
$$V' = V - \tilde{\omega} R \mu \sin\lambda.$$

Ponieważ jednak $R\mu = AA_1 = ac$ (ryc. 65) $=$ odległości obu równoleżników, przeto:

$$V' = V - \tilde{\omega} \sin\lambda \,.\, ac,$$

t. j. w okolicy mającej szerokość λ, punkt leżący o długość ac ku północy, posiada prędkość mniejszą o: $\bar{\omega} \sin \lambda \,.\, ac$.

Wyobraźmy sobie teraz, że tuż nad ziemią i równolegle do niej, jakiekolwiek ciało porusza się z prędkością $= v$. Dajmy nato, że ruch ciała, uważany względem ziemi, w chwili, gdy ono znajduje się nad punktem a ziemi (ryc. 65), posiada kierunek $a\alpha$. pochylony do południka aN pod kątem φ. Gdyby ziemia była nieruchoma, ciało przyszłoby po upływie pewnego k r ó t k i e g o czasu τ do punktu b, leżącego na równoleżniku A_1; mielibyśmy wtenczas: $ab = v\tau$. W rzeczywistości jednak ziemia obraca się; po upływie czasu τ punkt a znajduje się w a', b zajmuje położenie b'. Droga przebyta przez punkt a wynosi: $aa' = V\tau$, droga punktu b jest krótsza, wynosi: $bb' = V'\tau$, przyczem V i V' mają obliczone wyżej wartości. Ponieważ ciało poruszające się swobodnie zachowuje przez przeciąg czasu τ ten sam kierunek ruchu, jaki miało przechodząc przez a, przeto wskutek obrotu ziemi nie trafi ono do punktu b', który przedtem znajdował się w b, lecz przejdzie mimo tego punktu



Ryc. 65.

na prawo, do p (przypuszczamy zgodnie z rysunkiem, że a leży na półkuli północnej). Ruch ciała względem ziemi obracającej się jest więc różny od tego, jaki dostrzegliśmy na ziemi nieruchomej; odbywa się on tak, jak gdyby na ciało działała siła sprowadzająca je na prawo z drogi, po której je prowadzą inne siły, sprawiające rzeczywisty ruch jego w przestrzeni. Ta siła pozorna nie zmienia prędkości, lecz tylko kierunek ruchu. *Zamiast więc mówić o obrocie ziemi, możemy przypisać zboczenie ruchu pozornej sile, działającej w kierunku $b'p$, prostopadle do każdoczesnego kierunku ruchu, i na prawo względem tego kierunku.* Aby znaleźć natężenie tej siły pozornej, zauważymy naprzód, że zboczenie ruchu, sprawione w przeciągu czasu τ, wynosi $b'p$. Otóż $b'p = \frac{b'q}{\cos\varphi}$; długość $b'q$ zaś okazuje, o ile ciało wyprzedziło w ciągu czasu τ punkt b' w kierunku wschodnim. Ponieważ wschodnia prędkość ciała jest taka sama jak punktu a, z którego ciało wyszło, przeto $b'q = aa' - bb' = \tau(V - V') = \tau\tilde{\omega} \sin\lambda \,.\, ac$; ponieważ zaś $ac = ab \cos\varphi = v\tau \cos\varphi$, przeto ostatecznie:

$$b'p = v\tilde{\omega} \sin\lambda \,.\, \tau^2 = \tfrac{1}{2}\gamma\tau^2,$$

gdzie dla skrócenia położyliśmy $\gamma = 2\tilde{\omega}v \sin\lambda$.

Natężenie szukanej siły pozornej jest więc takie, że udziela ona ciału przyśpieszenia γ w kierunku prostopadłym do każdoczesnego ruchu. Jeżeli oznaczymy masę ciała przez m, natenczas

$$F = 2m\tilde{\omega}v \sin\lambda$$

da nam natężenie tej siły, którą nazwano **siłą odśrodkową złożoną.**

Uważając poziome ruchy ciał na ziemi, możemy przyjąć, jak się z powyższego okazuje, że ziemia jest w spoczynku, ale natomiast *należy dodać do rzeczywistych sił, działających na ciało, siłę odśrodkową złożoną, proporcyonalną do masy i prędkości ciała, do prędkości kątowej obrotu ziemi i do wstawy szerokości geograficznej.* Siła ta działa na półkuli północnej na prawo, na południowej na lewo względem kierunku ruchu; jest największa na biegunach ziemi ($\sin\lambda = 1$), na równiku ($\sin\lambda = o$) niema jej wcale.

Wpływ siły odśrodkowej złożonej jest pospolicie mały, chyba, że prędkość ciała jest znaczna, albo że ruch trwa tak długo, iż zboczenie, wywołane przez tę siłę, może przyjąć znaczniejszą wartość. Pociągi kolejowe cisną na prawą szynę (na półkuli północnej) nieco silniej aniżeli na lewą. Ważny wpływ wywiera ta siła na ruch wiatrów. Jeżeli pewna różnica ciśnień w atmosferze usiłuje poruszyć powietrze n. p. ku północy, natenczas wiatr zboczy w rzeczywistości nieco ku wschodowi. Następstwem tego jest, że wiatry, wiejące ku tak zw. zniżkom barometrycznym, okrążają miejsce najniższego ciśnienia, a mianowicie (na półkuli północnej) w kierunku przeciwnym ruchowi wskazówek zegarowych (reguła Buys-Ballota).

Wahadło Foucaulta. Wyobraźmy sobie, że w punkcie C (ryc. 65), leżącym pionowo nad biegunem ziemi, na przedłużonej osi ziemskiej, zawieszono wahadło, składające się z cienkiego drutu, obciążonego u spodu ciężką kulą metalową. Jeżeli wahadło takie wprawimy w ruch, n. p. w płaszczyźnie MCP, natenczas ono wahać się będzie ciągle w tej samej płaszczyźnie, jak to wynika z prawa zachowania momentów; niema tu bowiem siły, która mogłaby zmienić kierunek płaszczyzny wahań. Ponieważ jednak ziemia obraca się jednocześnie pod wahadłem, przeto człowiekowi, stojącemu na ziemi i biorącemu nieświadomie udział w jej ruchu, zdawać się będzie, jakoby płaszczyzna wahań wahadła zmieniała kierunek w przestrzeni, obracając się (za słońcem) od wschodu ku zachodowi, raz w około w przeciągu jednej doby gwiazdowej. Jest to objaw siły odśrodkowej złożonej; jeżeli bowiem wyobrazimy sobie, że ziemia pozostaje w spoczynku, a natomiast dodamy siłę odśrodkową $2m\tilde{\omega}v$, natenczas siła ta skręcać będzie płaszczyznę wahań tak, jak to opisaliśmy. Obracanie się płaszczyzny wahań można zauważyć w każdej szerokości geograficznej (z wyjątkiem równika, gdzie $F = 0$), jak to naprzód okazał doświadczalnie Foucault (1851). Ponieważ jednak w szerokości λ siła odśrodkowa złożona wynosi $F = 2m(\tilde{\omega}\sin\lambda)v$, przeto płaszczyzna wahań obraca się tak, jakby się obracała na biegunie, gdyby prędkość kątowa ziemi wynosiła tylko: $\tilde{\omega}\sin\lambda$. Tak n. p. w szerokości 50^0 mamy: $\sin\lambda = 0{\cdot}76604$; wskutek tego jeden obrót płaszczyzny wahań nie trwa 24, lecz $\frac{24}{0{\cdot}76604} = 31$ godzin, 20 minut gwiazdowych, czyli 31 godzin, 15 minut średnich.

Obrót ziemi posiada także pewien (bardzo nieznaczny) wpływ na spadanie swobodne ciał w kierunku pionowym. Ciężar, spadający swobodnie z wysokiej wieży, nie trafia ziemi w punkcie leżącym pionowo pod punktem, z którego ciężar puszczono, lecz zbacza cokolwiek ku wschodowi; ciężar bowiem na wieży, wskutek większej odległości od osi ziemskiej, posiada cokolwiek większą prędkość w kierunku wschodnim, aniżeli ziemia u stóp wieży; zachowując tę większą prędkość podczas spadania, wyprzedza on ziemię nieco ku wschodowi.

Zadania.

143) Na wale o promieniu 3 *cm* osadzone jest koło rozpędowe, które wprawiamy w obrót, ciągnąc sznur nawinięty na wale siłą 3 *Kg* ($= 3000 \times 981$ dyn). Ile wynosi prędkość kątowa po upływie 10 *sek*, jeżeli koło razem z wałem waży 12 *kg*, ramię bezwładności mierzy 20 *cm*, zaś moment tarcia osi w łożyskach wynosi $1^0/_0$ momentu siły pędzącej.

Odp. $\frac{0{\cdot}99 \times 3000 \times 981 \times 3 \times 10}{12000 \times 400} = 18{\cdot}21 = 2{\cdot}898$ obrotów na sekundę.

144) Krążek w przyrządzie Atwooda (ryc. 50) posiada promień 8 *cm*, ramię bezwładności 6 *cm*, waży 30 *gr*. Na jednym końcu sznurka zawieszono 40 *gr*, na drugim 45 *gr*. Znaleźć przyśpieszenie, z jakiem spada ciężar 45 *gr*.

Odp. Oznaczywszy to przyśpieszenie przez γ, znajdziemy napięcie sznurka: $P_1 = 45\,(981 - \gamma)$ dyn; napięcie drugiego końca, na którym wisi masa 40 *gr*. wynosi: $P_2 = 40\,(981 + \gamma)$ dyn; na krążek działa zatem moment $(P_1 - P_2) \times 8$, co daje przyśpieszenie kątowe $\varphi = \frac{(P_1 - P_2) \times 8}{30 \times 36}$, czyli $\gamma = 8 \times \varphi = 64\,\frac{5 \times 981 - 85\,\gamma}{30 \times 36}$, skąd $\gamma = 48{\cdot}15$ cm/sek^2. (Tarcie sznurka o obwód krążka, sprawiające ruch jego, jest powodem, że napięcie nie jest jednakowe u obu końców). Zadanie to można rozwiązać bezpośrednio, stosując prawo zależności momentu ruchu od momentu sił zewnętrznych, w następujący sposób: Oznaczając promień krążka przez r, prędkość ciężarków przez $v = \bar{\omega} r$, przez $m + \mu$ i m masy zawieszone, przez $\gamma = \frac{v}{t}$ przyśpieszenie masy spadającej, znajdziemy moment ruchu całego układu względem osi krążka: $H = \frac{v}{r} B + (2m + \mu) vr$. Siłą zewnętrzną jest tylko μg, zatem $M = r\mu g$. Ponieważ M jest miarą przyrostu H, przypadającego na jednostkę czasu, przeto $M = \frac{H}{t}$, czyli $r\mu g = \frac{\gamma}{r} B + (2m + \mu)\gamma r$, skąd $\gamma = \frac{\mu g r^2}{B + (2m + \mu) r^2}$.

145) Po płaszczyznie pochylonej do poziomu pod kątem 30° stacza się na dół walec o promieniu 5 *cm*. Znaleźć przyśpieszenie γ i drogę s przebytą w ciągu t sekund. *Odp.* Oznaczywszy przez m masę walca, przez φ przyśpieszenie kątowe, jakie walec posiada w pewnej chwili, względem krawędzi, w której właśnie dotyka płaszczyzny, mamy $\varphi = \frac{M}{B} = \frac{mg \times 5 \times \sin 30^0}{\frac{3}{2} m \times 25}$; przyśpieszenie, z jakiem spada oś walca wynosi więc: $\gamma = \varphi \times 5 = \frac{g \sin 30^0}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} g$, zatem $s = \frac{1}{6} g t^2$.

146) Znaleźć przyśpieszenie, z jakiem stacza się po takiej płaszczyznie kula jednolita, o promieniu 5 *cm*. *Odp.* $^5/_{14}\ g$.

147) Koło rozpędowe, ważące razem z wałem 1 tonnę, mające ramię bezwładności $= 2\ m$, obraca się z prędkością kątową 30 obrotów na minutę. Jaka siła powinna działać na obwód koła pasowego o średnicy 80 *cm*, połączonego z wałem, aby koło rozpędowe zatrzymać w przeciągu 5 minut?

Odp. $M = \frac{30 \times 2\pi}{60} \frac{10^6 \times (200)^2}{5 \times 60} = 4{\cdot}1888 \times 10^8$ *dyn cm;* siła $\frac{4{\cdot}1888 \times 10^8}{40}$ dyn $= 10{\cdot}675$ *Kg.*

148) W ważce giroskopowej (ryc. 61) krążek obraca się 85 razy na sekundę; jego masa i ramię bezwładności są 137 *gr* i 2·6 *cm*; w odległości 16 *cm* od pionowej osi zawieszono ciężarek dodatkowy 10 *gr*. Obliczyć prędkość kątową ruchu precessyjnego.

Odp. $\Omega = \frac{10 \times 981 \times 16}{137 \times (2{\cdot}6)^2 \times 85 \times 2\pi} = 0{\cdot}3173$, t. j. jeden obrót na 19·8 *sek.*

149) Bąk (ryc. 62), ważący m *gr* i mający względem swej osi ramię bezwładności k, obraca się około tej osi z prędkością bardzo znaczną $\bar{\omega}$; znaleźć prędkość kątową, z jaką oś okrąża pion przechodzący

przez punkt oparcia bąka, jeżeli odległość środka ciężkości od tego punktu wynosi l, zaś θ oznacza pochylenie osi do pionu.

Odp. Składowa pozioma momentu ruchu $= m\bar{\omega}k^2 \sin\theta$; moment siły ciężkości względem punktu oparcia $= mgl \sin\theta$; zatem $\Omega = \dfrac{mgl \sin\theta}{m\bar{\omega}k^2 \sin\theta} = \dfrac{gl}{k^2\bar{\omega}}$.

150) Znaleźć liczbę obrotów bąka około osi, wiedząc, że ramię bezwładności wynosi 3 *cm*, odległość środka ciężkości od punktu oparcia 4 *cm*, zaś oś jego okrąża pion 15 razy na minutę.

Odp. 44·2 razy na sekundę.

151) Obliczyć nacisk, jaki wywiera, wskutek obrotu ziemi, lokomotywa ważąca 30 ton, jadąca z prędkością 12 *m/sek*, na prawą szynę, w szerokości 50° N.

Odp. $F = 2 \times \dfrac{30000}{9{\cdot}81} \times \dfrac{2\pi}{86164} \times 12 \sin\lambda = 4{\cdot}1$ *Kg*.

ROZDZIAŁ V.

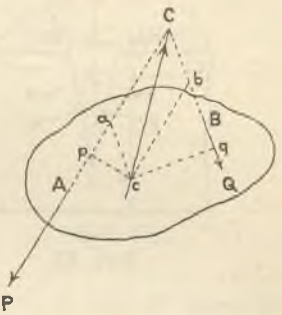
Statyka.

81. Ogólne warunki równowagi ciała stałego. Zadaniem statyki jest znaleźć warunki, które powinny być zachowane, aby ciało, poddane działaniu pewnych sił, pozostawało mimo to w spoczynku; powiadamy wówczas, że siły działające na ciało są w równowadze, czyli równoważą się wzajemnie. Jeżeli ciało jakie ma być nieruchome, natenczas powinien przedewszystkiem środek masy tego ciała być nieruchomy; punkt ten określa bowiem miejsce zajmowane przez ciało w przestrzeni. Nadto, ciało nie powinno obracać się około środka masy, t. j. moment ruchu względem tego punktu powinien być równy zeru. Nakoniec, wzajemne położenia poszczególnych części ciała powinny być niezmienne; ten ostatni warunek będzie spełniony, jeżeli przyjmiemy, że ciało uważane jest bryłą sztywną, nie odkształcającą się; rozpoczniemy z tego powodu od statyki ciał stałych.

Przypominamy naprzód, że ruch środka masy nie zależy od sił wewnętrznych, lecz odbywa się tak, jak gdyby siły zewnętrzne były bezpośrednio do niego przyłożone (ust. 52). Jeżeli tedy środek masy uważanego ciała ma być nieruchomy, natenczas *wypadkowa wszystkich sił zewnętrznych, przeniesionych bez zmiany natężenia i kierunku do jednego punktu* (n. p. do środka masy, albo jakiego innego punktu), *powinna być równa zeru.* Ten pierwszy warunek równowagi nie wystarcza jednak jeszcze. Widać bowiem że, dwie siły równe, działające w przeciwnych kierunkach, nie mogłyby wprawdzie udzielić ciału ruchu postępowego, lecz mogą je obracać, ilekroć nie działają w jednej linii; należy tedy znaleźć jeszcze warunek drugi.

Wiadomo, że obrót ciał w całości, nie zależy również od sił wewnętrznych, lecz może powstać tylko pod wpływem zewnętrznych, niezrównoważonych momentów (ust. 73, 76). Jeżeli ma istnieć równowaga ciała stałego także pod względem obrotu, natenczas *moment wypadkowy wszystkich sił zewnętrznych, obliczony względem tego samego stałego punktu, powinien być równy zeru.* Te dwa warunki wystarczają do zabezpieczenia równowagi.

82. Równowaga sił przecinających się. Niech na ciało stałe (ryc. 66) działają w punktach A i B dwie siły P i Q, tego rodzaju, że linie, wzdłuż których one działają, przecinają się w punkcie C. Pod wpływem tych dwu sił równowaga ciała nie jest możliwa, chyba że siły P i Q działają wzdłuż tej samej prostej w kierunkach przeciwnych i mają jednakowe natężenia. W każdym innym przypadku potrzebna jest do zrównoważenia siła trzecia R, równa (podług pierwszego warunku, ust. 81), wypadkowej sił P i Q, przeniesionych do wspólnego punktu przyłożenia (n. p. do c) i mająca kierunek przeciwny tej wypadkowej. Niech odcinki Ca i Cb wyobrażają natężenia sił P i Q, wtenczas $cC = R$ wyobrażać będzie natężenie i kierunek siły równoważącej. Siła ta powinna działać na ciało wzdłuż tej samej linii cC, którą otrzymaliśmy w rysunku, albowiem wtenczas także wypadkowy moment sił P, Q i R równać się będzie zeru, t. j. drugi warunek rownowagi (ust. 81) będzie również dopełniony. Aby się o tem przekonać, obliczmy momenty n. p. względem punktu c. W tym razie jest: $Mom.\ R = 0$; $Mom.\ P = P \times cp = aC \times cp$; $Mom.\ Q = Q \times cq = bC \times cq$. Zważywszy, że ostatnie dwa iloczyny przedstawiają podwójne pola trójkątów acC i bcC, które są równe sobie jako połowy równoległoboku, widzimy, że momenty P i Q mają jednakową wartość; ponieważ nadto działają one w strony przeciwne, przeto wypadkowa ich jest zerem. Równowaga nie byłaby też naruszona, gdybyśmy punkty przyłożenia sił P, Q i R przenieśli z A, B, c, do jakichkolwiek innych punktów na ich odpowiednich liniach działania, nie zmieniając kierunku działania tych sił. Przesunięcie takie nie zmieniłoby przecież ich momentów, które równoważyłyby się i w tem

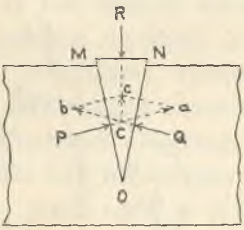


Ryc. 66.

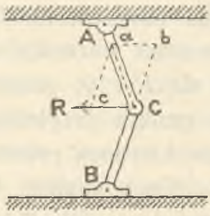
nowem ich umieszczeniu. Możemy tedy, bez ujmy dla równowagi, *przenieść siłę, nie zmieniając jej kierunku do jakiegobądź punktu ciała, leżącego na linii jej działania.*

Przykłady. *Klin MNO* (ryc. 67), wbity w jakiekolwiek ciało stałe, doznaje z obu stron ciśnień prostopadłych (jeżeli jest gładki) P i Q. Z podobieństwa trójkątów MNO i acC wynika: $P:R=NO:MN$; $P=R\times\frac{NO}{MN}$, R oznacza tu siłę wciskającą klin, P działanie, jakie on wywiera w bok na obie strony.

Kolano (ryc. 68, używane do rozpierania ciał, do konstrukcyi pras i t. p.). Na ramię AC działa w A siła aC (opór ciała ściskanego);



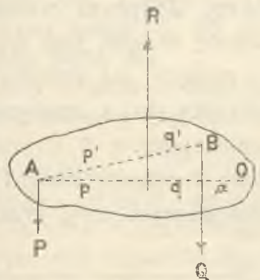
Ryc. 67.



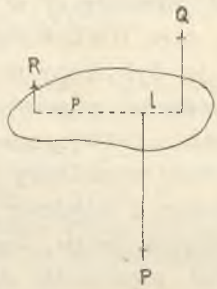
Ryc. 68.

w C siły Cb i Cc. Ciągnąc C siłą Cc, równoważymy ciśnienie $= Ca$, które, jak widać z rysunku, będzie tem większe, im mniej kolano jest załamane.

83. Równowaga sił równoległych. a) ***Kierunki jednakowe.*** Na ciało stałe działają siły równoległe P i Q (ryc. 69) w tę samą stronę. Aby je zrównoważyć, musimy przedewszystkiem dodać siłę równą sumie sił P i Q, działającą w stronę przeciwną (pierwszy warunek równowagi ust. 81). Oznaczywszy natężenie tej siły równoważącej przez R, mamy: $R=P+Q$. Punkt przyłożenia siły R należy tak wybrać, żeby wypadkowy moment sił P, Q i R był równy zeru (warunek drugi). Naprzód tedy siła R powinna działać w płaszczyznie przechodzącej przez P i Q. Aby znaleźć punkt przyłożenia, oznaczmy odległość siły R od P przez p; odległość jej od Q przez q; O zaś niech oznacza jakibądź punkt, leżący w odległości a od Q. Obliczając moment wypadkowy względem O, powinniśmy mieć: $R(q+a) - P(p+q+a) - Qa = o$. Ze względu że: $R = P + Q$, otrzymamy stąd: $Rq - P(p+q) = o$, czyli $Pp = Qq$, albo $\frac{p}{q} = \frac{Q}{P}$. Równanie to określa w zupełności położenie siły równoważącej R; punkt przyłożenia jest dowolny, byle leżał na linii R. Położenie punktu O, względem którego obliczaliśmy momenty, nie ma wpływu na wypadek rachunku, gdyż a nie pojawia się w nim wcale. Równanie $Pp = Qq$ orzeka, że *odległości siły równoważącej od danych sił równoległych powinny mieć się odwrotnie jak natężenie tych sił.* Siła R' równa R, lecz działająca w stronę



Ryc. 69.



Ryc. 70.

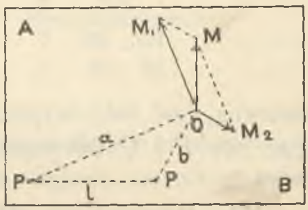
przeciwną, jest tedy wypadkową sił P i Q, t. j. siła R' może zastąpić siły P i Q we wszelkich zagadnieniach równowagi.

84. **Równowaga sił równoległych.** b) ***Kierunki przeciwne.*** Ryc. 70 wyobraża dwie siły równoległe P i Q, działające na ciało w przeciwnych kierunkach. Siła R, mająca je zrównoważyć, powinna być równa różnicy tych sił: $R = P - Q$, i powinna działać w tę stronę, co mniejsza z sił danych n. p. Q. Punkt przyłożenia tej siły R znajdziemy łatwo na podstawie uwagi, że nawzajem siła P powinna równoważyć siły Q i R. Z tego wynika, że R znajduje się na zewnątrz większej siły P. Jeżeli l oznacza odległość sił P i Q, p odległość R od P, wtenczas (podług ust. 83) $\frac{p}{l} = \frac{Q}{R}$, czyli: $p = l\,\frac{Q}{P - Q}$. Zamiast poprzedzającej proporcyi możemy także napisać: $\frac{p}{p+l} = \frac{Q}{Q+R}$. Oznaczmy, jak w poprzedzającym ustępie,

przez q odległość Q od R to jest $q = p + l$, wtedy z uwagi że $Q + R = P$, otrzymamy tożsamo równanie jak w ust. 83: $\frac{p}{q} = \frac{Q}{P}$.

85. **Para sił.** Jeżeli siły P i Q, działające na ciało w przeciwnych kierunkach, mają natężenia jednakowe, wtenczas odległość równoważącej byłaby nieskończenie wielka, a jej natężenie zero. Dwie siły równoległe, mające kierunki przeciwne, a jednakowe natężenia, nie mogą zatem być zrównoważone jedną siłą, one stanowią t. zw. parę sił. Działanie pary sił jest wyłącznie obracające, z tego powodu może ono być zrównoważone tylko działaniem innej pary sił, obracającej w stronę przeciwną. Jedynym warunkiem, któremu parą równoważąca powinna czynić zadość, jest ten, żeby moment jej był równy momentowi pary mającej się zrównoważyć, i żeby posiadał przeciwny kierunek. Wynika to z następującego twierdzenia, określającego wartość momentu pary.

Moment wypadkowy pary sił względem dowolnego punktu równa się iloczynowi z natężenia jednej z sił, stanowiących parę, przez wzajemną odległość obu sił; kierunek tego momentu jest prostopadły do płaszczyzny, w której para się znajduje. Aby tego dowieść, oznaczmy przez P wspólne natężenie sił stanowiących parę, przez l ich odległość (ryc. 71). O niech oznacza dowolny punkt, względem którego mamy obliczyć moment pary; AB wyobraża płaszczyznę położoną przez O prostopadle do sił P (których linie działania przedstawiają się na rysunku jako punkty P i P). Wykreśliwszy według znanej reguły (ust. 72) momenty sił P i P względem O, znajdziemy odcinki $OM_1 = P \times a$ i $OM_2 = P \times b$, w czem a i b oznaczają odległości sił od O. Złożywszy te dwa momenty, otrzymamy moment wypadkowy OM. Ponieważ $OM : MM_1 = a : b$, a nadto kąt OM_1M = kątowi POP, przeto trójkąty OM_1M i POP są podobne. Skoro więc $OM_1 = Pa$, $MM_1 = Pb$, więc musi być także $OM = P \times l$, t. zn. moment wypadkowy pary sił względem dowolnego punktu O równa się zawsze iloczynowi Pl. Zważywszy dalej, że boki trójkątów OMM_1 i OPP są prostopadłe do siebie, przekonamy się, że moment wypadkowy OM jest prostopadły do płaszczyzny, w której



Ryc. 71.

działają siły P i P. Stąd wnosimy, że para, równoważąca daną parę PP, może leżeć w jakiejkolwiek płaszczyznie równoległej do płaszczyzny PP, że może składać się z jakichkolwiek sił Q i Q, byle moment jej, t. j. iloczyn z Q przez odległość obu sił Q, był równy momentowi pary P i P; pary, mające się równoważyć, powinny oczywiście dążyć do wywołania obrotów w kierunkach przeciwnych. Oba warunki równowagi bryły będą wtenczas spełnione, albowiem siły wypadkowej niema, a momenty znoszą się.

Zadania.

152) Klin, którego boki mają długość 20 *cm*, podstawa i szerokość 6 *cm*, wbity został siłą 20 *Kg*; obliczyć ciśnienia boczne.
Odp. $66^2/_3$ *Kg*.

153) Drabina o długości 6 *m*, ważąca 86 *Kg*, opiera się górnym końcem o pionową gładką ścianę; dolny koniec wciśnięty jest w ziemię w odległości 2 *m* od ściany; obliczyć pionową (N) i poziomą (H) składową ciścienia jej o ziemię, tudzież ciśnienie (R) na ścianę. *Odp.* $N = 80\,Kg$; $H = R$; $80\,Kg \times 1\,m = R\sqrt{36-4}$, zatem $R = 14{\cdot}2$ *Kg*.

154) Dwu ludzi dźwiga na barkach końce dwumetrowego drążka, na którym wisi ciężar 30 *Kg*, w odległości 60 *cm* od przedniego końca; jakiemi siłami podtrzymują oni końce drążka?
Odp. 21 i 9 *Kg*.

155) Trzy siły równoległe o natężeniach 4, 5 i 7 działają w tym samym kierunku na prosty drążek: na jednym końcu, w środku i na drugim końcu; znaleźć natężenie (R) wypadkowej i odległość jej od pierwszego końca (X). *Odp.* $R = 16$; $X = {}^{19}/_{32}$ długości drążka.

156) Działanie magnetyzmu ziemskiego na igłę magnesową można uważać jako składające się z pary sił równych, działających na końce igły, jedna ku północy, druga ku południowi; przypuściwszy, że każda z tych sił wynosi 25 dyn, długość igły 5 *cm*, odchylamy igłę o 45^0 z południka, działając w odległości 0·8 *cm* od pionowej osi obrotu siłą poziomą i prostopadłą do igły, obliczyć natężenie tej siły. *Odp.*
$$\frac{5 \times 25}{0{\cdot}8\sqrt{2}} = 110{\cdot}5 \text{ dyn.}$$

86. Dźwignia. Jakiekolwiek ciało stałe, obracalne około stałej (podpartej, albo umocowanej w łożyskach) osi i poddane działaniu sił zewnętrznych (ryc. 72), nazywa się d ź w i g n i ą. [Przypuśćmy, że na dźwignię działają siły zewnętrzne P, Q, S. W punktach jakichkolwiek A, B, C. Przyjmujemy dla prostoty, że linie działania tych sił leżą w płaszczyznach prostopadłych osi; gdyby było inaczej, rozumielibyśmy przez P, Q i S tylko składowe ich równoległe do tych płaszczyzn. Przez p, q, s, oznaczamy r a m i o n a tych sił. t. j. odległości ich linii działania do osi. Obok tych sił zewnętrznych działa na bryłę jeszcze oddziaływanie R osi, którą tamte siły, łącznem swem działaniem, usiłują wyrwać z łożysk. Pierwszy warunek równowagi wymaga, żeby R było równoważącą sił P, Q, S. Nie potrzebujemy o nią się troszczyć, o ile mamy pewność, że oś jest dostatecznie wytrzymała. Pozostaje warunek drugi, który wymaga, żeby wypadkowa momentów (w tym razie względem osi) była zero, t. zn. ż e b y s u m a m o m e n t ó w s i ł o b r a c a j ą c y c h w p r a w o b y ł a r ó w n a s u m i e m o m e n t ó w s i ł o b r a c a j ą c y c h w l e w o.

Ryc. 72.

Tu znowu nie potrzeba się troszczyć o równoważącą R, gdyż jej moment względem osi jest zero. Pozostają zatem do uwzględnienia tylko momenty sił danych. W przypadku ryc. 72 jedyny warunek równowagi wyraża się równaniem:

$$Pp = Qq + Ss.$$

Z a d a n i a.

157) Na dźwigni prostej, osadzonej w środku na poziomej osi, zawieszone są na lewem ramieniu ciężary 4, 9 i 2, w odległościach 5, 12, 20 *cm* od osi, jaki ciężar potrzeba zawiesić na ramieniu prawem, w odległości 25 *cm* od osi, celem zrównoważenia tamtych ciężarów? *Odp.* 6 72.

158) Jaką siłą ciśnie ta dźwignia na oś? *Odp.* $4 + 9 + 2 + 6{\cdot}72 +$ ciężar własny dźwigni.

159) Mając podnieść ciężar 200 *Kg* zapomocą dźwigni 2-metrowej, możemy użyć siły wynoszącej tylko 40 *Kg*; gdzie należy podeprzeć dźwignię? *Odp.* 33·3 od końca.

160) K o ł o w r ó t składa się z wału poziomego o promieniu r i z koła osadzonego na nim, o promieniu R; na wale nawinięty jest sznur, do którego przywiązany jest ciężar Q. Obliczyć siłę P, która powinna działać stycznie do obwodu koła, aby podnieść ciężar.

Odp. $P = \frac{r}{R} Q$.

161) Zapomocą korby o ramieniu R obracamy kółko zębate (promień r_1), osadzone na jej osi; zęby tego kółka obracają drugie koło zębate (promień R_1) osadzone na wale o promieniu r; znaleźć stosunek między siłą P działającą na korbę, a ciężarem Q. działającym za pośre-

dnictwem sznurka owiniętego na wale, w przypadku, gdy te dwie siły wzajemnie się równoważą. *Odp.* $\frac{P}{Q} = \frac{rr_1}{RR_1}$.

162) Jakiej siły potrzeba do podniesienia, zapomocą takiej windy, ciężaru jednej tonny, jeżeli $R = 50$ *cm*, $r_1 = 8$ *cm*, $R_1 = 30$ *cm*, $r = 10$ *cm*? *Odp.* 53 *Kg*.

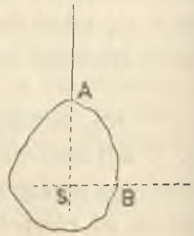
87. Statyka płynów. Płyny (woda, powietrze i t. p.) różnią się tem od ciał stałych, że cząstki ich mogą swobodnie zmieniać odległości i wzajemne położenia. Wszelako własność ta, jakkolwiek doniosła w zjawiskach ruchu, nie pojawia się wcale w zjawiskach równowagi. Cząstki bowiem płynu spoczywającego są względem siebie tak samo nieruchome, jak gdyby stanowiły ciało stałe. Z tego wynika, że zadania, odnoszące się do równowagi płynów, sprowadzają się do praw znalezionych pierwej dla ciał stałych. Jeżeli bowiem odgraniczymy w myśli jakąbądź część płynu nieruchomego od reszty, wtenczas równowaga nie przestałaby istnieć, gdyby ta część płynu zamieniła się na ciało stałe (nie zmieniając zresztą innych własności). Otóż siły zewnętrzne, działając na taką część płynu (do tych sił zewnętrznych zaliczają się także ciśnienia wywierane przez otaczający płyn), powinny się wzajemnie równoważyć, tak samo, jak gdyby działały na ciało stałe. Uwaga niniejsza stosuje się także do ciał miękkich, plastycznych, odkształconych i wogóle do wszelkiego rodzaju materyi.

88. Środek ciężkości. Znalezienie wypadkowego ciężaru ciała, t. j. wypadkowej sił ciężkości, działających na wszystkie jego cząstki, jest zadaniem, które rozwiązuje się na podstawie praw składania sił równoległych. Należy przytem pamiętać, że ciężary są proporcyonalne do mas (ust. 57). Gdyby ciało jakie składało się z dwu cząstek o masach m_1 i m_2, wtenczas wypadkowa ciężarów tych cząstek (równa sumie obu ciężarów) przechodziłaby przez punkt leżący na linii prostej łączącej je, a dzielący tę linię na dwie części, odwrotnie proporcyonalne do odpowiednich ciężarów (podług ust. 83), a zatem także do odpowiednich mas. Wszelako punkt taki, jak wiadomo (ust. 40), jest to środek mas m_1 i m_2; wypadkowa ciężarów takich dwu cząstek przechodzi zatem przez środek ich mas.

Każde ciało możemy podzielić w myśli na drobne cząstki o masach m_1, m_2, m_3 i t. d. Szukając wypadkowej ciężarów tych cząstek, zastępujemy naprzód ciężary mas m_1 i m_2 wypadkową ich, przechodzącą przez środek mas tych dwu cząstek; do tej wypadkowej dołączamy ciężar masy m_3, a złożywszy go z nią, otrzymamy drugą wypadkową (równą ciężarowi mas $m_1 + m_2 + m_3$), przechodzącą widocznie przez środek mas m_1, m_2 i m_3. Postępując dalej w ten sam sposób, dojdziemy do następującego wniosku: *wypadkowa ciężarów wszystkich części jakiegokolwiek ciała równa się całkowitemu jego ciężarowi (sumie ciężarów) i działa wzdłuż linii pionowej, przechodzącej przez środek masy.* Z powodu tej własności dano środkowi masy także nazwę środka ciężkości. Jednakowoż nie należy zapominać, że środek ciężkości istnieje tylko w ciałach o rozmiarach tak małych w porównaniu z kulą ziemską, żeby ciężary wszystkich części można uważać jako siły równoległe i proporcyonalne do mas.

89. Statyka ciał ciężkich. Ciało, ulegające działaniu siły ciężkości, będzie pozostawało w spoczynku, jeżeli jego ciężar wypadkowy (ust. 88) zrównoważymy siłą równą ciężarowi, działającą pionowo do góry.

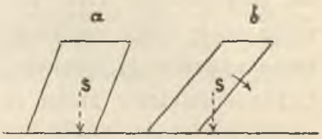
Opierając się na własności środka ciężkości, możemy przyjąć przy rozwiązywaniu zadań, odnoszących się do równowagi ciał ciężkich, że wszystkie części ciała pozbawione są ciężaru, a tylko w środku masy działa jedna siła, równa ciężarowi całego ciała. Pospolitsze sposoby, używane w celu zrównoważenia ciężarów, polegają na zawieszeniu ciała, bądź to w jednym punkcie (na sznurku, na ostrzu), bądź na osi, albo na podparciu ciała.



Ryc. 73.

W pierwszym przypadku środek ciężkości powinien leżeć na tej samej linii pionowej, na której znajduje się punkt utwierdzony (ostrze, punkt zawieszenia); jeżeli zaś ciało jest zawieszone na osi (dźwignia, waga i t. p.), wtenczas środek ciężkości ciała powinien znajdować się w płaszczyznie pionowej, przechodzącej przez oś. Na tej samej zasadzie polega sposób doświadczalny wyznaczania środka masy w ciałach stałych, mających jakąkolwiek postać. Zawieszamy ciało (ryc. 73) naprzód w punkcie jakim A, następnie w innym B i zaznaczamy w obu położeniach piony przechodzące przez punkty zawieszenia; na przecięciu się tych pionów znajduje się szukany punkt S.

Ciała podparte, n. p. ustawione na stole poziomym, dotykają podstawy co najmniej w trzech punktach. Jeżeli ciało takie ma być w równowadze, wówczas pion poprowadzony przez środek ciężkości powinien przecinać podstawę w obrębie wieloboku, wytoczonego przez skrajne punkty oparcia (ryc. 74 a); w przeciwnym razie istnieje moment niezrównoważony siły ciężkości względem jednego z boków rzeczonego wieloboku, który ciało wywraca (74 b).



Ryc. 74.

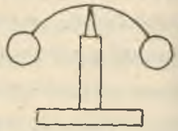
90. Rodzaje równowagi. Równowagę ciała jakiegokolwiek nazywamy stałą albo trwałą, jeżeli ono znajduje się względem sił działających w takim stosunku, że odchylone cokolwiek z położenia równowagi w jakąbądź stronę, wraca do tego położenia. Potrącone lekko, waha się około położenia równowagi, dopóki tarcie i inne opory go nie uspokoją. Przykładem takiej równowagi jest każde wahadło.

Przy opisywaniu zjawisk posługujemy się także niekiedy pojęciem równowagi niestałej; położeniem równowagi niestałej nazywamy takie położenie ciała, w którem siły działające na ciało mogłyby wprawdzie równoważyć się, gdybyśmy zdołali ustrzedz je od wszelkich, nawet najlżejszych wstrząśnień, w którem jednak ciało znajduje się w takim stosunku względem sił działających, że przy dowolnem, choćby najmniejszem, odchyleniu siły zniewalają je do trwałego opuszczenia tego położenia równowagi i do wybrania innego, stałego.

Z tego określenia wynika, że równowaga niestała może być teoretycznie pomyślana, lecz w rzeczywistości nie jest możliwa. Przypadki rzekomo niestałej równowagi, jak n. p. balansowanie laski na dolnym końcu i t. p., objaśniają się zawsze ruchami, jakie potrzeba wykonywać, celem zapobieżenia przewróceniu się ciała; w rzeczywistości nie są one wcale przypadkami równowagi.

Położenie równowagi nazywamy obojętnem, jeżeli ono sąsiaduje na wszystkie strony z innemi położeniami równowagi. Ciało, odchylone z położenia równowagi obojętnej, nie okazuje dążności ani do powrotu, ani do oddalenia się, lecz może pozostawać w spoczynku w każdem z tych sąsiadujących z sobą położeń.

Ciała ciężkie układają się w ogólności w równowadze stałej, gdy środek ciężkości zniży się do położenia możliwie najniższego; wszelkie odchylenie z tego położenia, podnosi bowiem środek ciężkości, ciężkość nie może przeto odchyleń tych ani wspomagać ani powiększać. Ryc. 75 i 76a objaśniają równowagę stałą ciała ciężkiego; ryc. 76b okazuje położenie równowagi niestałej kuli ciężkiej, w którem każde odchylenie zniża środek ciężkości — w którem więc ciało trwałe ostać się nie może. Kula, leżąca na płaszczyznie poziomej (ryc. 76c), znajduje



Ryc. 75.

a) b) c)

Ryc. 76.

się w równowadze obojętej, albowiem żadne przesunięcie po takiej płaszczyznie nie zmienia wysokości środka ciężkości.

Zadania.

163) Drążek 3-metrowy ważący 10 *Kg*, służy jako dźwignia; oś obrotu znajduje się w odległości 1 *m* od lewego końca; na prawym końcu działa na dół siła 20 *Kg*. Jakiej siły (P) potrzeba użyć przy końcu lewym, aby zrównoważyć owe 20 *Kg* i ciężar własny drążka? *Odp.* $P \times 1 = \frac{1}{2} \times 10 + 2 \times 20$.

164) Trójkąt równoboczny, wycięty z blachy i ważący 80 *gr*, zawieszony jest w taki sposób, że może obracać się około poziomej osi; osią tą jest jeden bok trójkąta. Pod jakim kątem ustawi się płaszczyzna tego trójkąta względem pionu, jeżeli na dolny wierzchołek działać będzie siła 10 *gr*, w kierunku poziomym i prostopadłym do osi?

Odp. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3 \times 10}{80}$; $\alpha = 20^0 33'$.

165) Kula ważąca Q *Kg* spoczywa w poziomym żłobku, którego ściany płaskie, pochylone są do poziomu pod kątami α i β; znaleźć siły R_1 i R_2, któremi kula ta ciśnie na obie ściany żłobka.

Odp. Siły Q, R_1, R_2 tworzą trójkąt, w którym kąty α i β znajdują się przy boku Q; przeto $R_1 = \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} Q$; $R_2 = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} Q$.

166) Kłoda drewniana, mająca postać sześcianu równobocznego, spoczywa na stole, którego pochylenie względem poziomu można zmieniać. Siła, potrzebna do pokonania tarcia, t. j. do przesunięcia kłody po stole, wynosi 40$^0/_0$ tej siły, która kłodę do stołu przyciska. Zbadać, czy

przy stopniowem pochylaniu stołu, w kierunku równoległym do krawędzi sześcianu, kłoda pierwej się zesunie, czy przewróci?

Odp. Ciężar $= Q$; pochylenie stołu $= \alpha$; siła zesuwająca $= Q \sin \alpha$; siła przyciskająca $= Q \cos \alpha$. Zesuwanie może się zacząć, gdy $Q \sin \alpha = 0{\cdot}4\ Q \cos \alpha$, t. j. $\alpha = 22^0$. Ponieważ przy tem pochyleniu pion wykreślony ze środka ciężkości przecina stół w obrębie podstawy, przeto kłoda jeszcze się nie przewróci.

167) Przy jakiem pochyleniu kłoda wywróciłaby się, gdyby zapobieżono zesunięcie się jej? *Odp.* Co najmniej 45^0.

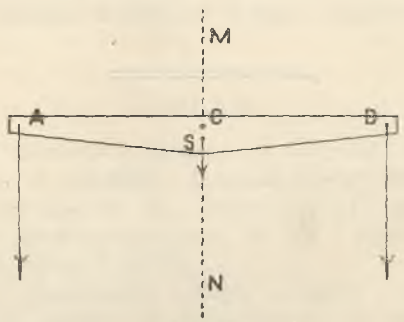
168) Jednolita półkula spoczywa na płaszczyznie poziomej w takiem położeniu, iż dotyka płaszczyzny powierzchnią zakrzywioną, a płaska część jej powierzchni jest pozioma; zbadać czy to jest położenie równowagi stałej czy niestałej.

Odp. Równowaga jest stała, gdyż środek masy leży na osi symetryi, a w każdym razie bliżej podstawy aniżeli środek płaskiej części powierzchni uważanej bryły. Wskutek tego przy każdem małem odchyleniu, środek ciężkości musi podnosić się.

ROZDZIAŁ VI.

O mierzeniu mas, przestrzeni, sił i czasu.

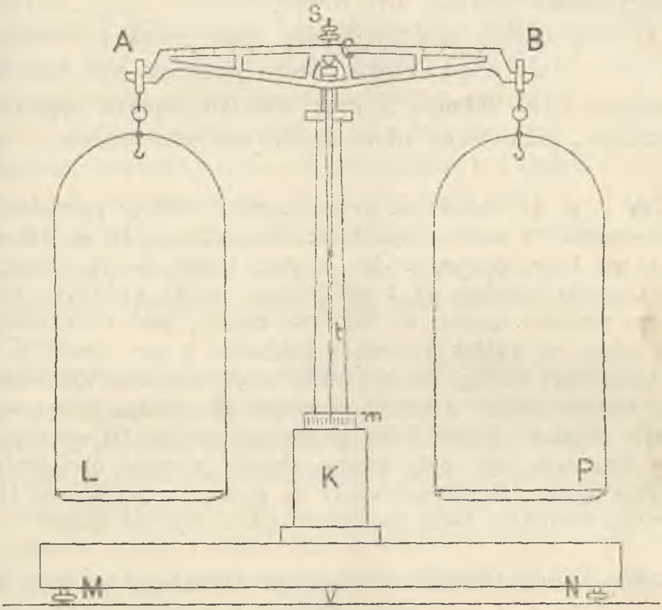
91. Waga. Zwyczajna waga jest najpospolitszem a zarazem najdokładniejszem narzędziem, używanem do mierzenia mas i ciężarów. Główną jej częścią składową jest dźwignia AB (ryc. 77), zawieszona na poziomej osi obrotu C. Dźwignia ta, zwana **belką**



Ryc. 77.

wagi, posiada kształt symetryczny względem płaszczyzny MN, przechodzącej przez oś obrotu C. Płaszczyzna MN dzieli belkę na dwie części jednakowej postaci i ciężaru, zwane ramionami wagi. Na końcach ramion umieszczone są dwie osi boczne A i B, również symetrycznie względem MN położone, służące do zawieszania ciężarów; osi te są równoległe do osi obrotu C.

Dźwignia taka, nieobciążona na końcach, ustawia się poziomo, gdy jest w równowadze, albowiem wskutek symetrycznej postaci belki i symetrycznego rozmieszczenia materyi, środek ciężkości S belki znajduje się również w płaszczyźnie symetryi i ustawia się pionowo pod osią obrotu. Jeżeli na osiach bocznych, w równych odległościach od osi obrotu, zawiesimy równe ciężary, wtenczas położenie równowagi nie zmieni się; nawzajem, poziome położenie belki będzie wskazówką, że ciężary zawieszone na końcach są równe. Użytek wagi polega na twierdzeniu, że ciała mające w tem samem miejscu na ziemi równe ciężary mają równe masy (ust. 58). Za pomocą wagi sprawdzamy przedewszystkiem równość ciężarów, a stąd wnosimy o równości mas. Ciała, mające się porównać pod



Ryc. 78.

względem masy lub ciężaru, umieszczamy na szalkach L i P (ryc. 78), zawieszonych na końcach belki, na osiach bocznych A i B. Ciężary szalek powinny być równe, albowiem wtenczas próżne szalki będą się wzajemnie równoważyły. Jeżeli więc umieścimy na obu szalkach ciała mające jakiekolwiek, byle równe, ciężary, natenczas położenie równowagi nie zmieni się, t. j. belka zajmie to samo położenie, jakie miała przy szalkach nieobciążonych.

Waga spełniająca ten warunek jest rzetelna. Każda waga urządzona w taki sposób, iż przy równych, lecz zresztą jakkolwiek wielkich obciążeniach osi bocznych A i B, położenie równowagi środka ciężkości S belki znajduje się zawsze pionowo pod osią obrotu C, czyni zadość temu wymaganiu; wówczas bowiem momenty obciążeń osi bocznych równoważą się wzajemnie, moment zaś ciężaru samejże belki jest zero. Stąd wynikają następujące warunki, zapewniające rzetelność wagi: 1) ramiona wagi, t. j. odległości osi bocznych A i B od płaszczyzny przechodzącej przez oś obrotu i środek ciężkości belki powinny być jednakowo długie; 2) ciężary szalek powinny być równe.

Do wagi należy nakoniec zbiór mas o znanych wartościach, t. zw. garnitur ciężarków, które powinny być tak dobrane, żeby można było składać z nich wszelkie żądane ciężary aż do największych, jakie waga zdoła unieść bez uszkodzenia.

Tak n. p. do ważeń nie przenoszących 100 *gr* potrzebne są następujące sztuki w zbiorze ciężarków: 50 *gr*, 20 *gr*, 10 *gr*, 10 *gr*, 5 *gr*, 2 *gr*, 1 *gr*, 1 *gr*, 5 *dgr*, 2 *dgr*, 1 *dgr*, 1 *dgr*, 5 *cgr*, 2 *cgr*, 1 *cgr*, 1 *cgr*. Ciężarki mniejsze od 1 *cgr* bywają rzadko używane. Do dokładniejszego ważenia używa się tak zw. konika; jest to kawałek drutu złotego, zgięty w kabłąk i ważący dokładnie 1 *cgr*. Jeżeli do uzupełnienia równowagi brakuje mniej aniżeli 1 *cgr* natenczas zawiesza się konika na ramieniu belki w takiej odległości od środka, żeby zrównoważenie było zupełne. Ramię belki podzielone jest na 10 równych części, a to w tym celu, aby było można określić wartość obciążenia, jakie przedstawia konik. Konik ustawiony n. p. na trzeciej kresce, licząc od osi, sprawia widocznie takie obciążenie, jak 3 *mgr* na szalce.

Skoro równość ciężarów ważonych poznajemy po tem, że waga obciążona zajmuje toż samo położenie równowagi, które zaznaczyliśmy na wadze nieobciążonej, przeto położenia te powinny być zupełnie określone — równowaga przyrządu powinna być stała. Zważywszy, że równowaga belki nie zmieniłaby się, gdybyśmy po odjęciu obu szalek umieścili na osiach bocznych masy ważące tyleż, ile ważą szalki razem z obciążeniami, zrozumiemy, że równowaga będzie stała, skoro środek ciężkości belki i owych mas dodanych znajdować się będzie poniżej obrotu osi belki (ust. 90). Wagi bywają zwykle tak urządzane, iż oś obrotu i osi boczne leżą w jednej płaszczyźnie; równowaga stała będzie wtenczas zapewniona, skoro środek ciężkości samej belki znajdować się będzie poniżej osi obrotu.

Waga, znajdująca się w równowadze stałej, waha się około położenia równowagi, na podobieństwo wahadła. Przeciążona z jednej strony, odchyla się o kąt tem większy, im większa jest przewaga; wartość tego kąta daje nam wskazówkę, ile brakuje jeszcze do zrównania obciążeń obu szalek. Różnica obciążeń szalek w wadze dobrze urządzonej równoważy się wtenczas ciężarem samejże belki.

Urządzenie wag bywa rozmaite, zależnie od wielkości ciężarów, które mają być na niej ważone i od żądanej dokładności. Opiszemy tu wagę, przedstawioną na ryc. 78, zajmującą pod względem obciążeń i dokładności miejsce średnie. Belka AB jest płaska, wykrojona z dość grubej mosiężnej blachy; daje się jej postać kraty, aby przy największej wytrzymałości ciężar był mały. Osią obrotu jest ostrze trójgraniastego pryzmatu z twardej stali, opierające się na twardych, również stalowych albo agatowych podstawkach, umieszczonych na szczycie słupa K. Na końcach belki, w A i B, przytwierdzone są podobne pryzmaty stalowe, mające ostrze równoległe do środkowego, zwrócone do góry; na nich zawiesza się szalki, za pośrednictwem strzemion, które mają wewnątrz wygładzone twarde płaszczyzny.

Dokładne rozpoznanie położenia belki ułatwia wskazówka t, zwana języczkiem wagi, złączona stale z belką, wskazująca na podziałkę m, przytwierdzoną do słupa K. Śruba s służy do podnoszenia, albo zniżania środka ciężkości belki, w miarę pożądanej czułości wagi; wykręcenie jej do góry podnosi bowiem część masy, a tem samem podnosi także środek ciężkości belki. Cały przyrząd stoi na podstawie, opartej na śrubach nożnych M i N, za pomocą których słup K ustawia się pionowo.

Czułość wagi jest tem większa, im więcej belka odchyla się z położenia równowagi, jeżeli obciążenie z jednej strony jest o pewną małą przewagę (n. p. o 1 *mgr*) większe, aniżeli z drugiej. Niech C wyobraża oś obrotu (ryc. 79) A i B ostrza, na których wiszą szalki, S środek masy belki. Oznaczmy ciężar belki przez R, ciężary zawieszone na A i B (razem z szalkami) przez P i Q, nakoniec przez θ kąt odchylenia belki z położenia równowagi. Stosując prawo momentów względem osi C położonej (jak na ryc. 79) powyżej płaszczyzny przechodzącej przez osi boczne, znajdziemy następujący warunek równowagi sił P, Q i R:

$$P\,(AD\cos\theta - CD\sin\theta)$$
$$= Q\,(BD\cos\theta + CD\sin\theta) + R\,.\,CS\sin\theta.$$

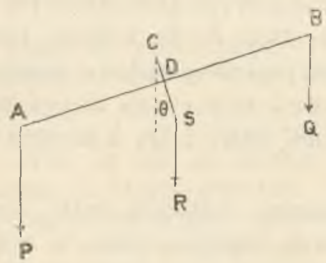
Z czego wynika:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{AD \,.\, P - BD \,.\, Q}{CS \,.\, R + CD\,(P + Q)}.$$

Ponieważ długości ramion wagi powinny być równe, przeto napiszemy tu: $AD = BD = l$, wskutek czego będzie:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{l\,(P - Q)}{CS \,.\, R + CD\,(P + Q)}.$$

Równanie to okazuje, że przy pewnej przewadze: $P - Q$, belka odchyli się tem więcej z położenia poziomego, im dłuższe są ramiona (l), im bliżej osi leży środek ciężkości belki (CS), im lżejszą jest belka (R),



Ryc. 79.

im mniejszą jest CD, t. j. im mniejszą jest odległość osi obrotu od płaszczyzny przechodzącej przez osi boczne, nakoniec, im mniejsze ciężary $(P + Q)$ ważymy. [Przy takiem urządzeniu wagi czułość m a l e j e , gdy obciążenie wzrasta. Jeśliby waga była tak zbudowana, że oś C przypadałaby poniżej płaszczyzny przechodzącej przez osi boczne A i B wówczas otrzymalibyśmy z warunków równowagi sił P, R i Q:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{l\,(P - Q)}{CS \,.\, R - CD\,(P + Q)}.$$

W tym przypadku czułość wagi r o ś n i e, gdy obciążenie wzrasta. Badając więc zależność czułości wagi od obciążenia, możemy czasem stwierdzić, że czułość, która początkowo z obciążeniem rosła, od pewnej granicy obciążeń począwszy, zaczyna ze wzrostem obciążeń maleć. Zdarzy się to wówczas, gdy oś C, położona pierwotnie tuż poniżej płaszczyzny przechodzącej przez A i B, znajdzie się wskutek nieznacznego wygięcia belki powyżej tej płaszczyzny]. Zwykle buduje się wagi tak, żeby trzy osie A, B i C leżały w jednej płaszczyznie, t. j. żeby było $CD = 0$. W tym razie jest:

$$\text{tg}\,\theta = \frac{l(P-Q)}{CS\,.\,R},$$

t. j. odchylanie zależy tylko od przewagi $P - Q$, a nie zależy od wielkości ciężarów ważonych; innemi słowy: czułość nie zależy od obciążenia.

Warunki potęgujące czułość wagi nie dają się pogodzić z wielką stałością równowagi. Aby zwiększyć pewność i szybkość ważenia, unika się zwykle zbytecznej czułości, t. j. umieszcza się środek ciężkości belki niezbyt blizko osi obrotu.

Ważenie. Waga należy do najdokładniejszych przyrządów mierniczych. Za pomocą dobrej wagi, zachowując odpowiednie ostrożności, można odważyć jeden *kg*, nie popełniając błędu większego, jak 0·01 *mgr*; dokładność taka określa się stosunkiem 1 : 100 000 000. Pospolitsze wagi dają 1 : 1 000 000. — W dokładnych ważeniach nie można polegać na tem, że długości ramion belki zostały przy sporządzeniu wagi zupełnie zrównane; aby uniknąć błędu, któryby z małej ich nierówności wynikł, waży się ciało dwukrotnie, kładąc je raz na prawej, drugi raz na lewej szalce. Ciężary znalezione w obu położeniach niech będą: P_1 i P_2; p i l niech oznaczają długości prawego i lewego ramienia, P prawdziwy ciężar ciała. Natenczas: $P_1\,.\,l = Pp$; $P_2\,.\,p = Pl$, skąd $P = \sqrt{P_1\,P_2}$, tudzież $\frac{p}{l} = \sqrt{\frac{P_1}{P_2}}$.

Inny sposób polega na użyciu t. zw. tary; ciało równoważy się jakiemikolwiek ciężarkami (śrut, okruchy granatów i t. p.), a następnie na miejsce ciała kładzie się znane ciężarki, dopóki wskazówka wagi nie zajmie dawniejszego położenia.

92. Gęstość i ciężar właściwy. Za pomocą wagi można się przekonać, że ciała mające jednakowe objętości miewają wogóle rozmaite masy. To dowodzi, że materya w różnych ciałach posiada rozmaity stopień zbitości, zwartości, czyli — jak to zawsze nazywać będziemy — gęstości. Miarą gęstości jakiegokolwiek ciała jest masa przypadająca na jednostkę objętości. Sporządźmy n. p. z różnych materyałów bryłki mające jednaką objętość 1 cm^3 i odważmy je po kolei na wadze; liczby znalezione wskażą nam odrazu gęstości tych ciał.

Wyznaczenie gęstości wymaga zawsze odmierzenia masy i objętości. Niech m oznacza masę jakiego ciała, v jego objętość, natenczas na jednostkę objętości przypadać będzie masa $\frac{m}{v}$. Oznaczywszy zatem przez d gęstość, otrzymamy:

$$d = \frac{m}{v}.$$

Powyższe równanie stosuje się bezpośrednio do ciał jednolitych, których gęstość jest nawskroś jednakowa. Ciała niejednolite (n. p. granit) mają w różnych miejscach różne gęstości. Wziąwszy dużą objętość takiego ciała i obliczywszy stosunek $\frac{m}{v}$, otrzymamy tak zw. gęstość średnią albo przeciętną bryły poddanej pomiarowi.

Jednostką gęstości w układzie bezwzględnym miar jest 1 gr/cm^3; t. j. ciało, którego centymetr sześcienny waży 1 gr, posiada gęstość $= 1$. Stosownie do określenia masy jednego grama (ust. 6), woda w temperaturze 4^0 C. posiada gęstość $= 1$.

Gęstość tego samego ciała zmienia się cokolwiek, zależnie od temperatury; jest to następstwem zmian objętości, jakie sprawia ogrzanie lub oziębienie. Masa nie zależy od temperatury.

Objętość właściwa. Niekiedy zdajemy sobie sprawę ze zwartości materyi, porównywając objętości, jakie zajmują jednakowe masy różnych materyałów. Objętością właściwą (s) pewnego materyału nazywamy objętość przypadającą na jednostkę masy (por. ryc. 2). Ponieważ widocznie $s = \frac{v}{m}$, przeto $s = \frac{1}{d}$, t. zn. *objętość właściwa jest odwrotnością gęstości.*

Ciężar właściwy. Jeżeli d oznacza gęstość jakiego ciała, natenczas jednostka objętości posiada masę d; ciężar jej równa się tedy iloczynowi z gęstości i natężenia ciężkości w danem miejscu. Oznaczywszy ciężar jednostki objętości przez δ, otrzymamy:

$$\delta = d \,.\, g.$$

Ciężar jednostki objętości δ nosi nazwę ciężaru właściwego ciała. W ciężarowym układzie miar (ust. 65) jednostką ciężarów (sił) jest gram; jako wynik ważenia ciała na wadze otrzymujemy bezpośrednio ciężar jego wyrażony w gramach. Z tego wynika, że ciężar właściwy δ wyraża się w układzie ciężarowym tą samą liczbą, która wyraża masę jednostki objętości, a więc gęstość, w układzie bezwzględnym.

Przykład. W temperaturze 20^0 odmierzono ćwierć litra (250 cm^3) rtęci, a zważywszy ją znaleziono: 3 kg $386\frac{1}{2}$ gr. To daje $d = \frac{3386{\cdot}5}{250} = 13{\cdot}546\ gr/cm^3$. Objętość właściwa wynosi $s = \frac{250}{3386{\cdot}5} = 0{\cdot}07382\ cm^3/gr$. Nakoniec ciężar właściwy $\delta = 13{\cdot}546 \times 981 = 13289\ dyn/cm^3$, albo, w układzie ciężarowym, $\delta = 13{\cdot}546\ gr/cm^3$.

93. Gęstość względna. Zwyczajne sposoby mierzenia gęstości polegają na porównaniu gęstości dwu ciał; jeżeli gęstość jednego z nich jest znana, wtenczas znajdziemy łatwo gęstość drugiego. Jako wynik bezpośredni pomiaru otrzymujemy atoli nie szukaną gęstość ciała badanego, lecz stosunek gęstości jego d do gęstości d_0 drugiego ciała, z którem pierwsze porównywamy. Stosunek ten:

$$\varrho = \frac{d}{d_0}$$

nazywa się gęstością względną pierwszego ciała względem drugiego. Jest to liczba niemianowana, niezależna od jednostek miary, jest bowiem stosunkiem dwu wielkości tego samego rodzaju. Zwykle porównywa się gęstości różnych ciał z gestością wody mającej temperaturę 4^0 C. Ponieważ w układzie bezwzględnym miar gęstość wody równa się jednostce, przeto *gęstości względne ciał względem wody, mającej temperaturę 4^0 C, wyrażają się temi samemi liczbami, jak gęstości w układzie bezwzględnym.* Zważywszy, że gęstość określa się jako stosunek masy do objętości, przekonywamy się, że:

$$\varrho = \frac{m}{v} : \frac{m_0}{v_0} = \frac{mv_0}{m_0 v}.$$

Z tego wynikają następujące prawidła: 1) (gdy $v = v_0$) gęstość względna równa się stosunkowi mas, mających równe objętości, albo: 2) (gdy $m = m_0$) odwrotnemu stosunkowi objętości, odpowiadających równym masom.

Jeżeli chodzi o ciała bardzo rozrzedzone w porównaniu z wodą, jakiemi są gazy lub pary, wtenczas wyznaczamy gęstości względne częściej w porównaniu z powietrzem albo z wodorem; liczby wynikające z porównania gęstości są wówczas większe i łatwiejsze do zapamiętania. — Mierzenie gęstości względnej ciał ciekłych i stałych uskutecznia się najprościej za pomocą t. zw. piknometrów (gr.: pyknos = gęsty); są to flaszeczki szklane (ryc. 80) o ściśle określonej pojemności, opatrzone szczelną zatyczką szklaną. Waży się je naprzód próżne, następnie z wodą, nakoniec z ciałem badanem. Postępowanie objaśni następujący przykład: Piknometr próżny waży: 8·213 *gr*; napełniony wodą: 58·724 *gr*; zawierający obok wody 14·721 *gr* drutu żelaznego waży 71·558 *gr*. Stąd obliczamy: masa wody pierwszym razem: 50·511 *gr*, zatem pojemność piknometru: $\frac{50 \cdot 511}{d_0}$ cm^3, gdzie d_0 oznacza gęstość wody. Masa wody drugim razem: $71 \cdot 558 - (14 \cdot 721 + 8 \cdot 213) = 48 \cdot 624$ *gr*, jej objętość $\frac{48 \cdot 624}{d_0}$ cm^3; zatem ubyło wody: $\frac{1 \cdot 887}{d_0}$ cm^3, a objętość tę zastąpiło żelazo. Gęstość żelaza wynosi przeto: $d = \frac{14 \cdot 721}{1 \cdot 887} d_0$; gęstość względna w porównaniu z wodą użytą do pomiaru: $\varrho = \frac{d}{d_0} = \frac{14 \cdot 721}{1 \cdot 887} = 7 \cdot 8$. Zamiast wody można oczywiście użyć innej jakiej cieczy, byleby gęstość jej d_0 była znana.

Ryc. 80.

Tablica gęstości.

(w gr/cm^3).

Platyna	21·50	Woda (0^0)	0·9999
Złoto	19·32	» (10^0)	0·9997
Rtęć (^{0})	13·5956	» (20^0)	0·9983
Rtęć (20^0)	13·5463	Lód (0^0)	0·9167
Ołów	11·37	Oliwa	0·915
Srebro	10·35	Alkohol (20^0)	0·789
Miedź	8·92	Drzewo dębowe	0·82
Mosiądz	8·44	» bukowe	0·79
Żelazo	7·86	» jodłowe	0·56
Stal	7·6—7·8	Korek	0·24
Żelazo lane	7·1—7·7	Powietrze (suche, 0^0, barometr 760 *mm*)	0·001293 $\left(\frac{1}{773 \cdot 4}\right)$
Cynk	7·15	Powietrze (w zwykłych warunkach atmosferycznych około)	0·00116 $\left(\frac{1}{860}\right)$
Kwarc	2·653	Wodór (0^0, ciśn. 760 *mm*)	0·0000899
Glin (aluminium)	2·67		
Szkło	2·5—2·7		
Kwas siarczany zg.	1·843		
» azotowy zg.	1·530		
Woda (4^0)	1·000		

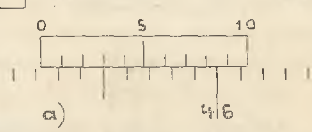
94. Objętość. Wymierzanie objętości ciał, nie mających prostych, regularnych kształtów uskutecznia się również za pomocą wagi. Jeżeli gęstość ciała jest znana, natenczas, zważywszy je, możemy obliczyć objętość według wzoru $v = \frac{m}{d}$. Nie znając gęstości. możemy wyznaczyć objętość ciała przez zważenie wody albo innej cieczy o znanej gęstości, która posiada taką samą objętość, jak ciało; można do tego użyć piknometru (ust. 93).

Celem wymierzenia wewnętrznej objętości czyli pojemności v naczyń, napełnia się je wodą albo rtęcią, o temperaturze dokładnie określonej; jeżeli m oznacza masę rtęci (gr), która się mieści w naczyniu, d jej gęstość, wtedy $v = \frac{m}{d}$. W temperaturze t^0 Cels., nie wiele się różniącej od 20^0, znaleziono dla gęstości rtęci wyrażenie:

$$d = \frac{13{\cdot}5956}{1+0{\cdot}00018137\,t}\,gr/cm^3;\ \text{zatem}\ v = \frac{m}{13{\cdot}5956}\,(1+0{\cdot}00018137\,t)\ cm^3.$$

Wyznaczywszy w ten sposób pojemność naczynia, posiadamy **miarkę**, za pomocą której możemy bezpośrednio odmierzać objętości cieczy ciał sypkich tudzież gazów.

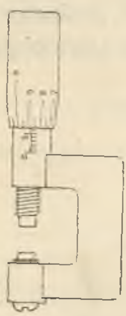
Ryc. 80.



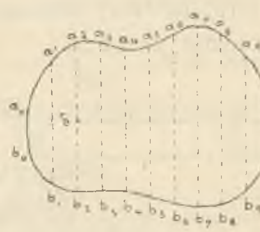
Ryc. 81a.

95. Długości i pola. Jednostki długości należą do rzędu miar zasadniczych (ust. 7), przyjętych na podstawie powszechnej umowy; mając wymierzać rozmiary ciał, powinniśmy zatem posiadać podziałkę wzorową albo jej rzetelną kopię. Typem narzędzi, służących do mierzenia rozmiarów ciał, a raczej do porównywania ich z podziałkami, jest cyrkiel. Na podziałce nie można jednakowoż odczytywać każdej dowolnej długości. Jeżeli podziałka dzielona jest n. p. na milimetry, wówczas można odczytać bezpośrednio tylko liczbę całkowitych milimetrów. Aby znaleźć części ułamkowe tych najmniejszych odstępów podziałki, używa się **noniusza**, albo **śruby mikrometrycznej**.

Noniusz nie mierzy również każdej dowolnej długości, wszelako za pomocą tego urządzenia możemy posunąć dokładność pomiaru aż do pewnego ułamka najmniejszego odstępu podziałki. Ryc. 81 przedstawia podziałkę milimetrową, połączoną z cyrklem i noniuszem. Noniusz N jest to podziałka pomocnicza ruchoma wzdłuż podziałki głównej, o długości 9 *mm*, podzielona na 10 części; długość mierzona sięga na podziałce głównej aż do tego miejsca, które wskazuje kreska 0 na noniuszu. Długość ta obejmuje pewną liczbę całych milimetrów i ułamek. Pierwszą odczytamy wprost, ułamek zaś na podziałce noniusza. Jeżeli n. p. (jak na ryc. 81, albo w powiększeniu 81 a) kreska 3 na noniuszu zejdzie się z jedną z kresek podziałki głównej, wówczas do znalezionej liczby całych milimetrów (452) należy dodać jeszcze 0·3 *mm*; przedmiot mierzony AB (ryc. 81) posiada zatem długość 452·3 *mm.*



Ryc. 82.



Ryc. 83.

Wyższy stopień dokładności można uzyskać za pomocą **śruby mikrometrycznej**. Za pośrednictwem tego narzędzia pomiar długości sprowadza się do pomiarów kątów. Jeżeli bowiem obrócimy wrzeciono śruby w mutrze o 360°, natenczas posunie się ono naprzód o jeden krok, t. j. o odstęp dwu sąsiednich gwintów. Połączywszy wrzeciono z kołem albo z bębnem, którego obwód podzielony jest n. p. na 100 części, zdołamy odmierzyć $^1/_{100}$ część całkowitego obrotu, a zatem długość równą $^1/_{100}$ kroku śruby. Ryc. 82 wyobraża zastosowanie śruby mikrometrycznej w **mikrometrze** (gr. mikron = mały, metron = miara) używanym do mierzenia grubości płyt, średnicy drutów i t. p. Podziałka i noniusz, albo śruba mikrometryczna, są to główne części wszelkich przyrządów służących do mierzenia długości. Wspominamy tu o dwu ważniejszych. Do mierzenia długości linii pionowych, a głównie do wyznaczania różnicy wysokości poziomów, przechodzących przez pewne dwa punkty (nie leżące koniecznie na jednym pionie) służy katetometr (gr. kathetos = pionowy). Jest to podziałka pionowa, przymocowana do słupa, obracającego się około pionowej osi, którą ustawia się pionowo za pomocą libelli (porów. ryc. 46). Wzdłuż podziałki można przesuwać do góry i na dół lunetę połączoną z noniuszem, na której również libella jest osadzona. Za pośrednictwem lunety celuje się do punktów, których różnicę wysokości mamy zmierzyć. Do celowania służą nitki pajęcze, umieszczone wewnątrz lunety, skrzyżowane pod kątem prostym; patrząc przez lunetę, widzimy owe nitki jednocześnie z obrazem przedmiotu, ku któremu luneta jest skierowana. — Do porównywania miar długości służy komparator. Nowsze przyrządy tego rodzaju składają się z dwu mikroskopów, ustawionych stale i nieruchomo w tej, mniej więcej od siebie odległości, jaka odpowiada długości przedmiotu. który mamy zmierzyć. Mikroskopy te, zaopatrzone są wewnątrz w nitki pajęcze służące do celowania; nitki te nie są jednak nieruchome, lecz oprawione są w ramki, które można przesuwać za pomocą śruby mikrometrycznej. Naprzód nastawia się nitki na te punkty widoczne w mikroskopie. których odległość ma być mierzona; następnie kładzie się na miejsce przedmiotu podziałkę, na której odczytuje się bezpośrednio całkowite milimetry, a pozostałe ułamki odmierza się za pomocą śrub mikrometrycznych. Przyrządami tego rodzaju można z łatwością określić długość metra z dokładnością 1 : 1 000 000 t. zn. 1 μ a nawet 50 $\mu\mu$.

Pomiary powierzchni ograniczają się głównie do wymierzania wielkości pól płaskich. Do pomocy używa się niekiedy osobnych narzędzi, t. zw. planimetrów. Zazwyczaj wystarcza podzielić dane pole na paski jednakowej szerokości, szeregiem linij równoległych (ryc. 83) i obliczyć sumę pól tych pasków, uważając je bądź jako prostokąty, bądź jako trapezy. Dokładniejszy wynik daje reguła Simpsona, której uzasadnienie należy do geometryi; uważa się mianowicie krótsze boki pasków jako łuki paraboliczne. Stosownie do tej reguły dzielimy dane pole na parzystą liczbę pasków równej szerokości δ. Oznaczywszy dalej przez y_0 i y_n długości skrajnych linii $a_0 b_0$ i $a_n b_n$ (ryc. 83); przez Y' sumę długości wszystkich linij nieparzystych, t. j. $a_1 b_1 + a_3 b_3 + \ldots$; przez Y'' sumę parzystych $= a_2 b_2 + a_4 b_4 + \ldots$; obliczamy wielkość pola S według wzoru:

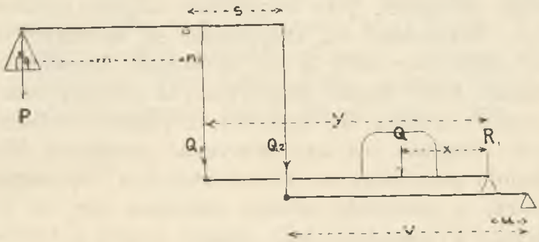
$$S = \frac{1}{3} \delta [y_0 + 4 Y' + 2 Y'' + y_n].$$

Zadania.

169) Ważąc kawałek mosiądzu, znaleziono następujące liczby: ciało na prawej szalce, ciężar: 86·5428 *gr*; ciało na lewej szalce, ciężar: 86·5432 *gr*. Znaleźć ciężar prawdziwy i stosunek długości ramion wagi. *Odp.* 86·5430; pr. : lew. = 1 : 1·00000231.

170) Dowieść, że w t. zw. wagach pomostowych (ryc. 84) stosunek ciężaru ciała Q, do ciężarów równoważących na szalce P, nie zależy od tego, w którem miejscu na pomoście ciało leży?

Odp. $Q_1 = Q\frac{x}{y}$; $R_1 = Q\frac{y-x}{y}$; $Q_2 = R_1\frac{u}{v} = Q\frac{y-x}{y}\frac{u}{v}$. Jeżeli zatem belka jest w równowadze, to musi być $Pm = Q_1 n + Q_2 s$, czyli $Pm = \frac{Q}{y}\left[nx + (y-x)\frac{us}{v}\right] = Q\frac{us}{v} + x.\frac{Q}{y}\left(n - \frac{us}{v}\right)$. Jeżeli stosunek $\frac{P}{Q}$ ma być niezależny od x, to jest od położenia ciała na pomoście wagi, natenczas należy wagę tak zbudować, żeby było:



Ryc. 84.

$n - \frac{us}{v} = 0$, t. j. $\frac{n}{s} = \frac{u}{v}$. Wtenczas mamy $Pm = Q\frac{us}{v} = Qn$. Jeżeli nadto będzie $n = {}^1/_{10}\ m$, waga będzie dziesiętną czyli decymalną, gdyż $P = {}^1/_{10}\ Q$.

171. Pełna kula ołowiana o średnicy 10 *cm* waży 5953·28 *gr*; obliczyć gęstość ołowiu.

Odp. $d = \frac{3 \times 5953{\cdot}28}{4 \times 5^3 \times 3{\cdot}14159} = 11{\cdot}37\ gr/cm^3$.

172) Ile wynosi objętość właściwa ołowiu?

Odp. 0·08795 cm^3/gr

173) Ile wynosi ciężar właściwy ołowiu?

Odp. 11154 dyn/cm^3, albo 11·37 Gr/cm^3.

174) Obliczyć długości boków ciężarków sześciennych z kwarcu, żelaza, mosiądzu, ołowiu, platyny — ważących po 1 *gr*.

Odp. 7·22; 5·03; 4·91; 4·45; 3·60 *mm*,

175) Obliczyć gęstość średnią mieszaniny, składającej się (na wagę) z 80% piasku kwarcowego i 20% wody.

Odp. Jeżeli oznaczymy przez s_1 i s_2 objętości właściwe tych materyałów, przez s objętość właściwą mieszaniny, natenczas: $s = 0{\cdot}8\ s_1 + 0{\cdot}2\ s_2$, tudzież $d = \frac{1}{s}$; zatem $d = 1{\cdot}994$.

176) Ile waży sześcian żelazny, którego boki mają 80 *cm* długości. *Odp.* 4·02 ton.

177) Sześć metrów drutu mosiężnego waży 9·3272 *gr*; obliczyć średnicę tego drutu, przyjąwszy 8·491 gr/cm^3 jako gęstość mosiądzu. *Odp.* 0·4828 *mm.*

178) Gęstość względną soli kamiennej w porównaniu z naftą (której gęstość względna względem wody = 0·769), znaleziono = 2·796; ile wynosi gęstość względna soli w porównaniu z wodą? *Odp.* 2·796 × 0·769 = 2·150.

179) Obliczyć pojemność naczynia, które w temperaturze 18° mieści 87·352 *gr* rtęci. *Odp.* 6·4462 cm^3.

96. Mierzenie sił. *Dynamometr i wahadło.* Pomiar natężenia siły można wykonać dwojakim sposobem: statycznie przez zrównoważenie danej siły inną jaką siłą znanego natężenia, n. p. ciężarem znanym, albo sprężystością sprężyny o znanem napięciu — albo kinetycznie, przez określenie ruchu, jaki siła ta zdolna jest wytworzyć w pewnym czasie (ust. 39).

Do określeń statycznych można użyć n. p. wagi; do jednego ramienia przykłada się badaną siłę (dajmy na to przyciąganie elektryczne lub magnetyczne), na drugiem zawiesza się odpowiedniej wielkości ciężarek. Potrzebna jest tylko znajomość masy ciężarka, tudzież natężenia ciężkości *g* w miejscu pomiaru.

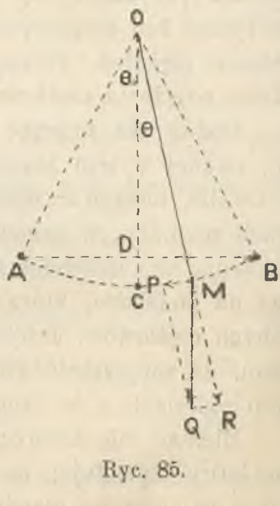
Można też mierzyć siły statycznie zapomocą wagi sprężynowej, zwanej w tem zastosowaniu d y n a m o m e t r e m (greck. dynamis = siła, metron = miara). Urządzenie tych przyrządów, w szczegółach rozmaite, w zasadzie bywa zawsze jednakie (n. p. ryc. 47). Wskazują one natężenie siły większem lub mniejszem ugięciem sprężyny na podziałce, którą sprawdza się raz na zawsze za pomocą znanych ciężarków. Jeżeli chodzi o ścisłe pomiary, trzeba liczyć się z tem, że sprężystość zmienia się cokolwiek, zwłaszcza po silniejszych ugięciach, i że zależy od temperatury.

Mierząc siłę kinetycznie, wnioskujemy o jej natężeniu z ruchu, który wywołuje; tą drogą określono n. p. przyciąganie, które słońce wywiera na planety (ust. 20, 120).

W badaniach fizycznych jedyna niemal praktyczna droga kinetycznego określenia siły polega na zastosowaniu ruchu wahadłowego; powtarzając się ustawicznie, w równych odstępach czasu, ruch ten może być odmierzony dokładniej, aniżeli jakikolwiek inny. W a h a d ł e m nazywamy wogóle jakąkolwiek dostatecznie sztywną bryłę, osadzoną na osi obrotu, z możliwie małem tarciem, poddaną działaniu sił zewnętrznych, zdolnych utrzymywać ją w równowadze trwałej. Potrącona, wykonywa około położenia równowagi wahania, w jednę i drugą stronę, tem dłużej, im mniejsze jest tarcie, opór powietrza otaczającego i t. p. O ile odchylenia bryły z położenia równowagi są dostatecznie małe, można zawsze przyjąć, że siła niezrównoważona, pędząca bryłę odchyloną ku temu położeniu, zwiększa się proporcyonalnie do wielkości odchylenia. Wtenczas i przyśpieszenie będzie proporcyonalne do odchylenia, co jest, jak wiemy (ust. 24), cechą ruchu drgającego prostego.

Małe ruchy wahadeł są zatem drganiami prostemi, albo składają się z drgań prostych. Sprawdzimy to zaraz na wahadłach, poruszanych siłą ciężkości. Te są najważniejsze. Wymierzywszy bowiem ciężkość sposobem kinetycznym w miarach bezwzględnych, możemy następnie porównywać z nią inne siły, metodami statycznemi.

97. Wahadło proste. Jako przygotowanie do teoryi ogólnej wahadeł wyłożymy naprzód teoryę t. zw. wahadła prostego, wahającego się pod wpływem ciężkości. Wahadłem prostem nazywamy niezmiernie małą cząstkę materyi M (ryc. 85) o masie m, zawieszoną na nieskończenie lekkiej, nierozciągliwej nici MO (długość $= l$) uwiązanej trwale w nieruchomym punkcie O. Odchylona z położenia równowagi C, n. p. do A, i puszczona tam swobodnie, cząstka wahać się będzie po obu stronach pionu OC, między skrajnemi położeniami A i B. Ruch jej jest bowiem spadaniem i wznoszeniem się po równi łukowo wygiętej ACB. Prędkość v_0, jakiej nabywa w najniższym punkcie C, spadając z A, równa się prędkości, jakiejby nabyła, spadając pionowo z tej samej wysokości (ust. 63), a więc $v_0 = \sqrt{2g \cdot DC}$; a że $DC = l - l\cos\theta_0$ (jeśli θ_0 oznacza kąt odchylenia nici od pionu, w skrajnem położeniu A), przeto:



Ryc. 85.

$$v_0 = \sqrt{2gl(1 - \cos\theta_0)} = 2\sin\frac{\theta_0}{2}\sqrt{gl}.$$

Prędkość ta wystarcza właśnie (o ile nie ma tarcia lub oporu powietrza) do wyrzucenia uważanej masy w górę, do równie wysoko położonego punktu B (ust. 36). Stąd cząstka spada znowu do C i wznosi się do A i t. d. Ruch powtarza się zatem ustawicznie w jednaki sposób, w równych odstępach czasu. Czas T, potrzebny do dwukrotnego przebycia łuku AB (tam i z powrotem), nazywa się okresem wahania, jego połowa $\frac{T}{2}$ czasem wahania. Urządzenie to w rzeczywistości nie jest oczywiście wykonalne; ułatwi nam ono jednak zrozumienie dynamiki wahadeł rzeczywistych.

Okażemy naprzód, że jeśli wahania są małe, wtedy siła, ciągnąca cząstkę wzdłuż toru ku położeniu równowagi C, jest proporcyonalna do każdoczesnego odchylenia CM, a zatem, że ruch uważany jest drganiem prostem.

Istotnie, w położeniu jakiemkolwiek M, gdy nić odchylona jest od pionu o kąt θ, działa na cząstkę napięcie nici MO, prostopadle do toru — nie dające zatem żadnej składowej w kierunku toru — tudzież ciężar $= mg$ (MQ na ryc. 85) pionowo na dół. Rozłożywszy ciężar MQ na składową, styczną do toru MP, i prostopadłą MR, dostrzeżemy natychmiast, że jedynym objawem tej drugiej składowej jest wyprężenie nitki; na ruch po łuku nie ma ona żadnego wpływu. Składowa styczna ma wartość $MP = mg \sin \theta$, albo inaczej $MP = - mg \sin \frac{s}{l}$; tutaj l oznacza długość nitki, s długość łuku CM, odpowiadającego kątowi θ. Łuk ten liczyć będziemy od C, dodatnio w jednę stronę, ujemnie w przeciwną; znak (—) wskazuje, że siła i odchylenie mają zawsze przeciwne kierunki.

Założmy, iż kąt θ jest nawet w skrajnych odchyleniach, gdzie dochodzi do θ_0, zawsze tak mały, że można położyć, z wystarczającem przybliżeniem, zamiast wstawy $\sin \theta$, samo θ, czyli $\frac{s}{l}$. Wtenczas będzie:

$$MP = - \frac{mg}{l} . s.$$

O ile kąt θ_0, jest mały, wtenczas i łuk AB różnić się będzie bardzo nieznacznie od odcinka prostego. Siła poruszająca cząstkę po tym odcinku jest zatem zawsze proporcyonalna do każdoczesnego jej odchylenia s i zawsze skierowana ku środkowi C odcinka. Też same cechy mieć będzie przyśpieszenie ruchu $= \gamma$, wywołane przez nią, gdyż siła $MP = m\gamma$, skąd wartość przyśpieszenia:

$$\gamma = -\frac{g}{l} \cdot s.$$

Widzimy istotnie, że założenie małości odchyleń prowadzi do zasadniczej cechy ruchów drgających prostych, wyrażonej w ust. 24 wzorem (2) na przyśpieszenie:

$$\gamma = -\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot s.$$

Od wartości spółczynnika $g : l$ zależy, jak widać, wartość okresu drgania, albo wahania T. Z porównania ostatniego wzoru z poprzedzającym wypada

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{1}$$

Wzór ten, dowiedziony z zastrzeżeniem, że wahadło odchyla się bardzo mało z położenia równowagi, streszcza w sobie następujące prawa:

1) *Okres wahań nie zależy od wielkości, ani od rodzaju masy cząstki wahającej się*; jest to następstwem prawa proporcyonalności ciężarów do mas (ust. 57). Większej masie odpowiada ciężar większy w tym samym stosunku; przyśpieszenie, zależne od stosunku ciężaru do masy, a więc i okres, nie będą zatem zależały od masy. Wahadła tej samej długości, obciążone kulkami z ołowiu, żelaza, korka, szkła i t. p., mają istotnie w próżni jednakowe okresy. Doświadczenie to stanowi bardzo ścisły dowód prawdziwości pomienionego prawa ciężkości.

2) *Okres wahań nie zależy również od amplitudy, czyli obszerności odchyleń*, (byle one były małe). Własność ta, dostrzeżona już przez Galileusza, nazywa się isochronizmem wahadła; toż samo wahadło, mocniej czy słabiej potrącone, waha się w tym samym okresie.

3) *Okres jest proporcyonalny do pierwiastka z długości wahadła*; wahadła n. p. 4, 9, 16 razy dłuższe mają okresy 2, 3, 4 razy dłuższe.

4) *Okres jest odwrotnie proporcyonalny do pierwiastka z natężenia ciężkości;* z tego powodu wahadła jednakowej długości mają cokolwiek różne okresy w różnych miejscach kuli ziemskiej.

Wymienione własności wahadła czynią je znakomitym przyrządem mierniczym. Od dobrego przyrządu wymagamy bowiem, żeby przy wykonaniu i użyciu jego było jak najmniej warunków do dopełnienia i zastrzeżeń do uwzględnienia; istotnie, stosując wahadło do pomiaru natężenia ciężkości nie potrzebujemy troszczyć się ani o dobór stosownego materyału, ani o zachowanie jakiejś określonej amplitudy wahań. Wystarczy zmierzyć długość l i okres T wahadła, a otrzymamy odrazu szukaną siłę (tu ciężkość):

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}. \tag{2}$$

Oprócz wahań prostolinijnych może wahadło proste wykonywać również ruchy po liniach krzywych. Jeżeli wahadło odchylone potrącimy w dowolnym kierunku ukośnym, wówczas ono wahać się będzie na prawo i lewo, ale jednocześnie, w tym samym okresie, także naprzód i wstecz. Ruch jego będzie wypadkową dwu wahań prostych, wskutek tego odbywać się będzie po e l i p s i e (ust. 27). Można też potrącenie boczne tak umiarkować, żeby masa zawieszona krążyła jednostajnie po kole (ust. 28). Okres wahadła kolistego można obliczyć bezpośrednio w następujący sposób: na dolny koniec wahadła działają ciągle trzy siły równoważące się wzajemnie, mianowicie, ciężar mg cząstki pionowo na dół; siła odśrodkowa $\frac{4\pi^2 am}{T^2}$ w kierunku poziomym ($a =$ promieniowi koła), tudzież napięcie nici. Ustawiwszy równanie wyrażające, że powyższe trzy siły równoważą się (porówn. ryc. 37, ust. 48), t. j. że wypadkowa pierwszych dwu działa w kierunku trzeciej (nici); przyjąwszy nadto, że kąt odchylenia nici od pionu jest bardzo mały, otrzymamy łatwo wartość okresu podaną we wzorze (1).

Ściśle biorąc, wahania wahadła są tylko wtenczas niezależne od amplitudy (isochroniczne), gdy największe odchylenie kątowe od pionu $= \theta_0$ jest nieskończenie małe. W przypadku odchyleń większych rachunek wyższy daje:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left(1 + \tfrac{1}{4}\sin^2 \tfrac{1}{2}\theta_0 + {}^9/_{64}\sin^4 \tfrac{1}{2}\theta_0 + \ldots\right).$$

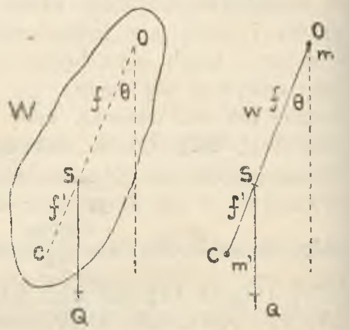
Wzoru tego używa się, ażeby, zmierzywszy T, obliczyć wartość $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, t. j. okres odpowiadający amplitudzie nieskończenie małej (zredukowany).

98. Wahadło sekundowe. Wahadło, którego okres wynosi dwie, czas wahania jednę sekundę, nazywa się wahadłem sekundowem. Długość jego, zależna od wartości g, nie jest oczywiście wszędzie jednakowa. Według (1) mamy:

$$l = \frac{gT^2}{4\pi^2}. \tag{3}$$

Jeżeli n. p. (jak u nas) $g = 981$ cm/sek^2, natenczas, biorąc $T = 2$ sek, znajdziemy: $l = \frac{g}{\pi^2} = 99{\cdot}3961$ cm, jako długość wahadła prostego, bijącego sekundy. Wahadło może tedy służyć bądź do mierzenia sił, bądź do pomiaru czasów.

99. Wahadło złożone jest to bryła jakiejkolwiek postaci' wahająca się pod wpływem własnego ciężaru i bezwładności, około poziomej osi. Oś obrotu powinna oczywiście znajdować się powyżej środka ciężkości. Wahadło takie można uważać jako zbiór wielkiej liczby wahadeł prostych, stale z sobą związanych. Jedne są krótkie i usiłują wahać się często; inne dłuższe mają właściwy sobie dłuższy okres: wahadło złożone przybiera pewien okres pośredni. Dowiedziemy zaraz, że do każdego wahadła złożonego, można dobrać wahadło proste, mające ten sam okres wahań. Długość takiego wahadła prostego nazywa się z r e d u k o w a n ą długością wahadła złożonego.



Ryc. 86.

Ryc. 86 wyobraża wahadło złożone W, podczas ruchu odchylone o pewien kąt θ z położenia stałej równowagi, t. j. z tego położenia, w którem środek ciężkości S znajduje się pionowo pod osią O. Oznaczmy przez $\bar{\omega}$ prędkość kątową, jaką wahadło posiada w uważanej chwili, przez M całą jego masę, przez B moment bezwładności względem osi O. Moment ruchu tej bryły względem osi obrotu, posiada wówczas wartość: $B\,\bar{\omega}$ (ust. 74). Moment ciężaru wahadła względem osi wynosi Mgf sin θ, jeśli f oznacza odległość SO środka ciężkości od osi. Ruch wahadła jest widocznie rodzajem ruchu obrotowego około osi O; wskutek tego zależy on tylko od momentu bezwładności B i od momentu siły zewnętrznej $Mgf \sin \theta$ (ust. 77). Postać ciała wahającego się, ani rodzaj materyi, nie mają osobnego wpływu. Dwa jakiekolwiek wahadła będą się poruszały jednakowo, jeśli ich momenty bezwładności i momenty ciężarów względem osi będą jednakowe.

Wiedząc to, możemy ułatwić poszukiwanie praw ruchu, używając zamiast danego wahadła innego, prostszego; możemy w tym celu wybrać wahadło jakiekolwiek, byle moment bezwładności jego B, tudzież moment ciężkości miały te same wartości jak w wahadle danem. Wyobraźmy sobie, że całkowita masa wahadła W została rozdzielona na dwie części (ryc. 86, drugi rysunek), skupione w cząstkach materyalnych m i m', połączonych z sobą nitką nieskończenie cienką OC; obie te cząstki mają razem taką masę, jak wahadło złożone, t. j.:

(1) $$M = m + m'.$$

Jednę z tych cząstek (m) umieścimy w osi obrotu O, drugą (m') w punkcie C na linii OS, w pewnej odległości $f + f'$ poniżej osi obrotu. Otrzymamy tym sposobem wahadło proste w, o długości:

(2) $$OC = l = f + f'.$$

Wahadło to poruszać się będzie tak samo, jak dane wahadło, złożone, pod warunkiem, żeby naprzód, momenty bezwładności były jednakowe,

$$m'(f + f')^2 = B, \text{ czyli}$$

(3) $$m' l^2 = B;$$

powtóre, żeby momenty ciężkości były również jednakowe; to stanie się, gdy środek ciężkości cząstek m i m' znajdować się będzie w takiej samej odległości f od osi, jak w wahadle W. W tym celu należy masę wahadła rozdzielić na cząstki m i m' w takim stosunku, żeby było:

$$\frac{m}{m'} = \frac{f'}{f}, \text{ czyli } \frac{m + m'}{m'} = \frac{f + f'}{f},$$

albo wreszcie:

$$\frac{M}{m'} = \frac{l}{f}. \tag{4}$$

Rugując m' z równań (3) i (4), obliczymy długość zredukowaną l wahadła. Pomnożywszy je bowiem przez siebie znajdziemy:

$$Ml^2 = \frac{Bl}{f}, \text{ skąd:}$$

$$l = \frac{B}{Mf}. \tag{5}$$

Równanie (5) orzeka, *że długość zredukowana wahadła złożonego równa się momentowi bezwładności bryły wahającej się względem osi obrotu, podzielonemu przez iloczyn z masy wahadła i odległości jej środka ciężkości do osi.* Okres wahań wahadła złożonego posiada tę samą wartość, jak okres wahadła prostego o powyższej długości l, mamy więc:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{B}{Mfg}}. \tag{6}$$

Wyobraźmy sobie, że wahadło zostało odchylone od pionu o kąt θ, tak mały, żeby wstawa jego sin θ nieznacznie tylko różniła się od łuku θ, jak być powinno, jeżeli wzór (6) ma się stosować. Moment siły ciężkości wynosi wtenczas: $Mfg \sin\theta$, albo $Mfg\,\theta$. Jeśli tedy odchylenia są małe, wówczas moment siły zewnętrznej (ciężaru) jest proporcyonalny do kąta odchylenia (liczonego w mierze łukowej); spółczynnikiem proporcyonalności jest iloczyn Mfg. Spółczynnik ten nosi nazwę momentu kierującego wahadła. Moment kierujący jest poniekąd miarą stałości równowagi wahadła; im większa jego wartość, tem trudniej odchylić wahadło o pewien kąt z położenia równowagi. Połóżmy dla krótkości $Mfg = D$, otrzymamy:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{B}{D}}, \tag{7}$$

albo słowami: *okres wahadła złożonego jest proporcyonalny do pierwiastka z momentu bezwładności, odwrotnie proporcyonalny do pier-*

wiastka z momentu kierującego. Im usilniej wahadło trwa w położeniu równowagi, tem szybszemi będą jego drgania; wielki moment bezwładności wpływa natomiast przeciwnie, przyczynia się do zmniejszenia częstości wahań, t. j. do zwiększenia okresu.

Wahadło rewersyjne (odwracalne). Punkt C (ryc. 86), t. j. dolny koniec linii OC, wyobrażającej długość wahadła zredukowanego, nazywa się środkiem wahań wahadła złożonego. Punkt ten *posiada tę własność, że skoro poprowadzimy przezeń oś równoległą do osi O i zawiesimy wahadło na tej nowej osi C, natenczas okres wahań nie zmieni się*. Oznaczmy bowiem przez B' moment bezwładności względem osi C, przez T' okres wahań tej osi właściwy, natenczas będzie podług (6):

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{B'}{Mf'g}}.$$

Aby dowieść, że $T' = T$, przypominamy, że odcinki f i f' czynią zadość warunkom (3) i (4)

$$m'(f+f')^2 = B, \quad \text{tudzież} \quad \frac{M}{m'} = \frac{f+f'}{f}$$

z których pomnożenia wynika:

$$M(f+f') = \frac{B}{f}.$$

Oznaczmy przez k ramię bezwładności wahadła względem osi, przechodzącej przez środek masy, a równoległej do obu osi O i C, natenczas będzie:

$$B = M(k^2+f^2) \text{ (ust. 75), przeto: } \frac{B}{f} = M\left(\frac{k^2}{f}+f\right).$$

Ponieważ mamy także:

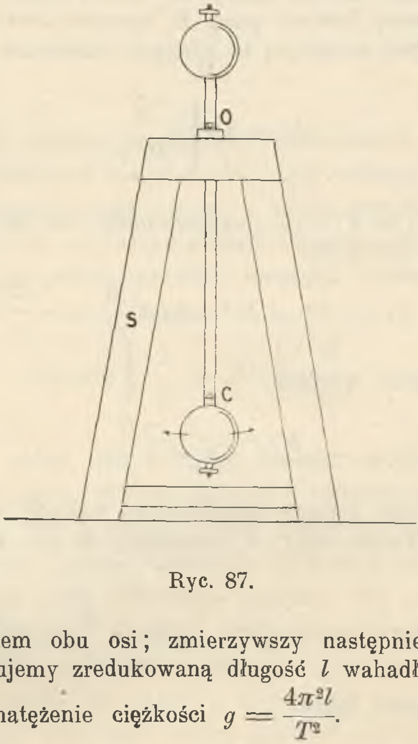
$$\frac{B}{f} = M(f+f'), \text{ więc: } \frac{k^2}{f}+f = f+f', \text{ czyli: } k^2 = ff'.$$

Gdy zawiesimy wahadło na osi C, wtenczas będzie: $B' = M(k^2+f'^2)$, albo:

$$B' = M(ff'+f'^2) = f'\,M(f+f') = B\frac{f'}{f}.$$

Podstawiwszy tę wartość w powyższym wzorze T', otrzymamy znowu wartość (6), a zatem $T' = T$.

Dowiedziona tu własność środka wahań dozwala znaleźć doświadczalnie długość zredukowaną wahadła sposobem, nie wymagającym znajomości momentu bezwładności B, ani masy M. Wahadło, t. zw. odwracalne, używane w tym celu (ryc. 87), składa się z pręta opatrzonego w dwie symetrycznie położone, ale nie jednakowo ciężkie, soczewki, podobne do soczewek wahadeł używanych w zegarach; dwa trójgraniaste pryzmaty stalowe, których ostrza O i C są ku sobie zwrócone, mogą służyć kolejno jako osi wahania, przyczem opierają się na twardych podstawkach, przymocowanych do ciężkiego drewnianego kozła S. Przesuwając cokolwiek jednę z soczewek, można zrównać dokładnie okresy



Ryc. 87.

wahań T względem obu osi; zmierzywszy następnie odległość ostrzy pryzmatów, znajdujemy zredukowaną długość l wahadła, poczem można odrazu obliczyć natężenie ciężkości $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$.

Jeżeli bowiem okresy T i T' są równe, musi być:

$$\frac{B}{f} = \frac{B'}{f'}, \text{ czyli } \frac{k^2 + f^2}{f} = \frac{k^2 + f'^2}{f'},$$

z czego wynika: $k^2 f' + f^2 f' = k^2 f + f'^2 f$, albo $k^2(f' - f) = ff'(f' - f)$, albo nakoniec: $(f' - f)(k^2 - ff') = o$.

Ponieważ pierwszy czynnik tego wyrażenia nie jest $= 0$, gdyż soczewki nie są jednakowo ciężkie, a zatem środek ciężkości nie leży w połowie odległości ostrzy, więc musi być: $k^2 = ff'$; równanie to, jak widzieliśmy wyżej, jest warunkiem, aby odległość osi była równa zredukowanej długości wahadła; istotnie tedy, jeżeli okresy dla obu osi są równe, odległość ich równa się długości zredukowanej.

Wahadło ballistyczne. Wahadło bywa używane także do mierzenia sił chwilowych, krótko trwających, uderzeń. W tem zastosowaniu nazywa się ono *wahadłem ballistycznem*, gdyż bywa używane w ballistyce (nauka o ruchu pocisków działowych) do mierzenia siły uderzenia, albo prędkości pocisków. Jeżeli wahadło wiszące spokojnie uderzymy z boku n. p. młotkiem, wówczas odbiegnie ono o pewien kąt od pionu, poczem będzie się wahało. Z wielkości pierwszego odchylenia można ocenić popęd siły uderzenia, jak to zamierzamy okazać.

Wahadło proste, odchylone z położenia równowagi o kąt θ_0 (ryc. 85, ust. 97), wraca doń następnie z prędkością $v_0 = 2 \sin \frac{\theta_0}{2} \sqrt{gl}$, a zatem z prędkością kątową:

$$\omega_0 = \frac{v_0}{l} = 2 \sin \frac{\theta_0}{2} \sqrt{\frac{g}{l}};\quad \text{uwzględniwszy, że } T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

znajdziemy

$$\omega_0 = \frac{4\pi \sin \frac{\theta_0}{2}}{T}.$$

To stosuje się zarówno do wahadła prostego, jak i do złożonego; w ostatnim przypadku l oznacza długość zredukowaną. Nawzajem, jeśli wahadło, wiszące w spoczynku, w położeniu pionowem, uderzymy z boku nagle, tak silnie, żeby nabyło odrazu prędkości kątowej ω_0, natenczas oddali się ono od pionu o kąt θ_0, określony powyższem równaniem, t. j.:

$$\sin \frac{\theta_0}{2} = \frac{T\omega_0}{4\pi}.$$

Uderzenie powinno być jednakowoż tak nagłe, żeby w ciągu czasu trwania jego wahadło nie wyszło znacznie z położenia równowagi.

Wymierzywszy kąt największego odchylenia θ_0, można obliczyć wartość popędu siły uderzenia. Oznaczmy w tym celu czas trwania uderzenia (bardzo krótki) przez t; moment siły uderzającej, względem osi wahadła, niechaj będzie μ (μ oznacza, jeżeli siła jest zmienna, średnią wartość jej momentu). Oznaczywszy dalej moment bezwładności wahadła przez B, mamy (ust. 77):

$$\omega_0 = \frac{\mu t}{B},$$

gdzie $\tilde{\omega}_0$ oznacza, jak wyżej, prędkość kątową nabytą wskutek uderzenia; ta prędkość kątowa sprawia odchylenie θ_0, zatem jest:

$$\tilde{\omega}_0 = \frac{\mu t}{B} = \frac{4\pi \sin \frac{\theta_0}{2}}{T}.$$

Stąd wynika, z uwagi na $T = 2\pi \sqrt{\frac{B}{D}}$,

$$\mu \, . \, t = \frac{TD \sin \frac{\theta_0}{2}}{\pi}. \tag{8}$$

W tem równaniu zawarta jest zasada pomiaru krótko działających momentów μ, a co zatem idzie, sił chwilowych — nawzajem, jeżeli siły te lub momenty są znane, można użyć równania (8) do mierzenia krótkich czasów t. Jedne albo drugie dają się wyrazić przez wielkości łatwo dostępne pomiarom: T, D i θ_0. Na tej zasadzie można zmierzyć n. p. prędkość kuli karabinowej. Wahadło wiszące w spoczynku trafia kula o masie m, z prędkością v, w kierunku poziomym, prostopadłym do osi; p niech oznacza najkrótszy prostopadły odstęp prędkości v od osi wahadła. Kula utkwi w wahadle, a pęd jej mv przenosi się na masy wahadła i kuli.

Zważywszy, że $\frac{mv}{t}$ wyraża średnie natężenie siły, którą kula wywiera na wahadło, w ciągu czasu uderzenia t, mamy:

$$\mu = p \frac{mv}{t}, \quad \mu t = pmv, \text{ stąd równanie: } pmv = \frac{TD \sin \frac{\theta_0}{2}}{\pi}.$$

Nakoniec, ponieważ według (7): $D = Mfg$, otrzymujemy równanie:

$$v = \frac{MTfg \sin \frac{\theta_0}{2}}{\pi mp},$$

wyrażające prędkość kuli v przez wielkości znane.

Zasada wahadła ballistycznego, wyrażona w równaniu (8), ma również ważne zastosowanie w pomiarach elektrycznych (t. III, ust. 67).

100. Ogólne zastosowanie wahadła do mierzenia sił. Ciała stałe mogą wahać się na podobieństwo wahadła, nietylko pod wpływem ciężkości, lecz również pod działaniem innych sił. N. p. ruch igły magnesowej, odchylonej z położenia równowagi, jest ruchem wahadłowym i t. p.

Wahadłem nazywać będziemy wszelką bryłę, obracalną około stałej osi a poddaną działaniu takich sił zewnętrznych, iż moment zwracający ją, po odchyleniu ku położeniu trwałej równowagi, jest proporcyonalny do wielkości odchylenia.

Ryc. 88.

Jako przykład takiego wahadła przytaczamy wahadło sprężynowe (balans), używane w zegarkach kieszonkowych (ryc. 88). Teorya wahadła, wahającego się pod wpływem ciężkości, stosuje się również do wahadeł poruszanych innemi siłami, gdyż wartość okresu wahań zależy od momentu bezwładności i od momentu kierującego, a nie zależy od tego, czy moment kierujący wynika z działania ciężkości, czy jakiej innej siły n. p. sprężystości lub magnetyzmu. Wzór (7) stosuje się do wszelkich sił, byle moment, który one wywierają na wahadło odchylone z położenia równowagi, był proporcyonalny do kąta odchylenia θ, t. j.

$$\text{Moment} = D \,.\, \theta.$$

D oznacza tu stały spółczynnik, zależny od natężenia sił działających; jest to moment kierujący wahadła. Okres wahań każdego wahadła obliczamy więc podług wzoru:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{B}{D}}.$$

Jeżeli na toż samo wahadło działa raz siła P, a innym razem siła P', mająca inne natężenie, ale ten sam kierunek i ten sam punkt przyłożenia, natenczas możemy porównać natężenia tych sił, mierząc w obu przypadkach odpowiednie okresy wahań T i T'. Mamy bowiem podług (7):

$$T : T' = \sqrt{D'} : \sqrt{D};$$

Ponieważ momenty kierujące są proporcyonalne do sił P i P', przeto także $T : T' = \sqrt{P'} : \sqrt{P}$; albo:

$$P : P' = T'^2 : T^2.$$

Wprowadzając, zamiast okresów, częstości wahań $n = \frac{1}{T}$, $n' = \frac{1}{T'}$, otrzymamy:

$$P : P' = n^2 : n'^2,$$

t. j. siły mają się do siebie jak kwadraty częstości wahań.

Odmierzywszy n. p. częstości wahań zwyczajnego wahadła, w różnych miejscach na powierzchni ziemi, uzyskamy stosunki natężeń ciężkości w tych miejscach; będzie bowiem:

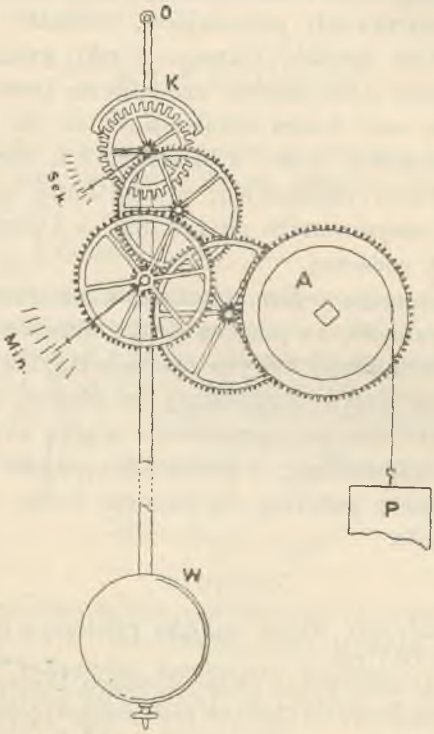
$$g : g' = n^2 : n'^2.$$

101. Zegar. Doskonała prawidłowość i peryodyczność wahań wahadła dobrze urządzonego czyni je wybornem narzędziem do odmierzania czasu. Na miejsce staroświeckich klepsydr, mierzących czas usypywaniem się piasku i t. p. Huygens[1]) pierwszy wprowadził zegary wahadłowe (*Horologium oscillatorium*, dzieło wydane w r. 1673, jedno z najważniejszych w dziejach dynamiki; tamże wyłożona po raz pierwszy teorya sił odśrodkowych). Wahadło jest główną częścią składową zegarów, ono bowiem odmierza równe okresy czasu. Inne części składowe spełniają następujące zadania: 1) Ruch wahadła spotyka rozmaite opory (tarcie o powietrze, osi o łożysko i t. p.), które sprawiają, że amplituda wahadła zupełnie swobodnego zmniejszałaby się stopniowo do zera; z tego powodu umieszczony jest w zegarze mechanizm, poruszany zwykle ciężarami albo sprężyną, który popędza wahadło, udzielając mu za każdem wahnieniem lekkiego impulsu, celem wyrównania straty ruchu, poniesionej wskutek działania oporów. Aby swoboda ruchu wahadła była jak najmniej krępowana, impuls ten powinien działać na nie wtenczas, gdy ruch jest najszybszy, t. j. w chwili przejścia przez położenie równowagi. 2) Drugiem zadaniem mechanizmu zegarowego jest zliczanie liczby wahnień wykonanych przez wahadło i wykazywanie jej na podziałkach liczbowych, za pomocą trzech wskazówek: sekundowej, minutowej i godzinnej

---

[1]) Czyt. Hojhens.

Podwójne to zadanie spełnia przedewszystkiem t. zw. koło wychwytowe i kotwica K (ryc. 89). Koło wychwytowe stanowi ostatnie ogniwo w szeregu kół zazębionych, z których pierwsze, połączone z wałem A, wprowadza się w powolny obrót, za pomocą ciężaru P i sznura owiniętego na wale. Wskutek stosownie dobranych ilości zębów, obroty dalszych kół są szybsze; najszybciej



Ryc. 89.

obraca się koło wychwytowe. Pod wpływem ciężaru działającego nieustannie na wał A, ruch tego szeregu kół nie byłby jednostajny; lecz wzrastałby dopóty, dopókiby nie nastąpiło zrównoważenie siły poruszającej, z oporami ruchu. Temu zapobiega kotwica K, połączona stale z wahadłem i wahająca się razem z niem około osi O. Gdy wahadło jest najwięcej odchylone na prawo lub na lewo, końce kotwicy zastępują drogę zębom koła wychwytowego, tak, iż podczas jednego wachnienia wahadła, koło wychwytowe posuwa się naprzód o jeden tylko ząb. Nawzajem, koło wychwytowe udziela kotwicy i wahadłu impulsów potrzebnych do utrzymywania ruchu wahadła; zadanie to spełniają zęby tego koła, przesuwające się po ukośnych płaszczyznach na końcach kotwicy i wywierające na nie lekki nacisk. Wzajemne to oddziaływanie mechanizmu zegarowego i wahadła wytwarza, nie zupełnie wprawdzie jednostajny, ale ściśle peryodyczny ruch mechanizmu i połączonych z nim wskazówek. Ciężar lub sprężyna dostarcza siły poruszającej, wahadło kieruje tą siłą. Jeżeli wahadło bije sekundy (okres $= 2$ *sek*), wtenczas używa się koła wychwytowego o 30 zębach; ono odbywa jeden obrót w przeciągu minuty, jest więc kołem sekundowem; na osi jego osadza się wskazówkę sekundową. Jedno z dalszych kół obraca się raz na godzinę i jest kołem minutowem; z niem łączy się kilka kół pomocniczych (nie narysowanych na ryc. 89), z których ostatnie porusza wskazówkę godzinną.

Regulowanie biegu zegara uskutecznia się przez przedłużanie, albo skracanie wahadła, za pomocą śruby umieszczonej u dolnego końca. Osobne urządzenia, których nie będziemy tu opisywali, czynią nieszkodliwym wpływ temperatury na długość wahadła. Ciężar poruszający P powinien być dostatecznie wielki, aby mógł pokonać opory tarcia w mechanizmie; wielkość jego nie ma zresztą wpływu na bieg wskazówek; jedynym regulatorem ruchu wskazówek powinno być wahadło.

Zadania.

180) Znaleźć czas wahań wahadła prostego o długości 1 *m*, dla $g = 981$. *Odp.* 1·003 *sek.*

181) Znaleźć czas wahań pręta jednolitego, bardzo cienkiego, o długości: $L = 1$ *m*, wahającego się około osi przechodzącej przez jeden z końców.

$$Odp.\ B = \frac{ML^2}{3} \text{ (ust. 75), zatem } \tau = \pi \sqrt{\frac{2}{3} \frac{L}{g}} = 0{\cdot}81898 \text{ sek.}$$

182) Jaka jest długość zredukowana i gdzie znajduje się środek wahań w takiem wahadle? *Odp.* $l = {}^2/_3\, L$; środek leży w $^1/_3$ długości, licząc od dolnego końca.

183) Znaleźć długość zredukowaną wahadła składającego się z drutu o masie m i kuli o masie M, zawieszonej na końcu drutu, jeżeli L i r oznaczają długość i promień drutu, R promień kuli.

$$Odp.\ B = M\,[{}^2/_5\, R^2 + (L + R)^2] + m\left(\frac{r^2}{4} + \frac{L^2}{3}\right), \text{ (ust. 75),}$$

$$f = \frac{\frac{1}{2} mL + M(L + R)}{(M + m)},$$

zatem (ust. 99, 5):

$$l = \frac{{}^2/_5 R^2 + (L+R)^2 + \sigma\left(\frac{r^2}{4} + \frac{L^2}{3}\right)}{L + R + \frac{\sigma L}{2}}, \text{ gdzie } \sigma = \frac{m}{M};$$

jeżeli σ jest bardzo małym ułamkiem, wtenczas w przybliżeniu:

$$l = L + R + {}^2/_5\left(\frac{R^2}{L+R}\right).$$

184) Wahadło postaci nieregularnej posiada okres 1·5072 *sek*; odległość środka masy od osi = 37 *cm*, obliczyć ramię bezwładności wahadła względem osi.

Odp. $k = \frac{T}{2\pi}\sqrt{fg} = 45\cdot7$ *cm*.

185) Igła magnesowa waha się około pionowej osi, okres wahań znaleziono = T; następnie przyczepiono do końców igły dwa ciężarki mosiężne o znanej postaci i masie, których łączny moment bezwładności względem osi = B_0; okres wahań igły, przy tych samych siłach magnetycznych, zmienił się na T'. Obliczyć moment bezwładności B samej igły.

Odp. $T = 2\pi\sqrt{\frac{B}{D}}$, $T' = 2\pi\sqrt{\frac{B+B_0}{D}}$, stąd:

$$B = B_0 \frac{T^2}{T'^2 - T^2}.$$

186) Obliczyć czas wahań pod biegunem ($g = 983$) wahadła, które pod równikiem ($g = 978$) bije sekundy. *Odp.* 0·99745 *sek*.

187) Zegar wahadłowy, regulowany w Polsce ($g = 981$), według czasu średniego, zostaje przewieziony pod równik; o ile będzie on tam spóźniał się na dobę? *Odp.* 2 *min* 12 *sek*.

ROZDZIAŁ VII.

O energii.

102. Praca i energia. Wykonywanie rozmaitych czynności, polegających na poruszaniu ciał, przy równoczesnem przezwyciężaniu oporów, nazywamy pracowaniem. Człowiek podnoszący ciężary, przecinający piłą drzewo, obracający kamień młyński; koń ciągnący wóz po nierównej drodze — są to przykłady wykonywanej pracy. Zdolność do pracowania nazywamy energią. W miarę wykonywania pracy zdolność ta wyczerpuje się; ilość pracy, która może być jeszcze wykonana, zmniejsza się; energię możemy przeto uważać także jako zasób pracy, nagromadzonej w człowieku pracującym a wydawanej na zewnątrz podczas pracowania. Gdy do wykonywania prac zaczęto używać machin zamiast ludzi albo zwierząt, zastosowano pojęcia pracy i energii do materyi nieożywionej; mówi się n. p. że machina parowa, obracająca kamienie młyńskie, albo poruszająca piłę w tartaku, wykonywa pracę. Z nauk technicznych pojęcia pracy i energii przeszły do fizyki, a zawładnąwszy niebawem całym jej zakresem, stały się zasadniczemi pojęciami wszelkich nauk przyrodniczych.

Pracę cenimy tem wyżej, im większe są siły sprzeciwiające się ruchowi, t. j. im większe opory mają być przezwyciężone, tudzież im obszerniejszym jest ruch, to znaczy, im dłuższą droga, wzdłuż której opór bywa pokonywany. Ciśnienie albo usiłowanie jakiekolwiek, nie sprawiające ruchu, nie wykonywa żadnej pracy.

Zgodzono się liczyć wartość pracy proporcyonalnie do wielkości oporu i do długości drogi.

Praca jest tedy proporcyonalna do iloczynu z oporu i drogi. Podnieść bowiem kilogram na wysokość 5 *m* wymaga 5 razy większej pracy, aniżeli na wysokość 1 *m*; podnieść 3 kilogramy na wysokość 5 *m* wymaga 15 razy większej pracy.

W każdym ruchu jednostajnym siły poruszające ciało równoważą się z oporem (ust. 35); toż samo powiedzieć możemy w przypadku ruchów niejednostajnych, przyczem do oporów należy jednak doliczyć także reakcyę, wynikającą z bezwładności ciała poruszanego (ust. 46). Jest więc rzeczą obojętną, czy przy obliczaniu pracy pomnożymy drogę przez opór pokonany, czy przez siłę poruszającą, która ten opór pokonywa.

Ciała wykonywające pracę, bez względu na to, czy to są ciała żywe, czy materya martwa, nazywają się zwykle **motorami**; mówi się tedy o motorach żywych, o motorach parowych, wodnych, elektrycznych i t. p.

103. Miary pracy i energii. Za jednostkę pracy przyjmuje się powszechnie pracę, wykonaną wzdłuż drogi równej jednostce długości, gdy opór przezwyciężany równa się jednostce siły. Jeżeli długość drogi oznaczymy wogóle przez s, siłę przez P, pracę przez L, natenczas, mierząc L za pomocą tak określonej jednostki, otrzymamy:

$$L = P \,.\, s,$$

t. j. praca równa się iloczynowi z siły i drogi.

Zależnie od tego jakich jednostek użyjemy do mierzenia dróg i sił, otrzymamy różne jednostki pracy; do ważniejszych należą następujące:

a) *w bezwzględnym układzie miar (c. g. s.)*:

Jednostką jest praca wykonana za pośrednictwem siły 1 dyny $= 1$ *gr cm/sek*², wzdłuż drogi $= 1$ *cm*. Jednostkę tę nazwano: *erg*.

$$1 \; erg = 1 \; dyna\text{-}centymetr = 1 \; gr \; cm^2/sek^2.$$

Z powodu, że *erg* jest jednostką bardzo drobną, używa się w zastosowaniach technicznych zwyczajnie jednostki większej, będącej jednak całkowitą wielokrotnością erga (dziesięć milionów ergów); jednostce tej dano nazwę:

$$\text{Joule}^{1)} = 10^7 \; ergów.$$

[1]) Czytaj: Dżul.

b) *w ciężarowym układzie miar*:

Przyjąwszy ciężar grama (*gr*) i *cm* jako jednostki sił i długości, uzyskamy ciężarową jednostkę pracy:

1 *gram-centymetr* (*Gr. cm.*).

Przyjmując $g = 981$, mamy: 1 $Gr = 981$ *dyn*, zatem:

1 *gr . cm* = 981 *ergów*.

W zastosowaniach technicznych mierzy się pracę częściej na kilogrammetry. Kilogrammetr jest to praca dokonana przez siłę równą ciężarowi kilograma, na drodze jednego metra:

1 *kilogram-metr* (*kgm*) = 1000 *gr* × 100 *cm* = 100 000 *gr* . *cm*
= 98 100 000 *ergów* = 9·81 Joulów.

Ciężarowe jednostki pracy mają proste znaczenie: pracę 1 *kgm* wykonywamy, podnosząc jednostajnie ciało ważące 1 *kg* na wysokość 1 *m*; podobnie, podnosząc ciężar *P* (*kg*), na wysokość *s* (*metrów*), wykonywamy pracę *Ps* (*kgm*).

Jednostki pracy są zarazem jednostkami energii; energię określiliśmy jako zasób pracy, nagromadzonej w motorze; miarą energii jest przeto praca, która może być przezeń wykonana.

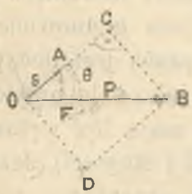
104. Obliczenie pracy. Ruch i siła są koniecznymi składnikami pracy; ciśnienie, choćby największe, jeśli nie sprawia ruchu, nie wykonywa też pracy; czas trwania ruchu nie wchodzi zupełnie w określenie ilości pracy.

Może się zdarzyć, że ciało poddane działaniu siły porusza się w innym kierunku, aniżeli nań działa siła (n. p. ciało rzucone ukośnie i poddane sile ciężkości; ciało zesuwające się po płaszczyznie pochyłej; statek na rzece, ciągniony przez konie idące brzegiem i t. p.). W podobnych przypadkach określamy pracę jako *iloczyn z długości drogi przez składową siły, równoległą do drogi*; składowej siły prostopadłej do kierunku ruchu ciała nie bierzemy wcale w rachubę. Widać zresztą, że iloczyn z drogi przez składową siły równoległą do drogi daje to samo, co iloczyn z całej siły przez składową drogi, wziętą w jej kierunku. Niechaj $OB = P$ (ryc. 90) wyobraża siłę; $OA = s$ drogę, przebytą pod działaniem tej siły; $AOB = \theta$ kąt zawarty między ich kierunkami. Rozłożywszy siłę P na składową równoległą $OC = P \cos \theta$ i prostopadłą do drogi $OD = P \sin \theta$, obliczamy pracę według wzoru: $L = OA \times OC$, czyli:

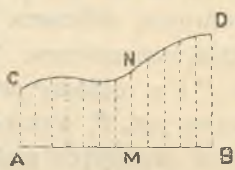
$$L = s \,.\, P \cos \theta.$$

Zamiast tego można wziąć iloczyn $OF \times OB$, gdyż widocznie $OF = s \cos \theta$, zatem znowu: $L = s \,.\, P \,.\, \cos \theta$.

Jeżeli siła działa w kierunku prostopadłym do toru ($\theta = 90^0$, $\cos \theta = 0$) wtenczas praca jej równa się zeru. Ciągnąc n. p. wóz



Ryc. 90.



Ryc. 91.

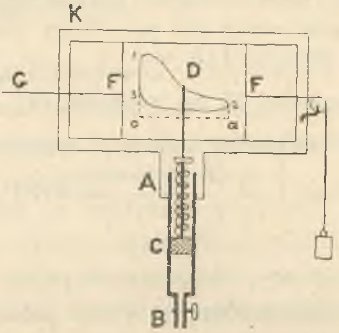
po drodze poziomej, nie wykonywamy wcale pracy przeciw ciężkości (ale wykonywamy ją przeciw tarciu). W następstwie przytoczonego tu sposobu obliczania pracy można okazać, że *praca kilku sił, działających jednocześnie, równa się pracy siły wypadkowej*; obliczając bowiem pracę każdej z nich z osobna, uwzględniamy tylko składową równoległą do drogi. Pracę wszystkich sił otrzymamy, tworząc iloczyn z drogi i z sumy tych składowych, czyli — co na jedno wychodzi — ze składowej siły wypadkowej.

[*Praca siły wprowadzającej bryłę w ruch obrotowy równa się iloczynowi z momentu siły względem osi obrotu przez kąt, o który bryła się obróciła*; kąt ten powinien być wyrażony w mierze łukowej. Przypuśćmy n. p. że siłą jest napięcie P sznurka nawiniętego na krążku o promieniu $= r$, jak na ryc. 60. Jeżeli odwinęła się długość sznurka $= s$, wtedy praca wynosi $L = Ps$. Jednakże $s = r\theta$, jeżeli θ oznacza kąt, o który obrócił się przytem krążek razem z bryłą. Jest tedy $L = Pr\theta$ czyli $L = M\theta$].

105. Wykreślenie pracy. Praca n i e jest wielkością kierunkową, nie daje się przedstawić jako odcinek, mający długość i kierunek; prac **nie** można dodawać według reguły geometrycznego dodawania. Dwie prace bowiem, równe a wykonane w przeciwnych kierunkach, nie znoszą się, lecz warte są tyle, co praca podwójna. Można jednak mówić o pracy dodatniej i ujemnej. Podobnie n. p. pieniądz (cena, majątek i t. p.) nie jest również wielkością kierunkową, może być jednak obliczany jako $+$ i $-$, jako majątek i dług, aktywa i pasywa. Jeżeli robotnik wykona pracę, liczy ją sobie dodatnio, jako zasługę; jeżeli ktoś inny wykona pracę, dla niego, albo za niego, natenczas możemy wprowadzić tę pracę do rachunku ze znakiem ujemnym.

Wykreślenie pracy ma też inny cel, aniżeli wykreślenia prędkości, sił, momentów i innych wielkości kierunkowych; służy ono do ułatwienia obliczenia pracy, wtenczas mianowicie, gdy siła nie jest stała lecz zmienna. Wiedząc, że praca jest iloczynem dwu czynników P i s, możemy przedstawić ją jako pole prostokąta, którego podstawą jest P, wysokością s (obie mają być wykreślone podług pewnych przyjętych podziałek dla sił i długości). Jeżeli wzdłuż drogi $s = AB$ (ryc. 91) natężenie siły pracującej zmienia się, wtenczas dzielimy drogę na odcinki tak krótkie, żeby w obrębie każdego z nich można było uważać siłę jako stałą; biorąc długości tych odcinków jako podstawy, natężenia siły, należące do nich jako wysokości, otrzymamy szereg pól prostokątnych, których suma różnić się będzie tem mniej od rzeczywistej pracy, wykonanej na drodze od A do B, im krótsze są odcinki, na które podzieliliśmy drogę. Z tego wynika, że skoro wykreślimy krzywą, której każdy punkt n. p. N ma za odciętą drogę przebytą AM, za rzędną MN natężenie siły działającej w owym punkcie drogi, wówczas pole ograniczone tą krzywą CD, skrajnemi rzędnemi AC i BD, tudzież podstawą AB, przedstawiać będzie wartość pracy wykonanej. Jednostką pracy w tem wykreśleniu będzie pole prostokąta, którego podstawą jest długość, przedstawiająca (na obranej podziałce) jednostkę drogi, wysokością — długość, przedstawiającą jednostkę siły.

Indikator. Wspomianych właśnie wykreśleń używa się celem wymierzenia pracy, którą wykonywa para, poruszająca tłoki w machinie parowej. Przyrząd rysujący krzywą wskazującą zmienność siły (ciśnienia pary), nazywa się indikatorem. Ryc. 92 objaśnia zasadę takiego przyrządu. Do otworu zrobionego w cylindrze machiny parowej wkręca się mniejszy cylinder AB, w którym porusza się lekko a szczelnie tłoczek C. Na tłoczek ten ciśnie z dołu para, z góry sprężyna. Tłoczek, a z nim razem ołówek D, osadzony na końcu trzonka tłokowego, wysuwa się pod wpływem ciśnienia pary do góry, o długości proporcyonalne do tego ciśnienia. Koniec ołówka dotyka się tabliczki F, która połączona jest za pomocą sznurka FG z tłokiem machiny parowej i naśladuje ruchy jego (drogi), przesuwając się w ramce K tam i napowrót. Dopóki dopływ pary do małego walca jest zamknięty, ołówek zajmuje położenie odpowiadające sile $= o$ i kreśli na tablicy, tam i z powrotem, linię prostą oa. Po otworzeniu kurka B, puszczającego parę, ołówek podnosi się do wysokości proporcyonalnej do każdoczesnego ciśnienia. Podczas każdego



Ryc. 92.

podwójnego skoku tłoka — naprzód i wstecz — ołówek kreśli na tablicy krzywę zamkniętą 1, 2, 3, której odcięte są proporcyonalne do dróg tłoka machiny parowej, rzędne zaś do sił (ciśnień pary); pole objęte tą krzywą jest proporcyonalne do pracy wykonanej przez parę. Pole to należy uważać jako różnicę dwu pól: $012a—032a$. Pierwsze wskazuje pracę dodatnią wykonaną przez parę, podczas ruchu tłoka machniy naprzód; drugie przedstawia pracę, którą tłok oddaje parze, wracając i wypierając ją z cylindra.

Zadania.

188) Wiedząc, że do uciągnięcia wozu na pewnej poziomej drodze potrzeba siły pociągowej wyrównywającej $^1/_{50}$ ciężaru wozu, celem pokonania oporów ruchu, obliczyć pracę, którą wykonywują konie, ciągnąc wóz ważący 400 *kg*, przez $1\frac{1}{2}$ *km*.

Odp. $(400 : 50) \times 1500 = 12000$ *kgm*.

189) Jaką liczbą wyraża się ta sama praca w bezwzględnym układzie miar? *Odp.* 11772×10^8 ergów.

190) Wiele pracy potrzeba do podniesienia ciała ważącego 8 *kg* na wysokość 6 *m*? *Odp.* 48 *kgm*.

191) Po płaszczyznie, pochylonej do poziomu pod kątem 26^0, ze-

suwa się ciało ważące 18 *kg*, przebywając drogę 7 *m*; jaką pracę wykonywa przytem ciężkość? *Odp.* $7 \times 18 \times \sin 26^0 = 55{\cdot}2$ *kgm.*

192) Ile pracy potrzeba, aby przewieźć wóz ważący 250 *kg* wzdłuż drogi 300 *m*, wznoszącej się do góry, w stosunku 1 *m* na każde 8 *m* drogi, jeżeli opory ruchu stanowią $^1/_{50}$ część siły, którą wóz ciśnie na drogę w kierunku prostopadłym?

Odp. $300 \times \frac{250}{8} + 300 \times \frac{250}{50} \sqrt{\frac{63}{64}} = 10863$ *kgm.*

193) Taśma gumowa wydłuża się proporcyonalnie do siły, którą ją rozciągamy; taśma mająca długości 80 *cm* uzyskała długość 95 *cm*, gdy zawieszono na niej ciężar 60 *gr*. Wiele pracy potrzeba, aby tę taśmę rozciągnąć do długości 115 *cm?*

Odp. Przedłużenie o 35 *cm* wymaga siły $\frac{60 \times 35}{15} = 140$ *gr.* Wykreśliwszy pracę, otrzymamy trójkąt prostokątny o podstawie 35 *cm* i wysokości 140; zatem $L = \frac{35 \times 140}{2} = 2590$ *gr cm.*

106. Skutki pracy. Rozważanie pracy nabyło niepospolitej wagi od czasu gdy dostrzeżono, że praca dokonana na jakiemkolwiek ciele lub na układzie ciał, nie mija nigdy bez pozostawienia niezatartych śladów. W układzie, który jej podlega, praca wywołuje zawsze zmiany tego rodzaju, iż zdolność układu do pracowania, a więc energia jego, zostaje przez to zwiększona.

Mówi się zatem o wydawaniu i o pobieraniu pracy. Ciało, które wykonywa, czyli wydaje pracę, uszczupla tem samem swą zdolność do pracowania, swój zapas energii; natomiast zwiększa się energia tego układu, na którym praca była wykonaną, który ją przyjął. Okażemy w dalszym ciągu, że zysk jednego i strata drugiego są zawsze równe. W tem oświetleniu praca przedstawia się nam jako przelewanie energii jednego układu na drugi, wskutek dynamicznego ich na siebie oddziaływania.

W następujących ustępach zadaniem naszem będzie uzasadnić w szczegółach przedstawiony tu pogląd na znaczenie pracy, a zarazem okazać, że obok dynamicznego, przelewanie energii jednego układu na drugi odbywać się może na wiele innych jeszcze sposobów. Rozważania te doprowadzą nas do zrozumienia jednej z najogólniejszych zasad fizyki, zasady wykraczającej daleko po za obręb właściwej dynamiki, obejmującej cały obszar zjawisk przyrodniczych, zasady z a c h o w a n i a e n e r g i i.

Zmiany zachodzące w układach materyalnych, w następstwie udzielonej im pracy, bywają różnorodne, zależnie od rodzaju przezwyciężonego oporu; w rozmaitych też postaciach przejawia się ich energia. Niekiedy praca wywołuje skutki jawne, dostrzegalne w postaci zmienionego ruchu, albo zmienionego ustroju układu; te należą do zakresu dynamiki, obejmują t. zw. dynamiczne formy energii. W innych przypadkach skutki te polegają na zmianach cieplnych, chemicznych, elektrycznych i t. p.; w zmianach tych przejawiają się różne formy energii ukrytej, albo wewnętrznej. Rozpoczniemy od pierwszych.

107. Energia kinetyczna. Przypuśćmy naprzód, że jedynym oporem, który czynnik pracujący ma do przezwyciężenia, jest reakcya bezwładna masy przeciw zmianie ruchu. Niechaj czynnik ten działa siłą P na masę m, zupełnie swobodną, t. j. nie poddaną żadnym innym siłom, ani też nie spotykającą w ruchu swym żadnych przeszkód, ani oporów. Przed rozpoczęciem działania siły, masa ta może mieć już pewną prędkość początkową w kierunku działania siły, którą oznaczymy przez v_0. W przeciągu czasu t siła wywiera popęd Pt; o tyleż powiększa się pęd masy; z końcem czasu t uzyska on wartość (ust. 40, 42):

$$mv = mv_0 + Pt.$$

Jeżeli siła P, jak obecnie przyjmiemy, jest stała, wówczas ruch będzie jednostajnie przyśpieszony, a przyśpieszenie jego będzie $\frac{P}{m}$. Wskutek tego ciało przebiegnie w ciągu czasu t drogę (ust. 16)

$$s = v_0 t + \tfrac{1}{2} \frac{P}{m} t^2.$$

Praca, wykonana za pośrednictwem siły P wzdłuż tej drogi, wyraża się przez iloczyn:

$$L = P \,.\, s = v_0 Pt + \tfrac{1}{2} \frac{P^2 t^2}{m}.$$

Podstawiwszy tu za Pt wartość: $Pt = m\,(v - v_0)$, otrzymamy

(1) $$L = \frac{mv^2}{2} - \frac{m{v_0}^2}{2}.$$

Gdyby z początkiem czasu t masa m była w spoczynku ($v_0 = 0$), znaleźlibyśmy w podobny sposób:

$$(2) \qquad L = \frac{mv^2}{2}.$$

Przyjęliśmy, że siła poruszająca masę m spotyka jedyny opór w jej reakcyi bezwładnej, jedynym też skutkiem pracy wykonanej jest wzmożenie ruchu masy. Wzory (1) albo (2) okazują, że praca L, użyta na przezwyciężenie bezwładności, sprawia zwiększenie wyrażenia $\frac{1}{2}\,mv^2$, o tyle właśnie, ile wynosi wartość pracy zużytej. Wyrażenie to — *połowa iloczynu z masy i kwadratu prędkości* — nazywa się *energią kinetyczną* ciała poruszającego się. Wskutek wykonania pracy L energia kinetyczna powiększa się (podług 1) od wartości początkowej $\frac{mv_0{}^2}{2}$, do końcowej $\frac{mv^2}{2}$; przyrasta zatem o $\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0{}^2}{2}$, a przyrost ten jest właśnie równy pracy wykonanej. Wnosimy tedy, że *zwiększenie się energii kinetycznej masy swobodnej równa się pracy działających na nią sił.*

Energia kinetyczna jest nową dynamiczną miarą ruchu, nie mniej ważną aniżeli pęd. Znając siłę działającą na masę, możemy obliczyć przyśpieszenie; znając pracę, możemy od razu znaleźć energię kinetyczną, a tem samem prędkość wytworzoną.

Energią nazwaliśmy zdolność do wykonywania pracy; okażemy teraz, że nazwa »energii kinetycznej« została w tem znaczeniu słusznie zastosowana. Kula działowa, skoro posiada pewną prędkość, a więc energię kinetyczną, może pokonywać różne przeszkody i opory, słowem, może wykonywać pracę; zdolność ta ustaje, gdy kula utraci prędkość, a z nią razem i energię kinetyczną. Okażemy zaraz, że energia kinetyczna jest dokładną miarą pracy, którą masa poruszająca się może wykonać, t. j. że zgodnie z określeniem energii wogóle, energia kinetyczna przedstawia zasób pracy nagromadzonej w ciele pod postacią ruchu.

Dajmy na to, że pewna masa m porusza się z prędkością v; jej energia kinetyczna, którą oznaczymy przez T, posiada zatem wartość:

$$T = \frac{mv^2}{2}.$$

Skoro ta poruszająca się masa trafi na opór stały P, t. j. na siłę usiłującą zmniejszyć prędkość jej biegu, wtenczas ruch stanie się jednostajnie opóźnionym; po przebieżeniu pewnej drogi s' masa utraci ruch, utraci też energię. Przezwyciężając jednak opór P, wykonała pracę $L = P . s'$. Obliczmy tę pracę. W ciągu każdej jednostki czasu siła P zmniejsza prędkość ciała o $\gamma = \frac{P}{m}$, ruch ustanie tedy po upływie czasu $\frac{v}{\gamma}$. Całkowita droga, którą ciało przebiegło w ciągu tego czasu, równa się (ust. 17): $s' = \frac{1}{2}\frac{v^2}{\gamma} = \frac{\frac{1}{2}v^2 m}{P} = \frac{T}{P}$. Okazuje się stąd, że

$$Ps' = L = T. \tag{3}$$

t. j. *energia kinetyczna równa się całkowitej pracy, którą masa poruszająca się może wykonać*, tracąc zarazem prędkość, jaką pierwotnie posiadała.

Energia kinetyczna, jako wielkość równoważna pracy, mierzy się temi samemi jednostkami miary, co praca, a więc na ergi, joule, albo kilogrammetry i t. p. Nie trudno też sprawdzić, że wymiar jej jest ten sam, jak pracy (siła $\times$ długość).

Przykład. Masa m spada swobodnie z wysokości s. Praca ciężkości równa się: $L = mgs$. Prędkość nabyta $v = \sqrt{2gs}$, zatem $T = mgs = L$, t. j. energia kinetyczna, nabyta podczas spadania, jest równa pracy ciężkości. Nawzajem, rzucając ciało do góry, z prędkością v, udzielamy mu energii kinetycznej $T = \frac{1}{2}mv^2$ (pracą naszych mięśni); ciało wznosi się do takiej wysokości s, że praca mgs, wykonana przeciw ciężkości (która jest w tym razie oporem P), zużywa całkowicie energię kinetyczną, t. j. $s = \frac{T}{mg} = \frac{v^2}{2g}$.

Twierdzenia, odnoszące się do energii kinetycznej, stosują się do wszelkiego rodzaju sił i ruchów. Równania (1) i (3), udowodnione w przypadku siły stałej, stosują się również wówczas, gdy masa nabywa energii kinetycznej wskutek działania siły zmiennej, albo, gdy traci energię na przezwyciężenie zmiennego oporu. W tym razie możemy bowiem podzielić drogę na odcinki tak krótkie, żeby natężenie siły, w obrębie każdego z nich, można było uważać jako stałe; równanie (1) stosuje się do każdego odcinka, przeto też do całej drogi. Równanie (1) nie przestaje również być prawdziwem, gdy kierunek ruchu jest inny, aniżeli kierunek działania siły; obliczając bowiem pracę uwzględniamy tylko tę składową siły, która działa w kierunku ruchu, a przyrost albo ubytek prędkości zależy także tylko od tej składowej. Składowa prostopadła do toru nie ma wpływu na wartość prędkości, ona zmienia tylko jej kierunek, od którego znowu wartość energii kinetycznej wcale nie zależy. Okazuje się więc, że i w tym przypadku zwiększenie się (lub zmniejszenie) energii kinetycznej równa się pracy wykonanej przez siłę (lub pracy wykonanej przez masę przeciw zewnętrznym oporom). Jeżeli ruch odbywa się pod wpływem siły skierowanej zawsze prostopadle do toru, wtenczas praca jej jest stale zerem: $L = 0$); energia kinetyczna masy nie zmienia się wcale. Przykładem tego ruch jednostajny na kole.

108. Energia kinetyczna bryły stałej. Przez energię kinetyczną T kilku mas rozumiemy całkowity zasób pracy, który one zawierają w sobie na mocy swego ruchu. Całkowita energia kinetyczna układu równa się zatem sumie energij kinetycznych wszystkich mas, stanowiących ten układ.

W ruchu postępowym ciała stałego wszystkie cząstki: m_1, m_2, $m_3 \ldots$, z których ciało się składa, mają wspólną prędkość v; zatem będzie:

$$T = \tfrac{1}{2} m_1 v^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v^2 + \ldots = \tfrac{1}{2} m v^2,$$

w czem m oznacza całkowitą masę ciała.

Jeżeli ciało posiada ruch obrotowy około pewnej osi, z prędkością kątową ω (ryc. 57), natenczas, oznaczywszy znowu przez m_1, m_2, $m_3 \ldots$ masy cząstek, na które rozłożyliśmy w myśli obracającą się bryłę, r_1, r_2, $r_3 \ldots$. ich odległości od osi obrotu, znajdziemy:

$$T = \tfrac{1}{2} m_1 (r_1 \omega)^2 = \tfrac{1}{2} m_2 (r_2 \omega)^2 + \tfrac{1}{2} m_3 (r_3 \omega)^2 + \ldots = \tfrac{1}{2} \omega^2 \Sigma m r^2,$$

czyli (ust. 74). $$T = \tfrac{1}{2} \omega^2 B.$$

Energia kinetyczna bryły obracającej się równa się połowie iloczynu z kwadratu prędkości kątowej i momentu bezwładności. Energia kinetyczna równa się zawsze pracy sił, które ją wytworzyły. W ciele stałem odległości wzajemne cząstek są niezmienne, wskutek tego prace sił wewnętrznych, któremi cząstki ciała działają wzajemnie na siebie, są równe zeru. Z tego wynika, że energia kinetyczna ciała stałego równa się pracy s i ł z e w n ę t r z n y c h, które wprowadziły ciało w ruch.

Przykład. Ciało stałe obraca się bez tarcia, około poziomej osi, przechodzącej przez środek ciężkości (ryc. 60). Na tejże osi osadzony jest krążek o promieniu r; na sznurze owiniętym około krążka zawieszamy ciężką masą μ. Znaleźć prędkość v, jaką masa ta uzyska, spadłszy z wysokości s, tudzież prędkość kątową $\tilde{\omega} = \frac{v}{r}$ ciała połączonego z krążkiem. Moment bezwładności ciała wraz z krążkiem jest B. Jedyną siłą zewnętrzną pracującą jest ciężar μg; spadając z wysokości s wykonywa on pracę $L = \mu g s$. Energia kinetyczna, wytworzona przez tę pracę, mieści się w ruchu postępowym spadającej masy μ, tudzież w ruchu obrotowym ciała i krążka około osi; całkowita energia kinetyczna przyrządu

$$T = \tfrac{1}{2}\mu v^2 + \tfrac{1}{2}\tilde{\omega}^2 B$$

powinna być równa pracy ciężaru μg; mamy zatem

$$\mu g s = \tfrac{1}{2}\mu v^2 + \tfrac{1}{2}\tilde{\omega}^2 B = \tfrac{1}{2}\mu v^2 + \tfrac{1}{2}\frac{v^2 B}{r^2};$$

skąd

$$v = \sqrt{2g\frac{\mu r^2}{B + \mu r^2} \cdot s}.$$

Masa μ, jak się z tego okazuje, spada z przyśpieszeniem:

$$\gamma = \frac{\mu r^2}{B + \mu r^2} \cdot g.$$

Tosamo znaleźliśmy inną drogą w ust. 77.

Zadania.

194) Siła 60 *dyn* przyłożona do swobodnej, nieruchomej masy 30 *gr*, działa na nią przez 7 *sek*; obliczyć prędkość nabytą (v), drogę (s), pracę siły (L) i energię kinetyczną (T).

Odp. $v = \frac{60 \times 7}{30} = 14$ *cm/sek*; $s = \frac{1}{2}\frac{60}{30} \times (7)^2 = 49$ *cm*; $L = 60 \times 49 = 2940$ *ergów*; $T = \frac{1}{2} \times 30 \times (14)^2 = 2940$ *ergów*.

195) Kula ważąca 20 *gr* zostaje wyrzucona z karabinu z prędkością 300 *m/sek*. Obliczyć średnią wartość siły działającej na kulę we wnętrzu lufy karabinowej, wiedząc, że długość tej ostatniej wynosi 80 *cm*. *Odp.* $\frac{1}{2} \times 20 \times (30000)^2 = P \times 80$, skąd: $P = {}^9/_8 \times 10^8$ *dyn* $= 114$ *kg*.

196) Młot ważący 1·5 *kg* porusza się z prędkością 10 *m/sek*; ile *Kgm* wynosi energia kinetyczna?

Odp. Ponieważ 1 *m* i 1 *kg* są tu jednostkami długości i siły, przeto jednostką masy będzie 9·81 *kg*; mamy tedy $m = \frac{1 \cdot 5}{9 \cdot 81}$, zatem $T = \frac{1}{2} \frac{1 \cdot 5}{9 \cdot 81} (10)^2 = 7 \cdot 65$ *kgm.*

197) Młot powyższy, uderzywszy w głowę gwoździa, wciska go w drzewo na głębokość 1 *cm*; jaki ciężar (Q) należałoby położyć na gwoździu, aby wcisnąć go do tej samej głębokości.

Odp. Praca wykonana przez młotek równa się utraconej przezeń energii kinetycznej: 7·65 *Kgm*, do tego należy jeszcze dodać drobną pracę wykonaną przez ciężar młotka podczas zagłębiania się gwoździa: $1 \cdot 5 \times 0 \cdot 01$ *Kgm*, razem 7·665. Jeżeli ciężar Q ma dokonać takiej samej pracy, natenczas powinno być: $Q \times 0 \cdot 01 = 7 \cdot 665$, czyli $Q = 766 \cdot 5$ *kg.*

198) Pociąg kolejowy, ważący 150 ton, porusza się po poziomym torze, bez pary, z prędkością 12 *m/sek*; w jakiej odległości zatrzyma się on jeżeli opory ruchu wynoszą $^1/_{200}$ ciężaru pociągu?

Odp. $\frac{1}{2} \frac{150000}{9 \cdot 81} (12)^2 = \frac{150000}{200} \times s$, stąd $s = 1467$ *m.*

199) Ciało mające masę m zesuwa się na dół (bez tarcia) po płaszczyźnie pochyłonej do poziomu pod kątem α, wzdłuż drogi l; obliczyć prędkość v, jaką uzyska u dołu.

Odp. Praca ciężkości: $mgl \sin \alpha =$ energii kinetycznej: $\frac{1}{2} mv^2$, skąd $v = \sqrt{2 gl \sin \alpha}$ (porówn. ust. 63).

200) Ciało o masie m zostało rzucone w kierunku poziomym z prędkością v_0; jaką prędkość (v) posiada ono, zniżywszy się o s pod poziom tego punktu, z którego było rzucone?

Odp. Energia kinetyczna wynosi z początku $\frac{1}{2} m v_0^2$, praca ciężkości $= mgs$, przyrost energii kinetycznej $= \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = mgs$, skąd $v = \sqrt{v_0^2 + 2gs}$.

201) Sprawdzić to przez rozłożenie prędkości na składowe.

Odp. Pozioma składowa jest stale $= v_0$; pionowa $= \sqrt{2gs}$, zatem prędkość całkowita $v =$ jak wyżej.

202) Ile pracy potrzeba użyć, aby koło rozpędowe ważące 400 *Kg*, mające ramię bezwładności = 60 *cm*, wprowadzić w ruch obrotowy o prędkości kątowej: 2 obroty na *sek?*

Odp. $L =$ energii kinetycznej $= \frac{1}{2} B \tilde{\omega}^2$, gdzie $B = 400000\ (60)^2$ $gr \,.\, cm^2$; $\tilde{\omega} = 4\pi = 12 \cdot 566$, zatem $L = 1 \cdot 137 \times 10^{11}$ *ergów.* Podzieliwszy to przez stosunek kilogrammetra do erga (ust. 103) znajdziemy $L = 1159$ *Kgm.*

203) Obliczyć tę samą pracę bezpośrednio w *kgm.*

Odp. $\tilde{\omega}$ zostaje jak pierwej; B wyraża się teraz liczbą $\frac{400}{9 \cdot 81} \times (0 \cdot 6)^2$; zatem $L = \frac{8\pi^2 \times 400 \times (0 \cdot 6)^2}{9 \cdot 81} = 1159$ *kgm.*

204) Jednolity walec kołowy, mający masę $= m$ i promień $= r$,

stacza się po płaszczyznie pochyłonej do poziomu pod kątem α, wzdłuż drogi s; obliczyć prędkość (v) i przyśpieszenie (γ), jakie posiada oś walca.

Odp. Praca ciężkości: $L = mgs \sin \alpha$. Energia kinetyczna walca w ruchu postępowym $= \frac{1}{2} mv^2$. Walec staczający się z prędkością v, obraca się jednocześnie około osi z prędkością kątową $\bar{\omega} = \frac{v}{r}$. Całkowita energia kinetyczna wynosi więc: $T = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} B \frac{v^2}{r^2} = L$. Stąd znajdziemy, kładąc $\frac{B}{m} = k^2$, gdzie k jest ramieniem bezwładności względem osi:

$$v = \sqrt{2 \frac{gr^2 \sin \alpha}{r^2 + k^2} \cdot s}, \text{ zatem } \gamma = \frac{gr^2 \sin \alpha}{r^2 + k^2}.$$

Ponieważ dla walca $k^2 = \frac{1}{2} r^2$ (ust. 75), przeto $\gamma = {}^2/_3\, g \sin \alpha$ (porównaj zadanie 145).

205) Na obwodzie cienkiej obręczy, o promieniu 20 *cm*, ważącej 800 *gr*, owinięta jest nitka, której górny koniec przytwierdzony jest do powały. Jaką prędkość uzyska środek obręczy, gdy dozwolimy jej spadać z wysokości 4 *m*?

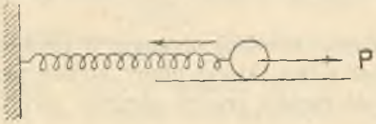
Odp. Praca ciężkości $L = 313\,920\,000$ *ergów* $= (800 \times 981 \times 400)$. Energia kinetyczna ruchu postępowego $= \frac{1}{2} \times 800 \times v^2$; ruchu obrotowego toż samo ($r = k$); przeto: $800 v^2 = 313\,920\,000$; $v = 626$ *cm/sek.*

109. Energia potencyalna. Jeżeli ciało poddane działaniu siły nie jest zupełnie swobodne, a więc, jeżeli działają na nie inne jeszcze siły, lub opory, które muszą być przezwyciężane podczas ruchu, wtenczas praca wykonana przez siłę poruszającą nie objawi się w całości pod postacią energii kinetycznej. Energia kinetyczna będzie w tym razie mniejsza, o tyle, ile wynosi praca użyta na przezwyciężenie owych sił.

Przypuśćmy n. p., że ciało uważane porusza się z pewnem tarciem, jak wóz opatrzony hamulcem. Jeżeli użyjemy siły wystarczającej zaledwie do zrównania tego oporu, wówczas ruch, raz zaczęty, odbywać się będzie jednostajnie; energia kinetyczna nie powiększy się, jakkolwiek wielką byłaby droga, a więc i praca wykonana. W tym przypadku, zdawałoby się, praca została zupełnie i bez śladu zmarnowana; w każdym razie nie nagromadziła się w postaci energii dynamicznej. O tem, co się z nią stało, będzie mowa osobno, w ust. 114.

Przyjmijmy natomiast, że ciało porusza się bez tarcia, ale że jest uwiązane do sprężyny (ryc. 93), która wypręża się, gdy je przesuwamy. Jeżeli znowuż przyłożymy siłę *P*, wystarczającą właśnie do przezwyciężenia oporu sprężystego tej sprężyny, to, jak poprzednio, energia kinetyczna nie wytworzy się; dostrzegamy jednak, że praca wykonana przez nas nie została zmarnowana; w napiętej sprężynie tkwi bowiem zdolność oddania tej pracy, skoro mianowicie dozwolimy jej rozprężyć się i powrócić do pierwotnego ustroju. Sprężyna napięta (napięty łuk i t. p.) jest zatem zbiornikiem nagromadzonej pracy, posiada więc energię. Nie jest to jednak energia ruchu, kinetyczna; ona zależy od zmienionego położenia części układu względem siebie — od zmienionego ustroju sprężyny — i nazywa się energią położenia, albo energią potencyalną.

W podobny sposób nagromadza się energia potencyalna, gdy odciągamy kawałek żelaza od magnesu, gdy podnosimy ciężar na



Ryc. 93.

wyższy poziom i t. p. We wszystkich podobnych przypadkach praca wykonana przez nas przeprowadza ciała, lub ich części w nowe, korzystniejsze, względem siebie położenia; wracając do położeń pierwotnych, wykonywają one, oddają włożoną w nie pracę, pozbywając się zarazem energii potencyalnej. Nakręcanie zegarka, wagowego, lub sprężynowego jest takiem nagromadzaniem, kosztem naszej pracy, energii potencyalnej w sprężynie lub ciężarze, energii, która następnie zużywa się stopniowo, przez dobę lub więcej, na dostarczanie pracy potrzebnej do utrzymania mechanizmu w ruchu, t. j. do pokonania tarcia kółek, oporu jaki powietrze przedstawia ruchowi wahadła i t. p.

Jeżeli zastanowimy się, dlaczego praca marnuje się, gdy pokonywa tarcie, a natomiast może być odzyskana, nagromadza się w postaci energii potencyalnej, jeżeli oporem przezwyciężanym jest ciężkość, sprężystość, przyciąganie magnesów, lub elektryczne, to dostrzeżemy bez trudu, że przyczyną jest różnica w sposobie działania tych dwu kategoryj sił. Tarcie przeszkadza zawsze ruchowi ciał, czy on odbywa się w tę, czy ową stronę, naprzód lub wstecz. Ciało przesunięte wbrew tarciu, nie może następnie cofnąć się z pomocą tarcia, praca tarcia nie może nigdy być ujemna, nie może być zwróconą, albo odrobioną. Siły, działające na podobieństwo tarcia, rozpraszają zatem, nie nagromadzają pracę; nazywają się one też dlatego siłami rozpraszającemi. Tu należy tarcie ciał stałych, opór powietrza i innych płynów, wogóle t. zw. tarcie wewnętrzne; pewne siły elektryczne i magnetyczne, w działaniu swem podobne do tarcia; siły występujące przy uderzeniu się ciał niesprężystych, które poddają się działaniu siły, ale następnie już się nie rozprostowują i t. p.

Inny jest sposób działania ciężkości, sprężystości, przyciągania magnetycznego i t. p.; praca, użyta na przezwyciężenie tych sił, nie rozprasza się, lecz zachowuje się, jako energia potencyalna; są to t. zw. siły zachowawcze. Natężenie i kierunek ich działania określone są tylko przez wzajemne położenia ciał, między któremi one działają (n. p. żelaza i magnesu, albo lepiej dwu magnesów). W danem położeniu wzajemnem działanie ich jest jednakie, czy ciała idą naprzód, czy wracają się wstecz, czy poruszają się szybko, czy wolno. Jeżeli tedy podniosę ciężar do góry nakładem pewnej ilości pracy, albo ugnę sprężynę, to odzyskam włożoną pracę w całości, gdy dozwolę sprężynie lub ciężarowi wrócić do pierwotnego położenia; licząc pracę odzyskaną ze znakiem ujemnym, otrzymam w końcu zero, jako wartość całkowitej wykonanej pracy. Jest to cecha odznaczająca wszelkie siły zachowawcze. Ażeby rozpoznać, czy siły czynne w jakim układzie materyalnym są zachowawcze lub nie, dość będzie poprowadzić ciała należące do układu po jakichkolwiek zamkniętych w sobie obwodach, t. j. doprowadzić je w końcu do położeń pierwotnych; jeżeli łączna praca wykonana (suma algebraiczna wszystkich prac) okaże się równa zeru, będzie to świadectwem, że siły są zachowawcze. Cechy tej tarcie widocznie nie posiada; na obwodzie zamkniętym w sobie praca nie będzie zero, przeciwnie, będzie zawsze tem większa, im dłuższy obwód.

Miarą energii potencyalnej, nagromadzonej w układzie zachowawczym w jakiemkolwiek jego położeniu, jest ilość pracy, którą trzeba wykonać, żeby przeprowadzić układ, zwolna z położenia przyjętego za początkowe [1]) *do położenia lub ustroju uważanego.* Kształt torów,

---

[1]) Wartość energii potencyalnej zależy wskutek tego od wyboru położenia początkowego. Energia potencyalna ciężaru będzie inna względem powierzchni ziemi, inna względem dna studni.

po których prowadzić będziemy ciała nie może tu mieć żadnego znaczenia, skoro na wszelkich drogach zamkniętych w sobie łączna praca ma być zero, boć możemy po różnych drogach iść naprzód, a zawsze po tej samej wracać. Tak n. p. energia potencyalna łuku napiętego jest równa całkowitej pracy wykonanej podczas napinania, jakkolwiekbyśmy urządzili to napinanie; gdyby się okazało, że w rzeczywistości tak nie jest, znaczyłoby to, że sprężystość łuku nie jest doskonała, że nie jest, w ściślem znaczeniu tego wyrażenia, siłą zachowawczą. *Energia potencyalna zależy zatem tylko od rozmieszczenia ciał lub ich części; nie zależy od tego, w jaki sposób one do tych położeń doszły.*

Układ, uzbrojony w energię potencyalną (n. p. sprężyna napięta, magnes odsunięty od drugiego, który go przyciąga, albo zbliżony do takiego, który go odpycha), oddaje w całości pracę nagromadzoną, gdy powraca zwolna od położenia początkowego, przezwyciężając przytem jakieś zewnętrzne opory — jak ciężar poruszający mechanizm zegarowy. Gdyby jednakże takich oporów zewnętrznych, mogących odebrać pracę, nie było — gdybyśmy n. p. przecięli sznur, na którym wisi ciężar u zegara — wówczas cały ten zapas pracy pozostałby w układzie i wyszedłby na jego korzyść. Podczas powrotu do położenia początkowego, praca sił działających między częściami układu wprowadzi masy w ruch, wytworzy (wedł. ust. 107) energię kinetyczną w ilości ściśle równoważnej ilości pracy, a więc ilości zużytej energii potencyalnej. Ciężar odcięty od zegara spadnie z prędkością wzrastającą, sprężyna rozprężająca się swobodnie zacznie drgać. Zużycie energii potencyalnej wynagradza się wtenczas (w układzie swobodnym) nabytkiem równej ilości energii kinetycznej — która może znowuż, wstecz, w potencyalną się przeobrazić (przykład: kula doskonale sprężysta spada na ziemię i odbija się znowu do góry). Obadwa te rodzaje energii są zupełnie równoważne sobie, stanowią dwie formy t. zw. energii dynamicznej; mierzą się temiż samemi miarami, miarami pracy (ust. 103).

Dla energii potencyalnej, którą oznaczać będziemy literą U, nie ma jednej powszechnej formuły, jak ta, którą wyrażamy energię kinetyczną — chyba, że napiszemy $U = L$, co oznacza, że energia potencyalna mierzy się pracą użytą do jej wytworzenia. Zależność atoli energii potencyalnej od wzajemnego położenia ciał, lub części uważanego układu, musi być w każdym przypadku zbadana doświadczalnie. Ilekroć znane są dokładnie prawa działania sił czynnych w układzie, wówczas można też obliczyć wartość energii potencyalnej, w każdem położeniu, jak to okaże następujący przykład.

Energia ciał ciężkich. Podnosząc ciało o masie m na wysokość z, nad pierwotny poziom, wykonywamy przeciw ciężkości pracę $L = mgz$, bez względu na to, czy podnosimy je pionowo do góry, czy po drodze ukośnej lub krzywej. Jeżeli bowiem droga s zawiera z pionem kąt θ, wtenczas wartością pracy wykonanej będzie: $mgs \cos \theta$ (ust. 104) czyli mgz, gdzie $z = s \cos \theta$ oznacza różnicę wysokości poziomów przechodzących przez początkowy i końcowy punkt drogi; obliczając pracę wykonaną przeciw ciężkości, liczy się zatem tylko pionowe składowe dróg. W ciele podniesionem do wyższego poziomu mieści się więc zapas energii potencyalnej: $U = mgz$, równy pracy zużytej przy podnoszeniu. Dozwólmy w istocie ciału spadać do pierwotnego poziomu, po jakiejkolwiek prostej albo krzywej drodze, natenczas, powróciwszy do poziomu dolnego, uzyska ono prędkość: $v = \sqrt{2gz}$ (ust. 63), a zatem energię kinetyczną $T = \frac{1}{2} mv^2 = mgz = U$. Na miejsce energii potencyalnej pojawi się więc równoważna ilość kinetycznej.

Obliczając pracę wykonaną przeciw ciężkości, przy podnoszeniu jakiegobądź ciała, stałego albo płynnego, mnożymy całkowity ciężar ciała przez wysokość, do której podnosi się środek ciężkości ciała nad pierwotny poziom. Jeżeli bowiem ciało składa się z cząstek m_1, m_2, m_3 i t. d., a cząstki te znajdują się początkowo w wysokościach z_1, z_2, z_3 i t. d. nad pewnym poziomem, wówczas środek ciężkości (albo masy) znajduje się (ust. 51) w wysokości $z_0 = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \ldots}{m}$, gdzie $m = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots$ Gdy podniesiemy ciało do góry tak, iż m_1 wzniesie się do wysokości Z_1, m_2 do Z_2 i t. d. nad tenże sam poziom (przyczem nawet kształt ciała może się zmienić), wykonamy ogółem pracę: $L = m_1 g (Z_1 - z_1) + m_2 g (Z_2 - z_2) + \ldots$ Jeżeli oznaczymy przez Z_0 wysokość środka ciężkości w nowem położeniu ciała, wówczas będzie:

$$Z_0 = \frac{m_1 Z_1 + m_2 Z_2 + \ldots}{m}.$$

Uwzględniwszy to, widzimy, że:

$$L = gmZ_0 - gmz_0, \text{ czyli } L = mg(Z_0 - z_0).$$

$Z_0 - z_0$ oznacza wzniesienie się środka masy. Aby n. p. obliczyć pracę wykonaną przeciw ciężkości przy budowie domu ceglanego, pomnożymy ogólny ciężar wszystkich cegieł, przez wysokość środka ciężkości domu, nad poziomem, w którym znajdował się pierwotnie środek ciężkości materyału budowlanego.

110. Układy zachowawcze i rozpraszające. Układ materyalny, między częściami którego działają tylko siły zachowawcze, z wykluczeniem tarcia i wszelkich innych sił rozpraszających, nazywa się układem zachowawczym. Już to określenie wskazuje, że układ taki nie jest możliwy w przyrodzie, gdyż wiadomo, że tarcia nie można nigdy całkowicie się pozbyć. Można jednak, zmniejszając opory ruchu, w myśli przynajmniej, zbliżyć się dowolnie do warunków idealnych układu zachowawczego. Wyobraźmy sobie n. p. wahadło, zawieszone na osi, obracającej się bez tarcia, umieszczone w naczyniu zamkniętem, z którego wypompowano powietrze, żeby pozbyć się także oporu, który ono w ruchu przedstawia. Wahadło takie, łącznie z ziemią, która przyciąga je siłą ciężkości, stanowiłoby układ zachowawczy; jedyną siłą czynną w tym układzie byłaby ciężkość, która jest siłą zachowawczą i reakcya punktów oparcia osi, które nie wchodzą tu w rachubę, gdyż nie wykonywają, ani nie spożywają żadnej pracy. Odchylając wahadło (ciężar jego $= Q$) zwolna, dopóki jego środek ciężkości nie wzniesie się na wysokość z nad poziom, w którym znajdował się w równowadze, wykonamy pracę (ust. 109) $L = Qz$. Pozostawione samemu sobie wahadło takie wahałoby się bez ustanku; energia jego, w położeniach skrajnych wyłącznie potencyalna, w chwili przejścia przez położenie równowagi wyłącznie kinetyczna, zachowałaby bez zmiany wartość stałą. Spadając, wahadło traci energię potencyalną U, ale strata ta równoważy się nabytkiem równej ilości energii kinetycznej T. Zawsze byłoby:

$$(1) \qquad T + U = \text{stała } L.$$

W każdym układzie zachowawczym, odosobnionym, całkowita energia, złożona z części kinetycznej i potencyalnej, zachowuje niezmiennie stałą wartość, równą pracy użytej celem wprowadzenia go w ruch. Z układu takiego możnaby każdej chwili odzyskać włożoną weń pracę, w ilości nieuszczuplonej. Inny przykład: kula doskonale sprężysta spada (w próżni) na doskonale sprężystą podstawę, odbija się do pierwotnej wysokości, spada ponownie i t. d. bez końca.

Zasada mechanicznego perpetuum mobile. Najpospolitsze doświadczenia przekonywają nas, że układy podobne do opisanych wyżej nie zdarzają się nigdy w przyrodzie. Układem do zachowawczego najbardziej jeszcze zbliżonym byłby może układ planetarny.

Planety poruszają się bowiem w przestrzeni niemal zupełnie próżnej, pod działaniem sił wzajemnego przyciągania się, które są siłami zachowawczemi (rozd. nast.). Krążąc około słońca, przyśpieszają biegu, ilekroć do słońca się zbliżają (ust. 20)—odpowiada to przemianie energii potencyalnej na kinetyczną — podczas oddalania się ruch ich wolnieje. Odkąd pamięć ludzka sięga, nie dostrzeżono żadnych objawów rozpraszania się tej energii, n. p. zwolnienia obrotu ziemi około osi. Nie można jednak wątpić, że powolna zatrata energii dynamicznej odbywa się wciąż i w tym układzie, aczkolwiek jest niesłychanie mało znaczna, w porównaniu z ogromnemi zapasami, nagromadzonemi w olbrzymich masach planet. Znane są bowiem w układzie planetarnym działania niewątpliwie rozpraszające, jak n. p. spotykanie się ziemi i innych planet z meteorytami, trącymi się o atmosferę aż do rozżarzenia (gwiazdy spadające), tarcie się wód oceanu o lądy i cieśniny, podczas codziennego przypływu i odpływu morza i t. d. Układ słoneczny nie jest zatem z pewnością ściśle zachowawczy.

Odwieczne a zawsze bezskuteczne próby i doświadczenia dowodzą, że niepodobna zbudować machiny, którаby, wprowadzona w ruch, poruszała się, sama przez się, bez ustanku (perpetuum mobile), wetując sama w sobie straty energii dynamicznej, ponoszone wskutek nieuniknionych tarć, uderzeń niesprężystych i t. p. Niepodobna urządzić zegara, któryby sam się nakręcał, ani wozu, któryby sam się poruszał, nie zasilany z zewnątrz pracą (albo jakim jej równoważnikiem, węglem, prądem elektrycznym, wogóle energią w jakiejbądź postaci). Nie ma tedy lepiej ugruntowanej ogólnej zasady fizycznej, jak następująca (*zasada niemożliwości perpetuum mobile*): *W żadnym układzie materyalnym, odosobnionym, a poruszającym się, zapas pracy nagromadzonej nie zachowuje się bez zmiany. Ilość pracy, którą można odebrać z takiego układu, sprowadzając go do początkowego stanu, zmniejsza się ustawicznie z biegiem czasu.* Wahadło, wprowadzone w ruch, zatrzyma się w końcu, chociażbyśmy wszystko uczynili, co jest praktycznie możebne, żeby zmniejszyć opory ruchu; piłka sprężysta, spadając na ziemię, odbija się za każdym razem niżej i t. p.

Zasada powyższa orzeka nietylko, że energia dynamiczna nie może z niczego powstać, lecz wymaga zużycia równoważnej ilości pracy — ona stwierdza nadto tę cechę powszechną układów materyalnych, że usiłują one zawsze zatracić nagromadzone w nich zapasy energii dynamicznej. Obaczymy zresztą, że energia ta nie ginie, lecz przeobraża się w inne, niedynamiczne formy.

Zasada pracy przygotowanej. Jakkolwiek tedy układy ściśle zachowawcze nie istnieją w przyrodzie, rozważanie własności ich nie jest jednak bez korzyści, pozwala bowiem zrozumieć własności takich układów, które bodaj w przybliżeniu można uważać jako zachowawcze; wszakże opisując wyżej n. p. spadanie ciężarów, albo ruch wahadła, rozważaliśmy te zjawiska tak, jak gdyby one odbywały się w sposób zachowawczy, t. j. zaniedbywaliśmy opór powietrza, tarcie i t. p.

O ile układy materyalne mogą być uważane jako zachowawcze, można w szczególnie prosty sposób określić ich warunki równowagi. Wyobraźmy sobie jakikolwiek układ zachowawczy, utrzymywany nieruchomo, w jakiemkolwiek położeniu, za pomocą stosownych sił zewnętrznych (n. p. wahadło odchylone od pionu, trzymane nieruchomo). Jeżeli układ taki puścimy, t. j. pozostawimy go samemu sobie, wówczas zacznie on w ogólności poruszać się pod wpływem sił, które w nim samym są czynne. Jego energia kinetyczna zacznie wzrastać, a przeto potencyalna musi od razu zmniejszać się, gdyż suma obu tych form energii w odosobnionym układzie nie może się zmienić. Układ zachowawczy odosobniony może zatem tylko wtenczas zacząć poruszać się, gdy to poruszenie się będzie połączone z ubywaniem energii potencyalnej, a więc, *gdy siły czynne w układzie wykonywają przytem dodatnią pracę*.

Gdybyśmy znaleźli takie położenie lub ustrój układu, iż każde malutkie przesunięcie stamtąd powodowałoby ujemną pracę sił, działających między jego częściami, wówczas układ nie mógłby żadną miarą opuścić tego położenia z własnej mocy, znajdowałby się koniecznie w równowadze (jak wahadło wiszące w pionie, na którem ciężkość wykonywa przecież ujemną pracę, gdy odchyli się w jakąkolwiek stronę od pionu). Naruszenie równowagi nie mogłoby zresztą nastąpić także wtedy, gdyby praca ta była równa zeru.

Praca sił czynnych w układzie, wykonana w jakiemkolwiek malutkiem przesunięciu części składowych, zgodnem z jego ustrojem, nazywa się pracą przygotowaną. Widzimy tedy, *że układ będzie na pewne w równowadze, w każdem takiem położeniu, w którem* *praca przygotowana, odpowiadająca wszelkim możebnym przesunięciom, jest ujemna (albo zero)* — jeżeli oczywiście pomieścimy układ w tem położeniu już początkowo bez ruchu.

Zadania.

(Siły zachowawcze). 206) Ile wynosi energia potencyalna ciała ważącego 50 *gr*, które podniesiono na wysokość 4 *m*.

Odp. $50 \times 981 \times 400 = 19\,620\,000$ *ergów*, albo $50 \times 400 = 20\,000$ *gr . cm.*

207) Obliczyć osobno energię kinetyczną T, osobno potencyalną U, powyższego ciała podczas spadania, gdy wysokość jego nad poziomem wynosi 4, 3, 2, 1, 0 *m*.

Odp. a) $T = o$, $U = 19\,620\,000$ *ergów*; b) $T = 4\,905\,000$ *ergów*, $U = 14\,715\,000$ *erg.*; c) $T = U = 9\,810\,000$ *erg.*; d) $T = 14\,715\,000$, $U = 4\,905\,000$; e) $T = 19\,620\,000$, $U = o$.

208) Sprężyna pewna, o długości = 60 *cm*, obciążona ciężarem 20 *gr*, przedłuża się o $^1/_{10}$ część długości pierwotnej; ile energii potencyalnej mieści się w tej sprężynie, gdy ją wydłużymy o połowę pierwotnej długości?

Odp. $30 \times 100 \times \frac{1}{2} = 1500 =$ *gr . cm.*

209) Ciało o masie m, przytwierdzone do bardzo lekkiej sprężyny (której masę opuszczamy) zostało odchylone z położenia równowagi i wykonywa następnie ruch drgający, prosty, w okresie τ, z amplitudą a. Obliczyć dla jakiejbądź chwili: energię kinetyczną T, potencyalną U, tudzież całkowią energię $E = T + U$.

Odp. Wzory: $s = a \sin \frac{2\pi t}{\tau}$; $v = \frac{2a\pi}{\tau} \cos \frac{2\pi t}{\tau}$; $\gamma = \frac{4\pi^2}{\tau^2} s$ (ust. 22, 24) dają:

$$P = \frac{4\pi^2 m}{\tau^2} . s, \quad \text{zatem} \quad U = \tfrac{1}{2} P . s = \frac{2a^2\pi^2 m}{\tau^2} \sin^2 \frac{2\pi t}{\tau};$$

$$T = \tfrac{1}{2} mv^2 = \frac{2a^2\pi^2 m}{\tau^2} \cos^2 \frac{2\pi t}{\tau}; \quad E = \frac{2a^2\pi^2 m}{\tau^2}.$$

210) Wahadło złożone, ważące 800 *gr*, w którem odległość środka ciężkości od osi wynosi 75 *cm*, zostało odchylone z pionowego położenia o kąt 42°; ile energii uzyskało ono wskutek tego?

Odp. $800 \times 75 \times 2 \sin^2 21^0 = 15412$ *gr . cm.*

211) Obliczyć energię kinetyczną układu, składającego się z dwu kul doskonale sprężystych: przed uderzeniem i po uderzeniu (podług wzoru 5, ust. 53).

Odp. Wzór rzeczony daje $\frac{1}{2} m_1 u_1{}^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2{}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1{}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2{}^2$, t. zn. energia kinetyczna nie ponosi straty wskutek uderzenia się kul doskonale sprężystych.

212) Ile pracy potrzeba użyć celem wypompowania 200 litrów wody ze studni, o przekroju kwadratowym (bok = 1 *m*), do zbiornika pryzmatycznego o podstawie poziomej i również kwadratowej (bok=0·3 *m*), jeżeli dno zbiornika znajduje się w wysokości 8 *m* nad pierwotną powierzchnią wody w studni?

Odp. $200 \times 10{\cdot}32 = 2064$ *kgm.*

(Siły rozpraszające). 213) Piłka gumowa, ważąca 60 *gr*, puszczona na ziemię z wysokości 2 *m*, odbiła się na wysokość 1·5 *m*, ile energii dynamicznej zniknęło podczas uderzenia? *Odp.* 3000 *gr. cm.*

214) Obliczyć stratę energii w uderzeniu się dwu kul, dla których stosunek prędkości odbicia, do prędkości uderzenia wyraża się liczbą *k*.

Odp. Wzory (4) ust. 53 dają: $(\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2) - (\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2) = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(1-k^2)(v_1-v_2)^2$.

215) Wahadło ważące 500 *gr*, w którem odległość środka ciężkości od osi wynosi 60 *cm*, odchyla się z początku o 20^0 od pionu; po niejakim czasie odchylenie jego zmniejsza się wskutek różnych oporów o 10^0. Ile energii utraciło ono w przeciągu tego czasu?

Odp. $2 \times 500 \times 981 \times 60 \times (\sin^2 10^0 - \sin^2 5^0) = 1327800$ *erg.*

216) Wóz ważący 200 *kg* wciągnięty został na wzgórek o wysokości 10 *m*, wzdłuż drogi o długości 60 *m*; na pokonanie samego tarcia użyto siły 4 *kg*. Ile pracy użyto w całości, ile energii zostało, ile pracy rozproszono? *Odp.* 2240, 2000, 240 *kgm.*

111. Machiny. Machinami nazywamy zestawienia ciał, służące do tego, aby zastosować pracę w sposób do pewnego celu najwłaściwszy. Jeżeli n. p. praca polega i na rozrywaniu ziaren zboża na drobne cząstki celem uzyskania mąki, wtenczas najwłaściwszą rzeczą będzie zastosować kamień młyński, połączony z szeregiem kół zazębionych i t. p., poruszanych zewnętrzną siłą. W machinę taką wkładamy pracę z zewnątrz, obracając ją; jednocześnie ona oddaje, wykonywa pracę, tam i takiej formy, jak tego w danym przypadku pragniemy.

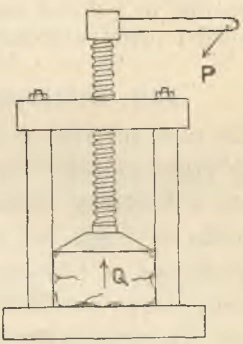
Machina, nie mająca w sobie sama jakiegokolwiek źródła energii, nie ulegająca podczas przenoszenia pracy żadnej zmianie wewnętrznej, *nie może wydać więcej pracy, aniżeli jej z zewnątrz udzielono*; w przeciwnym razie stanowiłaby perpetuum mobile, byłaby niewyczerpanem źródłem energii. Machiny tego rodzaju nazywają się r o b o c z e m i. Tu należą n. p. kamienie młyńskie, machiny wiertnicze, hyblarki, windy, dźwignie, śruby i t. p.

Do poruszania machin roboczych potrzebne są machiny dostarczające pracy, czyli t. zw. motory. One również nie stwarzają pracy, lecz wydają ją w zamian za energię dostarczaną im w jakiejkolwiek postaci; tu należą motory wodne (koła i turbiny), motory parowe, gazowe, elekryczne, żywe i t. p.

Gdyby między częściami składowemi machin roboczych nie istniały tarcia, wstrząśnienia i inne siły rozpraszające, natenczas praca, udzielona im z zewnątrz, mogłaby być w całości odzyskana, gdyż wtedy moglibyśmy uważać je jako układy zachowawcze. Na tej zasadzie można w wielu przypadkach zdać sobie sprawę ze sposobu działania machin i z korzyści, jakich one dostarczają.

Jeżeli na pewien punkt machiny działa siła zewnętrzna P, a pewien drugi punkt machiny pracuje, t. j. pokonywa zewnętrzny opór Q, wówczas zależność sił P i Q można znaleźć w sposób następujący. Skoro pierwszy z tych punktów przesunie się pod działaniem siły P w jej kierunku o długość s, wtedy praca udzielona machinie będzie $= Ps$. Droga, wzdłuż której opór Q został jednocześnie odparty, niech będzie $= \sigma$; długość jej zależy w każdym przypadku od konstrukcyi machiny; praca wydana przez machinę wynosi więc $Q\sigma$. Otóż w najkorzystniejszym przypadku, gdyby nie było straty w samejże machinie, wskutek tarcia i t. p., mielibyśmy:

$$Ps = Q\sigma.$$



Ryc. 94.

Za pomocą małej siły P można łatwo pokonać większy opór Q, jeżeli droga oporu σ będzie dostatecznie krótka, w stosunku do drogi siły s. Zysk na sile równoważy się stratą na drodze; Q będzie w tym stosunku większe od P, w jakim s jest większe niż σ.

Weźmy n. p. pod uwagę śrubę, używaną w prasach do ściskania ciał (ryc. 94). Krok śruby niech wynosi h; śruba posuwa się zatem przy jednym obrocie o h naprzód. Jeden koniec śruby obracamy za pomocą dźwigni o długości l, używając siły P. Siła Q, wywarta w prasie, będzie tyleż razy większa niż P, ile razy obwód koła o promieniu l (droga siły P przy jednym obrocie), jest większy niż krok śruby (droga siły Q). Mamy bowiem:

$$s = 2\pi l,\quad \sigma = h,\ \text{zatem}\ 2\pi l P = Qh,\ \text{skąd}\ Q = P\,\frac{2\pi l}{h}.$$

Rozważania tego rodzaju stosują się przedewszystkiem do rozwiązywania zagadnień statycznych t. j. do znalezienia warunków równowagi sił P i Q działających na machinę. Dostrzeżemy bowiem łatwo, że są to zastosowania ogólnej zasady pracy przygotowanej (ust. 110).

Jeśli chodzi o machiny będące w ruchu, natenczas uwzględnić należy także zmiany energii kinetycznej samej machiny. Praca udzielona machinie zużywa się wtedy: 1-sze na powiększenie energii kinetycznej samej machiny; 2-gie na pokonanie oporów zewnętrznych, czyli na pracę użyteczną, do której machina jest przeznaczona; 3-cie na pokonanie oporów wewnętrznych, czyli szkodliwych (tarcie, wstrząśnienia). Skoro ruch machiny stanie się jednostajny, t. j. gdy energia kinetyczna machiny przestanie się powiększać, praca udzielana jej dzieli się na części wymienione pod 2 i 3. Jeśli usuniemy, albo zmniejszymy opory 2, wtenczas nadmiar pracy udzielonej objawi się w zwiększonym ruchu samej machiny. Dzieje się to n. p. gdy odczepimy machiny robocze od motoru. Ruch jego wzmaga się wówczas, dopóki nie nastąpi (przez zwiększenie oporów 3, wskutek zwiększonej prędkości) nowa równowaga pracy udzielonej i pracy straconej 3.

112. Dzielność. W praktycznem zastosowaniu motorów chodzi nam nietylko o ilość wykonanej przez nie pracy, ale także o czas, w ciągu którego została wykonaną. Praca jest tem użyteczniejsza, im w krótszym czasie bywa wykonana. Woda sącząca się kroplami może w ciągu lat wykonać tyleż pracy, ile jej wykonywa obfity wodospad w przeciągu niewielu sekund; w drugim razie jednak cenimy oczywiście źródło pracy wyżej; do celów praktycznych ono jest użyteczniejsze. Wątły robotnik może wprawdzie wykonać bardzo znaczną pracę, jeśli ona będzie rozłożoną na długi przeciąg czasu; dzielnym wszakże nazwiemy takiego, który zdoła wykonać ją szybko. Pojęcie dzielności stosujemy nietylko do motorów żywych, lecz do wszelkich źródeł pracy i energii.

Za miarę dzielności motoru, lub jakiegokolwiek innego źródła pracy, lub energii, przyjmuje się pracę, lub energię, wydawaną, przypadającą na jednostkę czasu. Dzielność określamy zatem jako stosunek pracy, do czasu, w ciągu którego została wykonana. Zważywszy, że praca jest proporcyonalna do siły działającej i do drogi, droga zaś przypadająca na jednostkę czasu jest miarą prędkości, widzimy, że dzielność jest proporcyonalna do siły i prędkości, z jaką siła pokonywa opory. W istocie, jeżeli n. p. siła jest stała, a ruch jednostajny, wtenczas mamy:

$$L = Ps;$$

oznaczając przez K dzielność, znajdziemy:

$$K = \frac{Ps}{t} = Pv.$$

Jednostki dzielności. a) W bezwzględnym układzie miar jednostką dzielności będzie:

$$erg\ na\ sekund\k{e} = \frac{gr\,.\,cm^2}{sek^2} : sek = \frac{gr\,.\,cm^2}{sek^3}.$$

W zastosowaniach technicznych używa się wyłącznie niemal wielokrotności tej jednostki, sama jest bowiem zbyt drobną; mianowicie są w użyciu:

Watt = 10^7 *ergów na sekundę.*
Kilowatt = 1000 *Wattów*:

nazwy te wybrano na pamiątkę znakomitego wynalazcy machiny parowej:

b) W układzie ciężarowym:

Gramcentymetr na sekundę = 981 *ergów na sek.*
Kilogrammetr na sekundę = 100 000 *gramcentymetrów na sek.*
= 98 100 000 *ergów na sek.*
= 9·81 *Wattów.*
Koń parowy = 75 *Kgm/sek* = 736 *Wattów.*

Dzielność człowieka dorosłego wynosi 6—11 *kgm/sek*, zależnie od swobody ruchów przy pracy; konia: 40—70 *kgm/sek*, t. j. 0·53—0·93 konia parowego.

113. Wattmetry. Wymierzenie pracy dostarczanej przez motory jest zadaniem znacznej doniosłości praktycznej; do pomiarów tych używa się przyrządów zwanych wattmetrami[1]). Praca przenosi

---

[1]) Dawniej nazywano je powszechnie dynamometrami, (także ergometrami); dynamometr wszelako oznacza przyrząd do mierzenia siły (ust. 96). Niewłaściwą również jest rzeczą mówić o »sile« motoru, n. p. machiny parowej, gdy się ma na myśli dzielność.

się zwykle z motorów do machin roboczych za pośrednictwem wału, obracającego się jednostajnie, połączonego z machinami roboczemi za pomocą pasów rzemiennych. *Praca, przeniesiona* za pośrednictwem wału w przeciągu pewnego czasu, *równa się iloczynowi z momentu jaki wał wywiera, przez kąt* (w mierze łukowej), *o który w ciągu uważanego czasu wał się obrócił* (ust. 104). *Dzielność równa się przeto iloczynowi z tegoż momentu przez prędkość kątową obrotu wału.* Jeżeli bowiem pomyślimy, że działanie obracające motoru na wał zastąpiono siłą P, z ramieniem r, natenczas praca tej siły w ciągu jednego obrotu (równa pracy motoru) wynosić będzie $2\pi r \times P$, albo $2\pi \times Pr$; oznaczywszy przez n liczbę obrotów wału na sekundę, otrzymamy, jako wyrażenie dzielności $2\pi n \times Pr$, albo $\tilde{\omega} \times Pr$ ($\tilde{\omega} =$ prędkość kątowa wału). Z tego wynika od razu powyższe twierdzenie, skoro zważymy, że Pr przedstawia moment równoważny działaniu wału, 2π kąt jednego obrotu.

Pomiar pracy albo dzielności motorów sprowadza się tedy do pomiaru 1) momentu, 2) liczby obrotów w ciągu pewnego czasu, lub też prędkości kątowej.

Wattmetry bywają dwojakie; przy użyciu jednych oddziela się machiny robocze od motoru, a pracę wydawaną przezeń zużywa się na pokonanie oporu sztucznie utworzonego, a znanego — zwykle tarcia. Można n. p. owinąć sznur około wału i obciążyć końce jego nierównymi ciężarami P_1 i P_2 w taki sposób, żeby mimo tarcia, które sprawia wał obracający się, sznur był w spoczynku; tarcie sznura o wał stanowi w tym razie sztuczny opór, zużywający pracę. Jeżeli r oznacza promień wału, natenczas moment $(P_1 - P_2)\, r$ równoważy moment wału, za pośrednictwem tarcia sznura. Zmierzywszy nadto n, mamy $K = 2\pi nr\,(P_1 - P_2)$. [Ten sam cel osiąga się zapomocą t. zw. hamulca Pronyego w sposób następujący. Wał motoru ujmuje się w kleszcze, z dwu kawałków drzewa, które można ściągnąć mniej lub więcej silnie, zapomocą śrub. Do tego hamulca drewnianego przymocowany jest drążek poziomy, prostopadły do osi wału, o długości l. Podczas obrotu wału drążek ten byłby porwany przez tarcie hamulca o wał, przypuśćmy do góry. Obciążywszy jednak koniec jego ciężarem stosownie dobranym P, można sprawić, że mimo obrotu wału drążek będzie w równowadze. Dzielność motoru oblicza się wtedy według wzoru $K = 2\pi lPn$, w czem n oznacza liczbę obrotów wału w sekundzie (por. zad. 224)]. Drugi rodzaj wattmetrów mierzy pracę, nie tracąc jej wcale, a więc podczas przejścia jej do machin roboczych. Jeżeli n. p. na wale jest osadzone koło pasowe, z którego przenosi się ruch za pomocą pasa na machiny robocze, natenczas ta część pasa, która powraca do koła, będzie bardziej napięta, aniżeli ta, która się od koła oddala (wskutek tarcia pasa o koło). Wymierzywszy te napięcia: P_1 i P_2, mamy znowu: $K = 2\pi nr\ (P_1 - P_2)$, albo ogólniej: $K = (P_1 - P_2)\ v$, gdzie v oznacza prędkość pasa.

Zadania.

217) Winda składająca się z korby o długości 40 *cm*, z szeregu kół zazębionych i z wału o średnicy 15 *cm*, przytwierdzonego do osi ostatniego koła, jest tak urządzona, że przy 50 obrotach korby wał obraca się jeden raz. Na sznurze nawiniętym na wale wisi ciężar. Obliczyć wielkość ciężaru, który można podnieść za pomocą siły 2 *kg*, działającej na korbę, pomijając tarcie kół i osi.

Odp. $\frac{50 \times 2 \times 2\pi \times 0{\cdot}4}{\pi \times 0{\cdot}15} = 533$ *kg*.

218) Doświadczenie okazało, że przy pewnej prędkości obrotu windy można było za pomocą siły 2 *kg* podnieść ciężar wynoszący tylko 480 *Kg*. Jaki procent pracy użytej zostaje w powyższej machinie stracony na pokonanie szkodliwych oporów. *Odp.* $10^0/_0$.

219) Sznur przytwierdzony jednym końcem do powały, tworzy pętlę, na której zawieszony jest krążek (blok). Na osi krążka zawieszony jest ciężar, na wolny zaś koniec sznura, działa pionowo do góry siła równoważąca ciężar; jaki jest stosunek siły do ciężaru?

Odp. Siła = połowie ciężaru.

220) Koń chodzi w kieracie po obwodzie koła o promieniu 4 *m*, wywiera siłę pociągową 20 *kg* i obiega obwód koła 4 razy w przeciągu minuty; z jaką dzielnością pracuje koń?

Odp. $\frac{\text{Praca}}{\text{czas}} = \frac{4 \times 2\pi \times 4 \times 20}{60} = 33\frac{1}{2}$ *kgm/sek*; albo, moment $\times$ prędkość kątowa $= (20 \times 4)\ \frac{8\pi}{60} = 33\frac{1}{2}$.

221) Wodospad dostarcza na sekundę 1500 litrów wody, spadającej z wysokości 5 *m*; jaka jest dzielność wodospadu?

Odp. $1500 \times 5 = 7500$ *kgm/sek* = 100 koni parowych.

222) Jaką dzielność powinna mieć lokomotywa, mająca poruszać pociąg ważący 200 ton, z prędkością 12 *m/sek*, jeżeli opory ruchu wynoszą $^1/_{200}$ ciężaru pociągu. *Odp.* 160 koni.

223) Jaką objętość wody można wypompować w przeciągu godziny ze studni, której głębokość wynosi 20 *m*, jeżeli się pompuje z dzielnością 5 koni. *Odp.* $67\frac{1}{2}$ m^3.

224) Wał motoru uchwycono w drewniane kleszcze, do których przymocowano dźwignię o długości 2 *m*. Aby zrównoważyć dźwignię, którą wał obracający się usiłuje, wskutek tarcia, pociągnąć za sobą, potrzeba było zawiesić na jej końcu ciężar 30 *kg*. Obliczyć dzielność motoru, jeżeli wał czyni na minutę 120 obrotów.

Odp. Moment $\times$ prędkość kątowa $= 30 \times 2 \times \frac{120 \times 2\pi}{60} = 754$ *kgm/sek* (10 koni).

114. Wewnętrzne skutki pracy. Ilekroć praca zostaje zużyta na pokonanie tarcia, albo innych sił rozpraszających, nie zostawia ona po sobie skutków widocznych; dla energii dynamicznej jest więc stracona (ust. 109). Gdybyśmy n. p. polecili robotnikowi mieszać wodę, albo pocierać jakiekolwiek ciało twarde, innem, również nie rysującem się ani ścierającem, wówczas zdawałoby się, że niema sposobu sprawdzenia, czy praca zadana została wykonana i w jakiej ilości.

Badania, podjęte od początku XIX-go stulecia we wszystkich gałęziach fizyki, wykazały jednak, że praca, udzielona pewnemu ciału, nie zostaje nigdy bez skutków. Niekiedy bywają one jawne, objawiają się wzmożeniem kinetycznej albo potencyalnej energii układu. W przeważnej ilości przykładów są atoli ukryte czyli wewnętrzne. Kamienie pocierane o siebie rozgrzewają się, niekiedy stają się elektryczne: woda staje się wskutek mieszania cieplejszą. Rumford (w r. 1798) pierwszy wypowiedział twierdzenie, że jako skutek i równoważnik pracy utraconej wskutek tarcia, należy uważać ciepło, które przytem zawsze powstaje. Wniosek ten, poparty przez Davy'ego (1799), który okazał, że można stopić kawałki lodu w nizkiej temperaturze, pocierając je o siebie, został stanowczo udowodniony przez Joule'a, około połowy XIX wieku, za pomocą bezpośrednich pomiarów.

Ażeby módz porównywać pracę zużytą z wytworzonem ciepłem, należy mieć pewność, że praca nie została zużyta na nic innego, jak tylko na wytwarzanie ciepła. [Należy urządzić doświadczenie w taki sposób, żeby w układzie materyalnym, na którym wykonaliśmy pracę, nie wytworzyła się energia kinetyczna, żeby wogóle *nie nastąpiła żadna trwała zmiana jego ustroju fizycznego, ani chemicznego*, słowem, żeby po ukończeniu doświadczenia przyrząd użyty znajdował się dokładnie w takim stanie, w jakim był na początku. Jedyna zmiana, jaka wtedy nastąpi, polegać będzie na włożeniu w przyrząd pewnej ilości pracy i na wydobyciu zeń w zamian pewnej ilości ciepła]. Pamiętne doświadczenia Joule'a, z których zdajemy niżej sprawę, dowiodły, że w tych warunkach ilość wytworzonego ciepła jest zawsze ściśle proporcyonalna do ilości pracy zużytej. Okazało się, że jakikolwiek byłby ustrój układu, jakiekolwiek byłyby opory, które praca w nim przezwycięża, pewna dana ilość pracy wytwarza zawsze tę samą ilość ciepła. Ciepło musimy zatem zaliczyć do rzędu skutków, równoważników pracy, do form energii.

Przykładami zamiany energii dynamicznej na ciepło są następujące zjawiska: Rozgrzewanie się świdrów, osi u wozów, i t. p.; zapalanie zapałek, rozżarzanie się meteorów wskutek tarcia o atmosferę ziemi; starożytny sposób robienia ognia przez tarcie dwu kawałków drzewa; rozgrzewanie się rtęci wstrząsanej w flaszce; rozgrzewanie się ołowiu podczas kucia młotkiem; topienie się kuli ołowianej wystrzelonej do tarczy żelaznej — wskutek utraty energii kinetycznej i t. p.

115. Dynamiczny równoważnik ciepła. Jako miarę ilości ciepła wydanego przez jakiekolwiek źródło ciepła (spalenie kawałka węgla, tarcie dwu ciał) przyjmuje się zwyczajnie masę wody, którą można ogrzać tem ciepłem o jeden stopień podziałki termometrycznej Celsyusza, n. p. od 15^0 do 16^0. Ilość ciepłą potrzebna do ogrzania 1 *gr* wody o jeden stopień, zwana gramstopniem (*gr. st.*), służy w pomiarach tego rodzaju za jednostkę ilości ciepła.

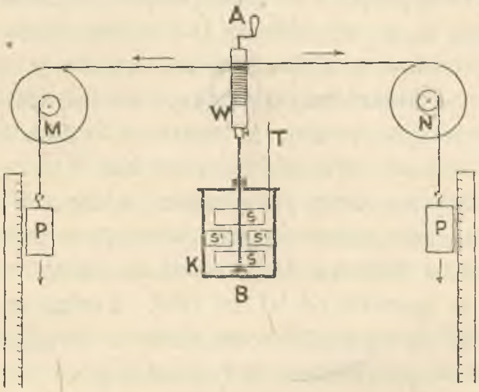
Jest to rzeczą oczywistą, że ogrzanie 2, albo 3, 4... gramów wody o jeden stopień, wymagać będzie 2, albo 3, 4... gramstopni ciepła. Przekonano się nadto, jak okażemy w nauce o cieple, że ilość ciepła, potrzebna do ogrzania *m* gramów wody o jeden stopień, jest w przybliżeniu jednaka dla wszystkich punktów podziałki termometrycznej, w zakresie od 0^0 do 100^0. Z tego wynika, że ilość ciepła, potrzebna do ogrzania *m gr* wody o jakąbądź ilość stopni, n. p. ϑ, wynosi w przybliżeniu $m\vartheta$ gramstopni.

Ażeby zbadać doświadczalnie związek między pracą utraconą wskutek tarcia, a ciepłem, które wówczas powstaje, wypada wymierzyć osobno wartość tej pracy lub energii w (ergach), osobno zaś ciepło (w gramostopniach) i porównać uzyskane liczby.

Według doświadczeń Joule'a, do pomiarów tego rodzaju nadaje się najlepiej tarcie płynów. Przy tarciu bowiem ciał stałych nie obejdzie się bez zarysowania tychże, zgniecenia, starcia opiłek i innych zmian, które niewiadomo, czy i o ile mają być zaliczane do skutków utraconej pracy. Jeżeli natomiast zamieszamy n. p. wodę w szklance, natenczas ruch jej trwać będzie przez chwilę, lecz wkrótce ustanie, gdyż energia kinetyczna zużyje się na pokonanie oporu tarcia pomiędzy jej cząstkami; za pomocą odpowiednio czułego termometru przekonamy się wówczas, że woda stała się cokolwiek cieplejszą. Skoro ciepło wytworzone przez tarcie rozprószy się, a woda ostygnie do pierwotnej temperatury, wówczas stan jej będzie pod każdym względem taki sam, jaki był na początku; woda pośredniczyła tylko w zamianie pracy na ciepło, lecz sama nie uległa żadnej trwałej zmianie.

Jako jedyny wynik takiego doświadczenia mieć będziemy z jednej strony stratę pewnej ilości pracy, użytej na mieszanie wody, z drugiej zysk pewnej ilości ciepła. Za pośrednictwem małej ilości wody możnaby tym sposobem uzyskać dowolnie wielką ilość ciepła, bez jakiejkolwiek zmiany samejże wody.

Przyrząd, którego Joule używał do wymierzenia stosunku między pracą a powstającem z niej ciepłem, składa się z kociołka metalowego *K* (ryc. 95), napełnionego wodą (w niektórych doświad-



Ryc. 95.

czeniach rtęcią, lub innemi cieczami), środkiem którego przechodzi oś *AB*, opatrzona skrzydłami *s*, służącemi do mieszania wody. Aby mieszanie i tarcie było wydatniejsze, dodane są podobne skrzydła *s'*, stałe, przytwierdzone do ścian kociołka. Obrót osi sprawiają ciężary, czyli wagi *P* i *P*, zawieszone na sznurach, które podczas spadania ciężarów obracają bloczki lekko ruchome *M* i *N*; od tych bloczków wychodzą znowu sznury nawinięte na wałku *W*, połączonym z osią. Za pomocą korby umieszczonej na wałku, można podnosić ciężary do góry; przyrząd nakręca się więc podobnie jak zegary (podczas nakręcania odłącza się jednak wałek od osi, żeby nie mieszać wtenczas wody). Nakręcając przyrząd, wkładamy weń pewien zapas pracy, która gromadzi się w podniesionych ciężarach jako energia potencyalna. Gdy następnie ciężary spadną powolnym ruchem na dół, praca ta zostaje oddana i zużyta na pokonanie tarcia przy mieszaniu wody. Jedynym jej skutkiem jest ogrzanie wody, które mierzy się za pomocą czułego termometru *T*. Znając masę wody i jej ogrzanie się, wielkość ciężarów *P* i wysokość ich spadku, mamy wszelkie dane, potrzebne do obliczenia pracy, tudzież powstającego z niej ciepła.

W jednem z doświadczeń Joule'a masa każdego z ciężarów *P* wynosiła 13159 *gr*. Ponieważ w Manchester, gdzie pomiary były robione, $g = 981{\cdot}3$, przeto ciężar każdej z tych mas $= 13159 \times 981{\cdot}3 = 12\,912\,927$ *dyn*. Wysokość spadku wynosiła 160 *cm*.

Po dwudziestokrotnym spadku tych ciężarów temperatura wody podniosła się o $0{\cdot}311^0$. Masa wody wynosiła 6316 *gr*.

Na zasadzie tych danych obliczymy naprzód całkowitą pracę włożoną w przyrząd przy 20-krotnem nakręceniu; praca ta wynosi $2 \times 12\,912\,927 \times 160 \times 20 = 82\,642\,732\,800$ *ergów*.

Jednakowoż podczas spadania ciężarów praca ta nie zużywa się wyłącznie na mieszanie wody, pewna jej część wytwarza energię kinetyczną w samych ciężarach (które spadały z prędkością $6{\cdot}15$ *cm/sek*). W chwili uderzenia ciężarów o podłogę, ta część pracy zamienia się na ciepło, powstające w ciężarach i w podłodze, a nie w kociołku; należy więc część tę odjąć od całkowitej pracy. Wynosi ona:

$$20 \times \tfrac{1}{2} \cdot (2 \times 13159) \times (6{\cdot}15)^2 \text{ ergów.}$$

Nadto należy odjąć pracę użytą na pokonanie tarcia osi krążków *M* i *N*, która również tworzy ciepło nie w kociołku, ale zewnątrz niego. Tę pracę wymierzył Joule wprost, wyznaczywszy siłę potrzebną do poruszania sznurów, gdy wałek *W* był odczepiony od osi *AB*. Pomnożywszy tę siłę przez całkowitą drogę ciężarów, otrzymamy szukaną pracę. Obie części pracy, nie użyte bezpośrednio do mieszania wody, wynosiły w omawianem doświadczeniu razem: 442 486 900 *ergów*.

Reszta, t. j. 82 200 245 900 *ergów* $= L$ została użyta już wyłącznie na mieszanie wody w kociołku i wytworzyła tamże ciepło. Ciepło to Q obliczymy jak następuje:

$$Q = 6316 \times 0{\cdot}311 = 1964{\cdot}3 \text{ gramstopni.}$$

Z tego wynika, że jednostka ciepła, t. j. jeden gramstopień, powstaje kosztem pracy: $\dfrac{82\,200\,245\,900}{1964{\cdot}3} = 41\,847\,000$ *ergów*.

Pomiary, wykonane przez Joule'a, przeważnie za pomocą przyrządu właśnie opisanego, doprowadziły do odkrycia doniosłego prawa, *że ilekroć energia dynamiczna (lub praca) zużywa się przez tarcie, lub inne siły rozpraszające, a jako jedyny jej skutek powstaje ciepło, wtenczas stosunek energii zużytej (pracy) do ilości ciepła wytworzonego posiada zawsze tę samą stałą wartość.*

Liczba, wyrażająca wartość tego stosunku, nazywa się dynamicznym równoważnikiem jednostki ciepła. Jest to liczba jednostek pracy równoważna jednostce ciepła. Liczba ta zależy jedynie od miar zastosowanych do mierzenia ciepła i pracy.

Jeżeli L oznacza ilość zużytej pracy, Q ciepło wytworzone, powyższe prawo wyrazi się w równaniu:

$$\frac{L}{Q} = J,$$

gdzie J oznacza wspomniany równoważnik. Wartości otrzymywane na J były zawsze też same — pominąwszy drobne różnice przypadkowe, pochodzące z niedokładności pomiarów — bez względu na szczegóły urządzenia przyrządu, bez względu na to, czy napełniony był wodą; oliwą, rtęcią (w tym ostatnim przypadku ilość ciepła oblicza się nieco odmiennie, ile że ogrzanie 1 *gr.* n. p. rtęci lub oliwy o 1^0 wymaga innej ilości ciepła, niż ogrzanie wody). Tę samą wreszcie wartość na J dały doświadczenia, wykonane przyrządami urządzonemi zupełnie odmiennie od tego, który tu opisaliśmy. Z wielu pomiarów, wykonanych przez Joule'a, a następnie przez Rowlanda i innych wypadło, że ilość ciepła potrzebna od ogrzania 1 *gr* wody od 15^0 do 16^0 jest równoważna pracy:

$$J = 41\,870\,000 \textit{ ergów} \text{ (na gramstopień).}$$

Licząc 981 *ergów* na 1 *gram-centymetr* możemy także napisać, w miarach ciężarowych:

$$J = 42680 \textit{ gram-centymetrów} \text{ (na gramstopień).}$$

W pomiarach technicznych używa się często większej jednostki ciepła, t. zw. *kaloryi* = 1000 *gramstopni*; jeżeli nadto praca wyrażona będzie w kilogrammetrach, wtenczas równoważnik dynamiczny wyrazi się liczbą:

$$42680 \times \frac{1000}{100000} \text{ t. j. } J = 426{\cdot}8 \textit{ kgm/kalorya.}$$

Znaczenie liczby J można objaśnić przystępnie następującym przykładem: energia kinetyczna, nabyta przez jakąbądź masę wody, podczas spadku z wysokości 426·8 metrów, zamieniona na ciepło, ogrzałaby tę wodę o 1^0.

Ogromna doniosłość liczby wyznaczonej przez Joule'a leży w tem, że stosuje się ona do wszelkich sposobów zamiany energii dynamicznej na ciepło. Hirn n. p. mierzył J w następujący sposób. Na sznurach zawieszono obok siebie ciężki młot i kowadło. Włożywszy pomiędzy nie kawałek ołowiu, podniesiono środek ciężkości młota do odmierzonej wysokości i puszczono go na ołów. Energia kinetyczna młota zostaje po części zniszczona przez uderzenie o niesprężysty ołów, przyczem ołów się ogrzewa. Reszta pozostaje jako energia dynamiczna i objawia się odbiciem się młota tudzież kowadła. Z porównania energii kinetycznej zniszczonej przez uderzenie, z ciepłem wytworzonem, wypadła na J wartość zgodna z pomiarami Joule'a (patrz zad. 225).

Pierwsze dane, przydatne do obliczenia J, uzyskał Rumford ze spostrzeżeń czynionych podczas wiercenia armat w arsenale w Monachium. Powiada on, że praca 1 konia w ciągu 2 godz. 30 min. wytwarza wskutek tarcia świdra tyle ciepła, ile potrzeba do zagotowania 12 *kg* wody t. j. około 1200 kaloryi). Licząc dzielność konia $= 60$ *kgm/sek*, mamy:

$$L = 2{\cdot}5 \times 3600 \times 60 = 540000 \; kgm.$$

z czego wynika na dynamiczny równoważnik ciepła, liczba dość zbliżona do prawdziwej, mianowicie:

$$\frac{540000}{1200} = 450 \; kgm/kalor.$$

116. Ciepło jako rodzaj energii. Pomiary Joule'a dostarczyły stanowczego dowodu, że ciepło należy uważać jako skutek pracy. We wszystkich przypadkach, gdy praca nie wytwarza ani energii kinetycznej, ani potencyalnej, a jedynym jej skutkiem jest ciepło, ilość tego ciepła jest ściśle proporcyonalna do ilości pracy. Blizkiem jest przeto przypuszczenie, że energia może objawiać się nietylko pod postacią wymienionych dwu form dynamicznych, jawnych, lecz że może gromadzić się w ciałach także w formie ukrytej, jako energia wewnętrzna, a w szczególności jako ciepło. Należałoby zatem wnosić, że ciała gorące, mające w sobie duży zapas ciepła, posiadają zdolność wykonywania pracy kosztem tego ciepła. Że tak jest istotnie, tego dowodem są machiny parowe, gazowe i inne motory tego rodzaju, którym dostarczamy ciepła, a w zamian otrzymujemy od nich pracę. Doświadczenia wykonane w tej mierze, które opiszemy w nauce o cieple, okazały, że machiny parowe i inne motory pędzone ciepłem, istotnie zużywają, zatracają ciepło; natomiast wytwarzają pracę według tego samego stałego stosunku J, który rządzi zamianą pracy na ciepło.

W zamian za każdą zużytą kaloryę ciepła motor wydaje 426·8 kilogrammetrów pracy. Doświadczenia te, pospołu z pomiarami Joule'a, dowodzą niezbicie, że *ciepło jest rodzajem energii, a jako takie może być mierzone miarami energii.*

Erg, *kilogrammetr*, *joule* i t. p. są to nietylko jednostki pracy, lecz energii wogóle, a więc i energii cieplnej. $41{\cdot}87 \cdot 10^6$ ergów znaczy tyleż co gramstopień ciepła.

117. Inne rodzaje energii. Doświadczenia zrobione z ciepłem każą nam upatrywać skutków pracy i szukać nowych form energii także w tych przypadkach, gdy po wykonaniu pracy nie pojawia się ani energia dynamiczna, ani ciepło. Obracając n. p. korbę znanej powszechnie machiny elektrycznej influencyjnej, której bieguny połączyliśmy za pośrednictwem dwu drutów z okładkami butelki lejdejskiej, wykonywamy pracę przeciw przyciągającym siłom elektrycznym; praca ta nie zostawia po sobie ani dynamicznych skutków, ani nie daje ciepła. Przekonamy się jednak łatwo, że praca ta nie została bez śladu stracona. Łącząc bowiem okładki butelki kawałkiem drutu, otrzymujemy znane objawy rozbrojenia elektrycznego: iskrę elektryczną, połączoną z wystrzałem, z objawami głosu, światła, ciepła. Wszystko to świadczy, że w butelce lejdejskiej nagromadziła się była pewna energia. Energia ta jest różna od tych trzech form, które opisywaliśmy dotąd. Jest to t. zw. energia elektryczna.

W dalszych działach tej książki zajmować się będziemy szczegółowo rozmaitemi postaciami, w jakich energia może się przejawiać. Celem ułatwienia czytelnikowi przeglądu wymienimy jednak już tutaj główne postaci energii i ich podział:

A) **Energia dynamiczna.**

1. Energia kinetyczna (n. p. wiatru, wody płynącej, pocisków, drgających ciał sprężystych i t. p.).

2. Energia potencyalna (mas ciężkich, podniesionych nad ziemię; wody w zbiornikach wysoko położonych, sprężyn napiętych;

ciał sprężystych odkształcających się podczas drgania; żelaza oddalonego od magnesu i t. p.

B) **Energia wewnętrzna.**

1. Ciepło (w piecach, na słońcu, w źródłach ciepłych, we wnętrzu ziemi).

2. Ciepło utajone, t. j. ciepło użyte nie do ogrzania, lecz do zmiany wewnętrznego ustroju, albo stanu ciał (w stopionym lodzie, w parze wodnej i t. p.). Tu należy t. zw. energia chemiczna, czyli energia zawarta w ciałach, które mogą tworzyć związki chemiczne, wydając przytem ciepło lub pracę. Fabrykacya ciał takich wymaga pewnego nakładu energii, bądź to w formie ciepła, pracy, lub innej; energia chemiczna jest dopóty w ciałach tych ukryta, dopóki sprzyjające warunki nie wywołają działania chemicznego (proch strzelniczy, dynamit, węgiel lub drzewo i tlen, nafta i tlen, kwas siarczany i woda, pokarmy ludzi i zwierząt, łącznie z tlenem wdychanym i t. p.).

C) **Energia eteru.**

1. Energia elektryczna (w nabitej butelce lejdejskiej i innych kondensatorach, w atmosferze przed uderzeniem piorunu i t. p.).

2. Energia magnetyczna, (w układzie złożonym z magnesów i kawałków miękkiego żelaza, w cewce indukcyjnej przed uderzeniem iskry i t. p.).

3. Promieniowanie, t. j. światło i t. zw. ciepło promieniste.

Teorye kinetyczne. Poznanie rozlicznych rodzajów energii, wespół z rozwojem nauki o molekularnym i atomowym ustroju materyi, stało się pobudką do wytłómaczenia różnych własności materyi za pomocą ruchu molekuł i atomów, tudzież za pomocą sił działających pomiędzy nimi; tłómaczenia takie nazywamy teoryami kinetycznemi. W myśl teoryi kinetycznej, wszelkie rodzaje energii wewnętrznej są energią dynamiczną, t. j. kinetyczną lub potencyonalną, jednakowoż nie mas dotykalnych i widzialnych ruchów, lecz molekuł i atomów, i ruchów niezmiernie drobnych, wewnętrznych. Według teoryi kinetycznej ciepło jest n. p. energią kinetyczną molekuł ciała; przy tarciu ginie energia kinetyczna mas widzialnych, a natomiast rozdziela się ona pomiędzy jego cząsteczki. Podobnie ciepło utajone pary wodnej uważa się jako energię potencyalną molekuł, które wskutek parowania wody uzyskały nowe względem siebie położenia. Teorye kinetyczne należą do hipotez, t. j. przypuszczeń, mających za sobą wiele prawdopodobieństwa, poznamy je dokładniej w wykładzie fizyki molekularnej.

118. Zasada zachowania energii. Wiadomości podane poprzednio o różnych rodzajach energii i ich wzajemnych przemianach, prowadzą bezpośrednio do wysłowienia jednej z najdonioślejszych zasad ogólnej fizyki, mianowicie zasady zachowania energii. Zasada ta łączy w jednę całość wszystkie gałęzie tej nauki i ustanawia ściśłe ilościowe związki między różnorodnemi, na pozór, zjawiskami w przyrodzie.

Zastanawialiśmy się naprzód nad jawnymi, dynamicznymi rodzajami energii i przekonaliśmy się, że, w niektórych szczególnych przypadkach, całkowity zapas energii dynamicznej w odosobnionym układzie ciał mógłby przechowywać się bez zmiany, wtenczas mianowicie, gdyby między ciałami należącemi do układu działały tylko zachowawcze siły.

Okazało się jednak, że układy materyalne nie są nigdy ściśle, w tem znaczeniu, zachowawczymi; energia dynamiczna zmniejsza się z biegiem czasu, ale natomiast powstaje najczęściej ciepło w ilości równoważnej ubytkowi energii dynamicznej. Jeżeli w takim razie obliczymy, n. p. w ergach, zasób energii dynamicznej, a do tego dodamy ciepło wytworzone, obliczone również w ergach, wówczas otrzymamy widocznie sumę stałą, pomimo że składniki jej ulegają ciągłej zmianie. Powiadamy zatem, że energia zachowuje się w takim układzie odosobnionym w niezmiennej ilości, albo że jest niezniszczalna. W tem znaczeniu wszelkie układy materyalne są zachowawczymi; należy jednak obok form dynamicznych energii i obok ciepła, uwzględnić wszelkie inne postaci, w jakich energia może się przejawiać. Prawo zachowania energii możemy zatem wypowiedzieć w następujący sposób:

Całkowity zasób energii w jakimkolwiek układzie ciał nie może ani zwiększyć się, ani zmniejszyć wskutek wzajemnych działań między częściami układu; może jednakowoż przybierać którąkolwiek z postaci, w jakich energia się przejawia.

Energia układu może zwiększyć się tylko kosztem energii otrzymanej z zewnątrz układu.

Ilekroć układ wydaje energię na zewnątrz, bądź to przez wykonanie pracy, przez wydanie ciepła, przez promieniowanie, albo w ja-

kibądź inny sposób — zasób energii zawartej w nim zmniejsza się o wartość energii wydanej.

Celem dokładnego zrozumienia istoty tego zasadniczego prawa fizyki należy jeszcze dodać, że całkowitego zapasu energii zawartego w jakimkolwiek układzie materyalnym nie możemy nigdy określić. Niepodobna n. p. powiedzieć ile ciepła mieści się w danem ciele, gdyż im bardziej będziemy je wyziębiali, tem więcej oddawać nam będzie ciepła. Możemy natomiast zawsze określić i zmierzyć, ile energii układ wydaje z siebie, albo ile jej pobiera, a więc: ile wykonywa lub otrzymuje pracy, ile ciepła lub światła chłonie i t. p. Wykonywając zatem pracę na danym układzie, udzielając mu jednocześnie ciepła, światła i t. d. wiemy dokładnie, o ile powiększył się całkowity jego zapas energii; obliczamy przytem wszystkie te nabytki w jednolitej mierze, n. p. w ergach. Uzbroiliśmy tym sposobem, nabiliśmy niejako dany układ znaną liczbą ergów energii. On się przytem zmienił, n. p. ogrzał, rozłożył chemicznie i t. p. Owóż zasada zachowania energii powiada nam co następuje: jeżeli ten układ uzbrojony doprowadzimy jakimbądź sposobem napowrót do stanu, w jakim on znajdował się z początku, wówczas wyładuje on z siebie tyle na ogół ergów energii, ile mu jej poprzednio udzielono — może się jednak zdarzyć, że co do rodzaju energia oddana będzie różna od pobranej.

W tenże sposób n. p. przyrząd Joule'a (ryc. 95) uzbrajamy w energię potencyalną, podkręcając ciężary do góry. Skoro jednak ciężary znajdą się znowu na dole, a woda ogrzana przez tarcie ostygnie, okaże się, że zyskaliśmy tyleż ergów ciepła, ile poprzednio wydaliśmy ergów pracy.

W ten sposób machina parowa zaopatrzona w ładunek węgla (energia chemiczna) wydaje ciepło, pracę, gorącą parę i t. d. Gdybyśmy parę napowrót skropili i ochłodzili, gdybyśmy zsumowali całe ciepło i całą pracę zyskaną, okazałoby się, że liczba ergów zyskanej energii jest tą samą, jaką otrzymalibyśmy w postaci ciepła, spalając wprost ten sam zapas węgla.

Układ materyalny, który nie zmienia się, nie wyczerpuje, w ten czy ów sposób, nie może też wydawać z siebie energii. Znaczy to, że energii nie można z niczego stworzyć, albo inaczej: niemożliwe jest perpetuum mobile nietylko mechaniczne, ale i fizyczne.

Przeobrażenia energii i jej przenoszenie. Według wyłożonej właśnie zasady, energia nie może ani zniknąć bez śladu, ani też powstać z niczego. Wszelka energia pojawia się tylko wskutek jednoczesnego zniszczenia równoważnej ilości energii w jakiejkolwiek innej postaci. Poznaliśmy już różne przykłady takich przemian, czyli przeobrażeń energii. I tak, energia kinetyczna może przeobrazić się w potencyalną lub odwrotnie (w układach zachowawczych), w ciepło, w energię elektryczną. Ciepło przeobraża się w machinie parowej w energię dynamiczną, której można znowu użyć n. p. do pędzenia machiny dynamoelektrycznej. Tutaj energia zużyta przeobraża się znowu w formę elektromagnetyczną, a ta znowu przemienia się w lampach elektrycznych na światło, ciepło i t. d.

Niezniszczalność i niestwarzalność energii jest powodem, że ilekroć jaki układ materyalny energię traci, to jednocześnie inny jakiś układ musi tyleż energii nabywać. Energia przenosi się zatem z jednego układu do drugiego, a zawsze bez straty. Tak kula doskonale sprężysta, gdy uderzy drugą równej masy, oddaje jej całą swą energię kinetyczną (ust. 53). Człowiek napinający cięciwę łuku traci cokolwiek ze swej energii fizycznej; tyleż nagromadza się jej, w formie potencyalnej, w napiętym łuku; w końcu łuk oddaje ją strzale, gdzie występuje znowu w formie kinetycznej. — Pasy, łączące machiny robocze z motorem, przeprowadzają energię wytwarzającą się w tym ostatnim. Energia kinetyczna wodospadu Niagary przenoszona bywa w postaci elektromagnetycznej po drutach izolowanych do fabryk okolicznych, gdzie wprowadza w ruch machiny robocze, albo służy do ogrzewania, [Energia promieniowania słonecznego, zebrana przy pomocy parabolicznych zwierciadeł, może służyć do ogrzewania kotła parowego (Mouchat we Francyi, Ericson w Stanach Zjednoczonych)].

Zródła energii na ziemi. Celem dalszego objaśnienia, a zarazem wykazania doniosłości zasady zachowania energii, zastanowimy się jeszcze nad przemianami i źródłem energii, znajdującej się na ziemi, a w szczególności nad temi jej częściami, z których ludzkość ciągnie pożytek.

Kula ziemska jest bryłą należącą do układu podobnych jej ciał i jak one porusza się około słońca. Na mocy takiego stanowiska, ziemia posiada pewien zapas energii potencyalnej względem słońca, energii kinetycznej, zależnej od rocznego obiegu około słońca i energii kinetycznej dziennego ruchu obrotowego około osi. Z tych trzech zapasów zewnętrznej, planetarnej energii, pierwsze dwa są dla mieszkańców ziemi zupełnie niedostępne; z energii kinetycznej dziennego obrotu możemy natomiast w pewnej mierze korzystać. Dzienny obrót ziemi jest bowiem powodem peryodycznych zmian poziomu (przypływu i odpływu) morza, t. j. podnoszenia się wód oceanu pod wpływem przyciągania (o czem więcej w rozdziale następującym) księżyca i słońca. Ruchy te i zmiany poziomu mogą być użyte n. p. do poruszania motorów wodnych, przyczem praca uzyskana, będzie bezpośrednio wzięta z zapasu energii planetarnej układu słonecznego. Przypływ i odpływ morza porusza wody oceanu, wbrew tarciu cząstek wody, zarówno o inne cząstki, jakoteż o brzegi lądów. Wyciągnięto stąd wniosek, że ruch obrotowy ziemi około osi stopniowo się zmniejsza (jakkolwiek ta zmiana jest bardzo drobna), a energia jego zamienia się wskutek tarcia na ciepło.

Pominąwszy energię planetarną całej bryły ziemskiej, która, jak wspomnieliśmy, ulega tylko w drobnej cząstce i bardzo powoli zamianom na inne rodzaje energii, wypada zwrócić uwagę na zapasy energii, znajdujące się w samej ziemi. Tu należy wymienić naprzód t. zw. energię plutoniczną, w której skład wchodzi wewnętrzne ciepło ziemi i energia chemiczna materyałów, które mogą tworzyć związki chemiczne, a związków takich dotąd nie utworzyły. Energia ta kryje się niemal całkowicie w głębiach ziemi, na powierzchni objawia się zrzadka, pod postacią wybuchów wulkanicznych, trzęsień ziemi, źródeł gorącej wody i t. p. Ciepło, które w zwyczajnych warunkach uchodzi z wnętrza ziemi, stanowi dla powierzchni bardzo nieznaczny dopływ energii i niema praktycznego znaczenia.

Energia chemiczna materyałów, znajdujących się w zewnętrznej, dostępnej dla nas, skorupie ziemi, jest również niemal całkowicie wyczerpana, gdyż minerały znajdujące się tam nie posiadają silnego powinowactwa chemicznego. Wyjątek w tej mierze stanowią pokłady węgla kopalnego, nafty i t. p., które stanowią w istocie najgłówniejsze źródło energii stosowanej w przemyśle — jednakowoż energia zawarta w tych ciałach nie należy do pierwotnego uposażenia ziemi; ona nagromadziła się tu w ciągu geologicznego rozwoju kuli ziemskiej, ze źródła zewnętrznego, które za chwilę poznamy.

[Nowy i bardzo obfity zapas energii znajdujemy w odkrytych niedawno ciałach promieniotwórczych (por. Tom III, ust. 91, str. 234). Obliczono, że ilość ciepła wytworzonego przez 1 gram radu w równowadze radioaktywnej w ciągu roku wynosi około 876000 *kal. gram.* Z pomiarów zaś promieniotwóczości skał wynika, że każdy *gr* ziemi z warstw powierzchniowych zawiera około $2 . 10^{-12}$ *gr* radu i $1{\cdot}2 . 10^{-5}$ *gr* toru. Uwzględniając tylko obecność uranu (radu) i toru obliczono, że wytwarzają one w każdym cm^3 skały $1{\cdot}9 . 10^{-5}$ gramstopni w ciągu roku].

Z pośród tych wszystkich zapasów energii niektóre tylko mogą być powszechnie używane.

Do wykonywania prac rozmaitych używamy obecnie energii fizycznej ludzi i zwierząt, wiatru (wiatraki, żaglowce), prądów wody (koła wodne, turbiny, prądy morskie), motorów opalanych (machiny parowe, gazowe, motory elektryczne i t. p.). Żaden z tych motorów nie stwarza jednak energii, lecz wydaje pracę w zamian za energię dostarczaną mu z zewnątrz. Motory żyjące otrzymują tę energię pod postacią pokarmu (pokarm roślinny i zwierzęcy, łącznie z tlenem branym z powietrza i wodą). Pokarmy, zasilające organizm pracujący, stanowią istotne źródło energii, wydawanej przez organizm pod postacią bądź to pracy, bądź ciepła. Za pomocą bezpośrednich pomiarów przekonano się, że praca, wykonana w pewnym czasie przez człowieka lub zwierzę, razem z ciepłem oddanem na zewnątrz, równa się różnicy pomiędzy energią chemiczną pokarmu i tlenu spożytego w tymże czasie, a energią chemiczną materyi wydalonej z organizmu (dwutlenek węgla, woda i t. d), pomniejszonej o energię zawartą w materyi, którą organizm trwale sobie przyswoił, wytwarzając mięśnie, kości i t. p.

Jeżeli zważymy, że pokarm zwierząt, których mięsem się karmimy, jest ostatecznie roślinny, przyjdziemy do wniosku, że energia chemiczna odżywiająca świat zwierzęcy, wytwarza się w świecie roślinnym. Życie zwierząt jest ściśle zależne od świata roślinnego; rośliny jednakowoż mogą żyć i rozwijać się bez pomocy zwierząt. Należy zatem zastanowić się nad pochodzeniem energii nagromadzonej w roślinach. Rośliny czerpią materyał, z którego organizm ich się składa, z ziemi i z atmosfery (dwutlenek węgla, składniki nawozu, wodę, związki mineralne i t. p.). Przemiana tych ciał w roślinach na związki palne i pożywne dla zwierząt, odbywać się musi przy pomocy energii wziętej z poza zakresu świata roślinnego, tem więcej, że w samejże roślinie spotykamy objawy życiowe, które możnaby nazwać pracowaniem, jak n. p. podnoszenie nad ziemię mas znacznych, ruchy niektórych organów i t. p. Otóż przekonano się, że promieniowanie słońca stanowi to źródło energii, z którego rośliny czerpią, ilekroć przekształcają chemicznie materyał niepalny i niepożywny na pokarm przydatny dla zwierząt, na drzewo opałowe i t. p. Energia zawarta w promieniowaniu słońca zostaje przytem zużyta; liście i inne zielone części pochłaniają ją i zużywają, celem wykonania prac chemicznych, a mianowicie rozłożenia wody i dwutlenku węgla, znajdującego się w powietrzu, oderwania tlenu od węgla, tudzież od wodoru, pomimo silnego powinowactwa chemicznego, które te ciała wiąże. Zapasy węgla kopalnego i innych reszt organicznych w ziemi zawierają przeto w sobie energię zaczerpniętą ze słońca w ciągu ubiegłych wieków.

W ten sposób znajdujemy w promieniowaniu słonecznem to zewnętrzne źródło energii, które zasila istoty żyjące, opala machiny parowe i inne motory. Jednakowoż i inne zapasy energii, przydatne do wykonywania prac, pochodzą z tego samego źródła. Wiatr jest bezpośredniem następstwem różnic temperatury i wilgoci, sprawionych przez promienie słońca. Toż samo promieniowanie sprawia parowanie wody, przyczem zamienia się na ciepło utajone w parze wodnej. Skroplenie tej pary w wyższych warstwach atmosfery, na stokach gór, dostarcza nam wody podniesionej nad powierzchnię ziemi, mającej wskutek tego energię potencyalną, która za pośrednictwem motorów wodnych może przemienić się na pracę użyteczną.

Zasób własnej energii kuli ziemskiej, a mianowicie takiej energii, z której na powierzchni moglibyśmy korzystać, jest, jak wspomniano, bardzo mały. Życie organiczne, zjawiska meteorologiczne, klimatyczne i t. p. zależą niemal wyłącznie od energii słonecznej, która dostaje się do ziemi pod postacią energii promienistej i pod tą samą postacią ziemię opuszcza. Zmiana całkowitego zasobu energii na powierzchni ziemi, w ciągu pewnego czasu, równa się zawsze różnicy pomiędzy energią otrzymaną od słońca [i od zawartych w ziemi ciał promieniotwórczych], a energią wypromieniowaną jednocześnie przez ziemię w przestrzeń otaczającą.

Dzieje zasady zachowania energii sięgają czasów Newtona, który wypowiedział to prawo po raz pierwszy, lecz stosował je tylko do energii dynamicznej; energię użytą na pokonanie tarcia i innych sił niezachowawczych, uważał Newton jako zniszczoną i zupełnie straconą. Rumford i Davy upatrywali równoważnik straconej energii dynamicznej w cieple; o ogólnej ważności zasady zachowania energii, i zastosowaniu jej do różnych rodzajów energii, pisał naprzód R. Mayer (1842). Doświadczalnie dowiedli jej w tymże czasie Colding, a przedewszystkiem Joule. Rozszerzenie i ważne zastosowanie tej zasady zawdzięczamy głównie Kelvinowi i Helmholtzowi.

Zadania.

225) W jednem z doświadczeń wykonanych przez Hirna, celem wyznaczenia dynamicznego równoważnika ciepła (ust. 115), młot ważył 350 *kg*, kowadło 941 *kg*; pomiędzy niemi znajdował się kawałek ołowiu ważący 2·948 *kg*. Środek ciężkości młota podniesiono do wysokości 1·166 *m*. Po uderzeniu młot odskoczył do wysokości 0·087 *m*, kowadło zaś do wysokości 0·103 *m*. Ołów ogrzał się wskutek uderzenia o 7·12°. Obliczyć dynamiczny równoważnik ciepła, wiedząc, że do ogrzania ołowiu potrzeba 31·8 razy mniej ciepła, aniżeli do ogrzania, o tę samą liczbę stopni, równej masy wody.

Odp. $L = 350\,(1{\cdot}166 - 0{\cdot}087) - 941 \times 0{\cdot}103 = 280{\cdot}73$ *kgm*;
$Q = \frac{2{\cdot}948 \times 7{\cdot}12}{31{\cdot}8} = 0{\cdot}66$ *kaloryi*; $J = \frac{L}{Q} = 425$ *kgm/kalor.*

226) Kropla deszczu spada na ziemię z wysokości 100 *m*; o ile podniosłaby się jej temperatura, gdyby ciepło powstające wskutek utraty energii potencyalnej całkowicie w niej zostało. *Odp.* 0·23°.

227) Kula ważąca 20 *gr*, poruszająca się z prędkością 300 *m/sek* zostaje nagle powstrzymaną, uderzywszy o żelazną tarczę; obliczyć ciepło wytworzone. *Odp.* 9×10^9 *ergów* = 212 *gr. stopni.*

228) Motor o dzielności 2 koni miesza 20 *kg* wody przez 1 minutę; o ile podniesie się temperatura wody, jeżeli całkowita praca motoru zostaje zużyta przez tarcie wody? *Odp.* 1·04 stopni.

229) Koło rozpędowe, ważące 150 *kg*, mające ramię bezwładności = 80 *cm*, obraca się z początku z prędkością kątową 200 obrotów na minutę; prędkość jego zmniejsza się następnie wskutek oporu ruchu. Ile ciepła powstanie, wskutek tarcia, wzamian za energię kinetyczną, którą koło postradało?

Odp. $\frac{1}{2}\left(\frac{200 \times 2\pi}{60}\right)^2 \frac{150000 \times (80)^2}{41\,870\,000} = 5028$ *gr. st.*

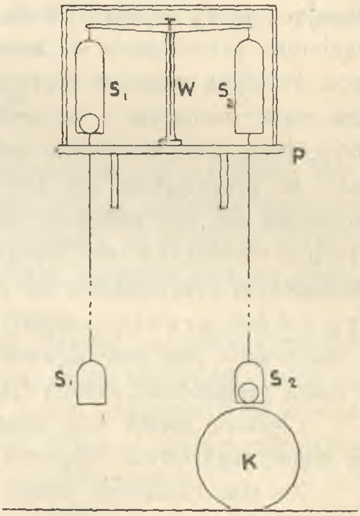
230) Przy obracaniu korby (długość 15 *cm*) machiny elektrycznej potrzeba siły o 50 *gr* większej, gdy machina działa, aniżeli, gdy jest (elektrycznie) nieczynną. Ile ciepła można uzyskać przez rozbrojenie dużej butelki lejdejskiej, którą nabijano przy pomocy tej machiny, obróciwszy korbą 20 razy?

Odp. $\frac{2 \times 3{\cdot}1416 \times 15 \times 50 \times 20}{42680} = 2{\cdot}2$ *gr. st.*

ROZDZIAŁ VIII.

Grawitacya.

119. Działanie ciężkości za obrębem ziemi. Opisując objawy miejscowe ciężkości na ziemi powiedzieliśmy, że ciężkość działa we wszystkich miejscach na ziemi, tudzież, że nad powierzchnią ziemi (na górach, w balonach) spotykamy wszędzie objawy tej siły, jakkolwiek w miarę oddalania się od ziemi natężenie jej cokolwiek się zmniejsza. Zmniejszanie się natężenia ciężkości, w miarę oddalania się od ziemi, można wykazać i zmierzyć za pomocą czułej wagi. Przyrząd, którego w tym celu używał Jolly, składa się z wagi W (ryc. 96), ustawionej na półce P, przytwierdzonej do muru w wysokości kilku metrów nad ziemią; obok zwyczajnej pary szalek $S_1 S_2$ waga posiada jeszcze drugą parę $s_1 s_2$, zawieszonych poniżej, na drutach przywiązanych do szalek górnych.



Ryc. 96.

Skoro zrównoważymy wagę, ustawiając na górnych szalkach dwie równe masy, a następnie przeniesiemy jednę z nich do szalki dolnej, wówczas położenie równowagi zmieni się; mianowicie przeważy odrobinę ta strona wagi, po której umieściliśmy masę w szalce dolnej. W jednem z takich doświadczeń znaleziono n. p., że w wysokości 5 *m*, ciężar masy 1 kilograma był około $1\frac{1}{2}$ *mgr* mniejszy aniżeli na dole.

Wiedząc to, możemy postawić pytanie: czy istnieje jaka granica ponad ziemią, do której wpływ ciężkości sięga, a za nią ustaje, czy też granicy takiej niema, a ciężkość działa także na ciała znajdujące się za obrębem ziemi, z natężeniem malejącem w miarę odległości — n. p. na księżyc i planety?

Na pytanie to dał odpowiedź Newton, w dziele ogłoszonem w r. 1687 [1]), w którem odkrywa fakt powszechnej grawitacyi, czyli powszechnego ku sobie ciążenia ciał i podaje prawa tego działania.

Zwróciwszy naprzód uwagę na księżyc, jako ciało najbliższe ziemi. widzimy, że księżyc porusza się w sąsiedztwie ziemi, okrąża ją po linii, która według pomiarów astronomicznych, nie różni się wiele od koła o promieniu 60 razy większym, aniżeli promień kuli ziemskiej.

Z dynamiki wiadomo, że ruch tego rodzaju może odbywać się tylko wtenczas (ust. 47), gdy na ciało działa nieustannie siła przyciągająca je ku środkowi koła. Siłą tą, jak Newton okazał, jest wzajemne przyciąganie się mas ziemi i księżyca, a więc ciężar księżyca. Podobną własność przyciągania się wzajemnego posiadają także inne ciała niebieskie i w ogólności wszelka materya. Badanie ruchów, jakie ciała niebieskie odbywają pod wpływem tych sił okazało, że przyciąganie się dwu ciał jest zależne od ich odległości, zmniejsza się, gdy odległość wzrasta, mianowicie jest odwrotnie proporcyonalne do kwadratu odległości. Ciężkość jest szczególnym przypadkiem tej powszechnej siły, zwanej grawitacyą (od łac. gravis = ciężki) albo ciążeniem powszechnem, a mianowicie jest ona objawem przyciągania pomiędzy masą ziemi a masą jakiegobądź innego ciała.

Ciężkość niema więc granicy, działa ona w każdej odległości od ziemi, jakkolwiek natężenie jej szybko maleje.

Że siła ciężkości, znana nam z doświadczeń robionych na ziemi, jest zarazem tą siłą, która trzyma księżyc w pobliżu ziemi i rządzi miesięcznym jego obiegiem, o tem można się przekonać za pomocą następującego rachunku. Oznaczywszy masę księżyca przez m, wyobraźmy sobie naprzód, że masa ta znajduje się tuż przy powierzchni ziemi; ciężar jej wynosiłby wtenczas: $P = mg$. W odległości 60 razy większej (licząc od środka ziemi), w jakiej księżyc rze-

[1]) Philosophiae naturalis principia mathematica.

czywiście się znajduje, ciężar jego p, według założonego prawa Newtona, powinien być $(60)^2$ razy mniejszy, a więc:

$$p = \frac{P}{3600} = m\frac{981}{3600} = 0{\cdot}273\ m.$$

Jeżeli ciężar ten stanowi istotnie siłę dośrodkową, pod wpływem której księżyc krąży około ziemi, w okresie $T = 27$ dni, 7 godz. 43 min. 11·5 *sek*, t. j. 2360591·5 *sek*, po kole o promieniu (w przybliżeniu) $= 60\ R$, gdzie R oznacza promień ziemi natenczas, podług ust. 47, powinno być:

$$p = \frac{4\pi^2 . 60 R}{T^2}\ m.$$

Podstawiwszy tu za $2\pi R$ wartość $4 \times 10^9\ cm$ (obwód ziemi) znajdziemy:

$$p = 0{\cdot}271\ m.$$

Zgodność tych dwu wartości, znalezionych dla p różnemi drogami, stwierdza prawo Newtona, według którego natężenie ciężkości zmniejsza się odwrotnie jak kwadrat odległości od środka i okazuje zarazem, że ta sama siła, która sprawia spadanie ciał na ziemi, rządzi także ruchami księżyca.

Na podstawie tego prawa można obliczyć natężenie ciężkości w jakiejkolwiek wysokości z nad ziemią. Jeżeli oznaczymy przez g_m natężenie ciężkości w poziomie morza, t. j. w odległości R od środka ziemi ($= 6370000$ metr. w przybliżeniu), przez g natężenie ciężkości w wysokości z metrów nad morzem, wówczas będzie:

$$\frac{g}{g_m} = \frac{R^2}{(R+z)^2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R}\right)^2}.$$

Ilekroć z jest małe, w porównaniu z promieniem ziemi, możemy napisać (rozwijając powyższe wyrażenie na szereg i opuszczając drugą i wyższe potęgi stosunku $\frac{z}{R}$):

$$g = g_m\left(1 - \frac{2z}{R}\right), \text{ czyli: } g = g_m(1 - 0\cdot000\,000\,314z)\,^{1)}.$$

120. Ruchy ciał niebieskich. Działania ciężkości nie ograniczają się do samej tylko ziemi, lecz, jak wspominaliśmy, są one własnością wszelkiej materyi, a więc i innych ciał niebieskich; wszystkie ciała niebieskie są względem siebie ciężkie, tak samo, jak księżyc jest ciężki względem ziemi. Badając ruchy ciał niebieskich, możemy, za przykładem Newtona, określić ściślej prawa grawitacyi. Ruchy planet około słońca określone są prawami Keplera, o których była mowa w ust. 20. Powiedzieliśmy tam, że planety krążą około słońca po elipsach, a ruch ich jest taki, że przyśpieszenie γ planety względem słońca, zwrócone zawsze ku słońcu, jest odwrotnie proporcyonalne do kwadratu odległości planety od słońca, wiemy mianowicie, że $\gamma = \frac{4a^3\pi^2}{T^2}\frac{1}{r^2}$, w czem r oznacza odległość planety od słońca (promień wodzący), a średnią wartość tej odległości (połowę większej osi elipsy), T okres obiegu. Z tego wynika, że wzdłuż linii łączącej planetę ze słońcem działać musi siła przyciągająca, wywołująca to przyśpieszenie. Aby znaleźć wartość F tej siły, należy przypomnieć sobie, że według trzeciej zasady dynamicznej (ust. 45) siła tego samego natężenia F oddziaływa także na słońce; podczas ruchu planety musi więc i słońce odbywać pewne ruchy, jakkolwiek o tyle mniejsze, o ile masa jego jest większą. Środek mas planety i słońca posiada natomiast położenie stałe, albo ściślej mówiąc, niezależne od siły wewnętrznej F (ust. 52). Prawa Kepplera, tudzież bezpośrednia obserwacya dają nam tylko względny ruch planety względem słońca. Oznaczymy przez γ_p i γ_s przyśpieszenia planety i słońca ku nieruchomemu środkowi ich mas, który, jak wiemy, leży również na prostej łączącej planetę ze słońcem. Przyśpieszenie ruchu względnego będzie wtenczas: $\gamma = \gamma_p + \gamma_s$.

Ponieważ jednak $\gamma_p = \frac{F}{m}$, $\gamma_s = \frac{F}{M}$, gdzie m i M oznaczają

---

[1]) Wzór ten stosuje się wtenczas, gdy oddalamy się od ziemi pionowo do góry, n. p. w balonie. Jeżeli natomiast z oznacza wysokość nad morzem jakiego miejsca na powierzchni ziemi, n. p. miasta na stałym lądzie, wówczas ubytek ciężkości, w porównaniu z poziomem morza, jest mniejszy, gdyż ląd sam wywiera pewne działanie przyciągające. Doświadczenie daje w tym przypadku:

$$g = g_m(1 - 0\cdot000\,000\,196\,.\,z).$$

masy planety i słońca, F wzajemne ich przyciąganie się, przeto $\gamma = \frac{4a^3\pi^2}{T^2}\frac{1}{r^2} = F\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{m}\right)$, skąd otrzymamy odrazu wartość wzajemnego przyciągania się słońca i planety, mianowicie:

$$F = \frac{4a^3\pi^2}{T^2}\frac{Mm}{M+m}\frac{1}{r^2}. \tag{1}$$

Według trzeciego prawa Keplera, wartość stosunku $\frac{a^3}{T^2}$ jest bardzo przybliżenie jednakowa dla wszystkich planet krążących około słońca. Masy planet są zresztą bardzo małe w porównaniu z masą słońca; wskutek tego wartość ułamka $\frac{M}{M+m}$ różni się tak mało od jedności, że można napisać:

$$F = \text{stała} \times \frac{m}{r^2}.$$

Wnosimy stąd, że siły przyciągające, które słońce wywiera na różne planety, są *wprost proporcyonalne do ich mas, odwrotnie proporcyonalne do kwadratów odległości.* Nadto, ponieważ wartość spółczynnika stałego w powyższem równaniu jest dla wszystkich planet ta sama, przyciąganie to n i e z a l e ż y o d r o d z a j u m a t e r y i przyciąganej. Można było spodziewać się tego, wiedząc że ciężkość, która jest przecież szczególnym przypadkiem grawitacyi, zależy również tylko od wielkości masy, a nie zależy od rodzaju materyi (ust. 57).

Ponieważ przyciąganie pomiędzy słońcem a planetą jest wzajemne, według prawa akcyi i reakcyi, przeto przyciąganie to musi być także proporcyonalne do masy słońca. Rozważania te doprowadziły N e w t o n a do wniosku, że prawo ogólne grawitacyi wyraża się równaniem:

$$F = C \times \frac{Mm}{r^2}, \tag{2}$$

w którem spółczynnik stały C (t. zw. stała grawitacyi) nie zależy ani od odległości mas M i m, ani od ich wielkości i rodzaju.

Przyjąwszy, że równanie (2) jest prawdziwym wyrazem prawa przyciągania i porównawszy je z równaniem (1), wyprowadzonem z pierwszych dwu praw Keplera, otrzymamy równanie:

$$\frac{a^3}{T^2} = C \times \frac{M + m}{4\pi^2}, \tag{3}$$

które okazuje, że trzecie prawo Keplera jest istotnie tylko przybliżone: stosunek trzeciej potęgi średniej odległości planety od słońca do kwadratu czasu obiegu można uważać tylko o tyle jako jednakowy dla różnych planet, o ile masy ich m można zaniedbać wobec przeważającej masy słońca M.

Prawa Keplera stanowią jeszcze z innego powodu tylko przybliżone określenie ruchu planet. Jeżeli prawo grawitacyi jest prawdziwe, natenczas ruch którejkolwiek planety odbywa się nietylko pod wpływem przyciągania słonecznego; podobnie jak słońce przyciągają ją wszystkie inne planety. Wynikające stąd zaburzenia (perturbacye) ruchu eliptycznego są jednakowoż małe. albowiem, dzięki olbrzymiej swojej masie, słońce wywiera na ruch planet wpływ przeważający. Biorąc za podstawę prawo grawitacyi, wyrażone równaniem (2), obliczono wartość tych zwichnięć i znaleziono wyniki zgadzające się ściśle ze spostrzeżeniami. Szukając przyczyny zwichnięć, których nie można było przypisać planetom znanym, odkryto nawet drogą rachunku nową planetę, należącą do układu słonecznego (Neptuna).

Wobec świadectwa astronomii, prawo grawitacyi, wyrażone równaniem (2), należy uważać jako jedno z najściślej sprawdzonych i dowiedzionych praw przyrody. (Co do innych zjawisk kosmicznych zależnych od grawitacyi: przypływu i odpływu morza, precesyi i t. p., patrz: Jędrzejewicz, Kosmografia, ust. 147).

121. Prawa grawitacyi. Przekonawszy się, że ciężkość jest tylko szczególnym przypadkiem powszechnej własności materyi wzajemnego przyciągania się, możemy ze zjawisk ciężkości wysnuć pewne wnioski, tyczące się grawitacyi wogóle. Przyciąganie się wzajemne ziemi i księżyca, albo słońca i planet, jest siłą tego samego rodzaju, jak przyciąganie się n. p. ziemi i kamienia, t. j. ciężar kamienia. Owóż ciężar całego kamienia jest sumą ciężarów wszystkich jego cząstek; ziemia przyciąga każdą cząstkę siłą niezależną od przyciągania innych. To samo stosuje się do grawitacyi. Przyciąganie się grawitacyjne dwu ciał jakichkolwiek jest wypadkową sił, które cząstki jednego ciała wywierają na cząstki drugiego. Biorąc pod uwagę, zamiast całych ciał, cząstki o rozmiarach tak małych, w porównaniu z ich odległością od siebie, żeby można było uważać je jako punkty materyalne, uwolnimy się od wpływu, jaki wywiera kształt i względne położenie ciał na ich przyciąganie się i sprowadzimy tym sposobem prawa grawitacyi do najprostszego wyrazu. Otoż prawo przyciągania się cząstek materyalnych musi być identyczne z prawem (2), wyprowadzonem w poprzedzającym ustępie dla planet. Planety bowiem, a nawet słońce, są tak małe, w porównaniu z wzajemnemi ich odległościami, że można je uważać za punkty materyalne. Zasadnicze prawa grawitacyi możemy więc wypowiedzieć w następujący sposób:

1) *Wszelkie dwie cząstki materyi przyciągają się wzajemnie w kierunku łączącej je prostej.*

2) *Przyciąganie jest proporcyonalne do mas obu cząstek, odwrotnie proporcyonalne do kwadratu ich odległości.*

3) *Przyciąganie się dwu cząstek nie zależy od rodzaju materyi, ani od obecności innych ciał*; wstawiwszy n. p. pomiędzy dwa ciała jakie ciało trzecie, nie zmienimy ich przyciągania się.

Oznaczając przez m i m_1 masy, przez r odległość cząstek, przez F siłę wzajemnego przyciągania się, wyrazimy powyższe prawa równaniem:

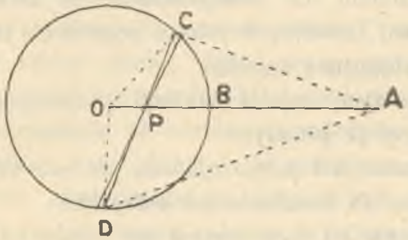
$$F = C \cdot \frac{mm_1}{r^2}.$$

Wartość liczebna spółczynnika proporcyonalności C zależy od miar, jakiemi mierzymy siły, masy i długości. Spółczynnik ten oznacza widocznie siłę przyciągania się dwu cząstek, mających masy równe jednostce, gdy odległość ich wynosi jednostkę długości (bo dla $m = m_1 = 1$, tudzież $r = 1$, mamy $F = C$; nazywa się on **stałą grawitacyi**.

Przyciąganie się ciał kulistych. Znając prawo przyciągania się cząstek, można przez sumowanie działań obliczyć przyciąganie się ciał jakiegokolwiek kształtu. Najważniejsze, a zarazem najprostsze twierdzenia odnoszą się w tej mierze do ciał kulistych.

1) *Kulista warstwa materyi, o gęstości jednostajnej, przyciąga każdą cząstkę leżącą zewnątrz niej tak samo, jak gdyby całkowita masa warstwy była zebrana w środku kuli.*

Przypuśćmy, że warstwa jest nieskończenie cienka i oznaczmy przez ϱ masę przypadającą na jednostkę powierzchni; całkowita masa warstwy będzie tedy: $m = 4\pi R^2 \varrho$, gdzie R oznacza promień kuli. W A (ryc. 97) niech się znajduje cząstka przyciągana o masie m'; O oznacza środek kuli. Wybierzmy na linii OA punkt P, w takiej odległości od O, żeby długości: OA, OP i $OB = R$ tworzyły proporcyę $OA : OB = OB : OP$. Podzielmy następnie całą powierzchnię kuli na pary malutkich pól, czyli t. zw. elementów, za pomocą stożków nieskończenie wązkich, mających wierzchołki w P. Jeden z takich stożków, przedstawiony na rysunku, sięgający od C do D, wycina z warstwy kulistej dwa małe elementy, których pola oznaczymy przez s i s'. Wykreślmy nadto z punktu



Ryc. 97.

P kulę o promieniu $= 1$ i oznaczmy przez $\tilde{\omega}$ powierzchnię, którą każda połowa stożka wycina z tej kuli. Natenczas mamy, jak uczy geometrya:

$$s = \frac{\tilde{\omega} \,.\, PC^2}{\cos \alpha}; \quad s' = \frac{\tilde{\omega} \,.\, PD^2}{\cos \alpha}, \text{ gdzie } \alpha = \sphericalangle OCP = \sphericalangle ODP.$$

Siły przyciągające, jakie uważane dwa elementy warstwy wywierają na m', wzdłuż linii AC i AD, wynoszą, według prawa grawitacyi:

$$C \,.\, m'\varrho \frac{\tilde{\omega}}{\cos \alpha} \frac{PC^2}{AC^2}, \quad \text{i} \quad C \,.\, m'\varrho \frac{\tilde{\omega}}{\cos \alpha} \frac{PD^2}{AD^2}.$$

Dowiedziemy, że te siły są równe. Proporcya $OA : OC = OC : OP$, wynikająca z poprzedniej, dowodzi, że trójkąty OAC i OCP są podobne, gdyż mają nadto kąt wspólny przy O; tak samo można dowieść podobieństwa trójkątów OAD i ODP. Z tego zaś wynika, że: $\frac{PC}{AC} = \frac{OC}{OA} = \frac{R}{OA}$ i tak samo $\frac{PD}{AD} = \frac{R}{OA}$. Siły uważane są więc równe, spólne ich natężenie jest: $C \,.\, m'\varrho \frac{\tilde{\omega}}{\cos \alpha} \frac{R^2}{OA^2}$. Z podobieństwa trójkątów wynika nadto, że $\sphericalangle\ OAC = OAD = \alpha$. Wypadkowa uważanych dwu sił działa więc wzdłuż linii AO, wartość jej wynosi (ust. 44): $C \cdot 2m'\varrho\bar{\omega}\frac{R^2}{OA^2}$. Aby uzyskać całkowite przyciąganie warstwy kulistej, należy napisać podobne wyrażenia dla wszystkich stożków podwójnych, takich jak CPD, wypełniających razem całe wnętrze kuli. Całkowite przyciąganie będzie sumą tych wszystkich sił. Iloczyn $C \cdot 2m'\varrho\frac{R^2}{OA^2}$, jako wspólny wszystkim tym wyrażeniom, może być wyłączony przed nawias, w nawiasie zaś pozostanie suma wszystkich $\bar{\omega}$, t. j. połowa powierzchni kuli o promieniu $= 1$, czyli 2π. Wskutek tego znajdziemy przyciąganie pochodzące od całej warstwy:

$$F = Cm'\varrho\frac{4\pi R^2}{OA^2}, \text{ albo: } F = C\frac{mm'}{OA^2},$$

co dowodzi twierdzenia poprzednio przytoczonego.

2) Z twierdzenia 1) wynika bezpośrednio następujące: *Wszelka bryła, złożona z jednolitych, spółśrodkowych warstw kulistych, przyciąga cząstkę leżącą zewnątrz niej tak samo, jak gdyby całkowita masa bryły była zebrana w środku.*

3) *Warstwa kulista materyi o gęstości jednostajnej nie wywiera żadnego działania na cząstkę położoną w próżni objętej tą warstwą.*

Niechaj grubość warstwy będzie nieskończenie mała; P (ryc. 97) niech oznacza dowolne położenie cząstki przyciąganej. Podzieliwszy warstwę kulistą na pary elementów, jak w przypadku 1, za pośrednictwem stożków nieskończenie wązkich wychodzących z P, przekonamy się łatwo, że działania każdej pary elementów należących do siebie, jak s i s', znoszą się wzajemnie. Pola elementów, a więc także ich masy, są bowiem proporcyonalne do PC^2 i PD^2. Siły natomiast, które one wywierają na P, są odwrotnie proporcyonalne do PC^2 i PD^2. Z tego wynika, że działania każdej pary elementów są równe; ponieważ kierunki ich są przeciwne, przeto znoszą się one wzajemne.

4) Z poprzedzającego wynika następujące twierdzenie. *Jeżeli we wnętrzu jakiejkolwiek bryły, złożonej z jednolitych, spółśrodkowych warstw kulistych, znajduje się cząstka przyciągana, natenczas działa na nią tylko ta część materyi, która znajduje się bliżej środka, aniżeli uważana cząstka.*

5) Przyciąganie się dwu kul znajdziemy, biorąc pod uwagę przyciąganie jednej z nich na wszystkie cząstki drugiej; z 2) wynika wówczas: *Dwie bryły, złożone z jednolitych, spółśrodkowych warstw kulistych, przyciągają się tak, jak gdyby masy ich były zebrane w środkach.*

122. Bezpośredni pomiar grawitacyi i wartość stałej grawitacyjnej. Zwyczajne spostrzeżenia nie zdradzają nam zupełnie istnienia przyciągań między ciałami na ziemi, albowiem z powodu niewielkich mas, siły te są nadzwyczajnie małe. Za pomocą dostatecznie czułych przyrządów zdołano jednak wykazać przyciąganie się wzajemne ciał na ziemi, a nawet wymierzono natężenie tych sił; uczynił to naprzód Cavendish w r. 1798[1]. Można w tym celu użyć czułej wagi (Jolly) urządzonej tak, jak to opisaliśmy w ust. 119, ryc. 96. Jolly ustawił wagę na szczycie wieży; druga para szalek s_1 i s_2, znajdowała się na dole. Na dolnej szalce s_2 ustawiono kulę szklaną, napełnioną rtęcią, ważącą 5009·450 *gr*; kulę tę zrównoważono drugą podobną kulą (przyczyniwszy mały ciężarek, równoważący zmniejszenie ciężaru, wskutek większej odległości od ziemi, ust. 119), ustawioną po przeciwnej stronie wagi, na szalce górnej S_1. Tuż pod dolną szalką s_2 zbudowano następnie, ze stosownie wyrobionych cegiełek, kulę ołowianą K o średnicy 1 *m*, ważącą 5775200 *gr*. Okazało się wówczas, że ciężar w S_1 nie wystarczał już do zrównoważenia ciężaru w s_2, albowiem do przyciągania ziemi przyłączyło się przyciąganie kuli ołowianej. Przyciąganie to działa na jednę tylko stronę wagi, mianowicie na kulę w szalce s_2; odległość bowiem S_1 jest tak duża w porównaniu z wielkością kuli ołowianej, że wpływ na S_1 można zaniedbać. Aby zrównoważyć wagę należało dodać do szalki S_1 ciężarek wynoszący około 0·6 *mgr*; znaczy to, że kula rtęciowa i ołowiana przyciągały się siłą $0{\cdot}0006 \times 981 = 0{\cdot}59$ *dyn*. Odległość środków obu kul była 56·86 *cm*.

Na podstawie tych spostrzeżeń można obliczyć wartość stałej grawitacyjnej C (ust. 121). Równanie bowiem:

$$F = C\frac{mm'}{r^2} \text{ daje: } C = \frac{Fr^2}{mm'}.$$

Zważywszy, że kule jednolite przyciągają się tak, jak gdyby masy ich były zebrane w środkach, mamy w doświadczeniu Jolly'ego: $m = 5009{\cdot}45$ *gr*, $m' = 5775200$ *gr*, $r = 56{\cdot}86$ *cm*, $F = 0{\cdot}59$ *dyn* (*gr. cm/sek²*); podstawiwszy te wartości w ostatnim wzorze znajdziemy $C = 6{\cdot}6 \times 10^{-8}$ *dyn* cm^2/gr^2 ($cm^3/gr\ sek^2$).

Na podstawie licznych pomiarów, wykonanych podobnymi sposobami przez różnych badaczy, przyjmuje się obecnie jako dokładniejszą wartość stałej grawitacyjnej:

---

[1] (Czyt. Kewendisz). Kilkanaście lat wcześniej okazali Bouguer, tudzież Maskelyne, że góry przyciągają ku sobie pion wolno zawieszony.

$$C = 6{\cdot}658 \times 10^{-8}\, cm^3/gr\, sek^2$$ [1]),

innemi słowy: dwa punkty materyalne, mające masy 1 *gr* każdy, przyciągają się z odległości 1 *cm* siłą $6{\cdot}658 \,.\, 10^{-8}$ *dyn.*

123. Masa i średnia gęstość ziemi. Przyrządy, których Cavendish, Jolly i inni używali do wymierzenia stałej grawitacyjnej, są to w rzeczywistości wagi, za pomocą których wymierzono masę kuli ziemskiej.

Znając bowiem wartość stałej grawitacyjnej, możemy odrazu obliczyć masę m ziemi, jak następuje. Ciężar masy 1 *gr*, równy na powierzchni ziemi w przybliżeniu $g = 981$ dynom, (pominąwszy drobne różnice ciężkości w rozmaitych miejscach) jest siłą przyciągającą, którą masa ziemi m wywiera na masę 1 *gr*, z odległości równej promieniowi ziemi: $R = 637 \times 10^6$ *cm.* Według prawa grawitacyi mamy więc:

$$(1) \qquad g = C\frac{m \times 1}{R^2},$$

czyli:

$$981 = 6{\cdot}658 \times 10^{-8} \frac{m}{(637 \times 10^6)^2},$$

skąd obliczymy:

$$m = 6 \times 10^{27}\, gr.$$

Porównywając to z objętością ziemi: $v = \frac{4}{3}\pi(637 \times 10^6)^3 = 1{\cdot}083 \times 10^{27}\, cm^3$, znajdziemy:

$$d = \frac{m}{v} = 5{\cdot}5,$$

jako średnią gęstość kuli ziemskiej; znaczy to, że masa ziemi jest $5\frac{1}{2}$ razy większa, aniżeli masa wody tej samej objętości. Zważywszy, że skały tworzące zewnętrzną skorupę ziemi mają gęstość

[1]) W astronomii używa się często, jako jednostki masy, takiej masy, która ku równej sobie, odległej o jednostkę długości, ciąży siłą $= 1$. W tym astronomicznym układzie miar jest widocznie: $C = 1$. Przyjąwszy nadto długość $149{\cdot}5 \times 10^{11}$ *cm* (średnią odległość słońca od ziemi) za jednostkę długości, znajdziemy łatwo: jednostka astronomiczna masy $= 50 \times 10^{45}$ *gr*, t. j, blizko 10^{19} kul ziemskich (ust. 123).

mało co większą niż 2, ocean zaś tylko 1, dochodzimy do wniosku, że wnętrze ziemi składać się musi z ciał o gęstości znacznie większej niż 5·5.

Masa słońca. Masy planet porównywa się z masą ziemi na podstawie praw Keplera. W ust. 120, (3), mieliśmy $\frac{C}{4\pi^2}(M+m)=\frac{a^3}{T^2}$, gdzie m oznacza masę ziemi, M masę słońca. Wstawiwszy za C wartość z (1), t. j. $C=\frac{gR^2}{m}$, oznaczywszy nadto przez $p=\frac{R}{a}$ stosunek promienia ziemi do średniej odległości słońca od ziemi (jest to t. zw. paralaksa słońca, wyrażona w mierze łukowej — kąt znany z pomiarów astronomicznych), otrzymamy:

$$1+\frac{M}{m}=\frac{4\pi^2 R}{p^2 T^2 g}.$$

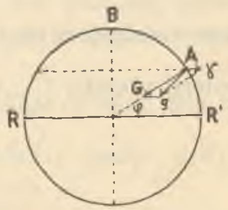
Przyjąwszy za p okrągło liczbę $\frac{1}{23440}$, tudzież $T=365·256 \times 86400$ *sek* (rok gwiazdowy, ust. 20), otrzymamy jako stosunek masy słońca do masy ziemi liczbę 331640. Stąd wypada masa słońca $=2\times10^{33}$ *gr*. Słońce i ziemia, w średniej swej odległości 149·5 $\times 10^{11}$ *cm* przyciągają się zatem, jak łatwo już obliczyć, siłą 3·5 $\times 10^{27}$ *dyn*, t. j. około 4 bilionów tonn. W sposób zupełnie podobny można obliczyć masę każdego ciała niebieskiego, około którego krąży jakikolwiek satelita. Wystarczy znać okres obiegu tego satelity, tudzież jego odległość od danego ciała niebieskiego (por. zad. 223).

124. Różnice ciężkości na ziemi. Gdyby ziemia była nieruchomą bryłą kulistą, jednolitą, albo złożoną z jednolitych, spółśrodkowych warstw, wówczas przyciąganie jej byłoby we wszystkich punktach na powierzchni jednakowe; natężenie ciężkości na powierzchni ziemi, w poziomie morza, byłoby wielkością stałą. Wiadomo, że w rzeczywistości tak nie jest (ust. 56). Dwie są główne przyczyny, sprawiające różnice ciężkości w różnych miejscach na powierzchni ziemi: n a p r z ó d, ziemia nie jest ani kulą, ani kulą jednolitą; postać jej, jak uczy geodezya, jest zbliżona do t. zw. sferoidy, czyli elipsoidy obrotowej, spłaszczonej u biegunów. Oznaczywszy przez a promień koła równikowego, przez b połowę linii łączącej bieguny, należy przyjąć:

$$a = 6\,378\,200\ m,$$
$$b = 6\,356\,500\ m,$$

co wskazuje, że w każdym razie postać ziemi tylko nieznacznie różni się od kuli.

Powtóre, ziemia nie jest nieruchoma, lecz (pominąwszy ruch postępowy, którego wpływ na ciężkość jest nieznaczny) obraca się około osi. Wskutek tego, ciała spoczywające na powierzchni ziemi ulegają nietylko przyciąganiu tejże, ale zarazem sile odśrodkowej, wynikającej z obrotu, a działającej wogóle od ziemi na zewnątrz.



Ryc. 98.

Ciężkość tedy, którą spostrzegamy za pośrednictwem naszych mięśni, wag sprężynowych, wahadeł i t. p. *jest wypadkową przyciągania grawitacyjnego i siły odśrodkowej* (ust. 48), *wynikającej z dziennego obrotu ziemi około osi.* Ażeby zdać sobie sprawę z wpływu siły odśrodkowej, wyobraźmy sobie naprzód, że ziemia jest bryłą jednolitą i dokładnie kulistą, o promieniu R (można tu wziąć okrągło 6370000 m) i masie równej jednostce. Gdyby nie było obrotu, natężenie ciężkości byłoby na tej kuli wszędzie jednakowe, n. p. G_0. Jeżeli natomiast kula obraca się około osi, z prędkością kątową $\omega = \frac{2\pi}{86164{\cdot}09}$ na *sek* (ust. 7), natenczas w pewnym punkcie A (ryc. 98), mającym szerokość geograficzną φ, natężenie ciężkości g będzie równe wypadkowej przyciągania grawitacyjnego G_0, skierowanego ku środkowi kuli i siły odśrodkowej γ działającej prostopadle do osi obrotu, na zewnątrz. Zważywszy, że promień koła, po którym punkt A się porusza, wynosi $R \cos \varphi$, mamy (ust. 47):

$$\gamma = \omega^2 R \cos \varphi,$$

albo też, jeżeli oznaczymy przez $\gamma_0 = \omega^2 R$ wartość siły odśrodkowej na równiku (dla $\varphi = o$):

$$\gamma = \gamma_0 \cos \varphi.$$

Z trójkąta sił, działających na punkt A, obliczymy z łatwością:

$$g = \sqrt{G_0^2 + \gamma_0^2 \cos^2 \varphi - 2\, G_0 \gamma_0 \cos^2 \varphi}.$$

Siła odśrodkowa γ jest mała w porównaniu z g i G_0, gdyż na równiku, gdzie wartość jej jest największa, wynosi ona tylko:

$$\gamma_0 = \frac{4\pi^2 \times 637 \times 10^6}{(86164{\cdot}09)^2} = 3{\cdot}39 \ cm/sek^2.$$

Jeżeli tedy napiszemy powyższe równanie w następujący sposób:

$$g = G_0 \left(1 - 2\,\frac{\gamma_0}{G_0} \cos^2\varphi + \frac{\gamma_0^2}{G_0^2} \cos^2\varphi\right)^{\frac{1}{2}},$$

a w rozwinięciu tego wyrażenia na szereg zachowamy tylko pierwszą potęgę ułamka $\frac{\gamma_0}{G_0}$, wówczas znajdziemy:

$$g = G_0 \left(1 - \frac{\gamma_0}{G_0} \cos^2\varphi\right).$$

Natężenie ciężkości na równiku oznaczymy tu i nadal przez g_0, przyczem $g_0 = G_0 - \gamma_0$; możemy tedy napisać:

$$g = G_0 - \gamma_0 \cos^2\varphi = g_0 + \gamma_0 - \gamma_0 \cos^2\varphi \text{ albo:}$$

(1) $$g = g_0 \left(1 + \frac{\gamma_0}{g_0} \sin^2\varphi\right).$$

Równanie to okazuje, że natężenie ciężkości powiększa się, począwszy od równika, gdzie jest najmniejsze, ku obu biegunom ziemi, gdzie osiąga wartość największą. Porównywając wartości g, wymierzone za pomocą wahadła, w różnych miejscach na ziemi, przekonano się, że równanie (1) określa z dostateczną dokładnością prawo zmienności natężenia ciężkości, mianowicie, że zwiększenie ciężkości przy przejściu od równika do innego miejsca na ziemi, jest istotnie proporcyonalne do kwadratu wstawy szerokości geograficznej tego miejsca. Jednakowoż spółczynnik przy $\sin^2\varphi$ jest w rzeczywistości inny, aniżeli w równaniu (1). Doświadczenie prowadzi mianowicie do równania:

(2) $$g = 978{\cdot}06\,(1 + 0{\cdot}005\,192 \sin^2\varphi),$$

podczas gdy podług (1) spółczynnik przy $\sin^2\varphi$ wynosiłby:

$$\frac{\gamma_0}{g_0} = 0{\cdot}0035.$$

Różnica ta tłumaczy się głównie tem, że w powyższym rachunku nie uwzględniliśmy spłaszczenia ziemi w pobliżu biegunów. Spłaszczenie to sprawia, że ciężkość powiększa się ku biegunom nieco więcej, aniżeli na ziemi zupełnie kulistej.

Wzór (2) stosuje się do powierzchni morza; aby znaleźć g w miejscu położonem w wysokości z metrów nad morzem, należy poprzedzające wyrażenie pomnożyć jeszcze (ust. 119, dopisek) przez $(1 - 0{\cdot}000\,000\,196\, z)$.

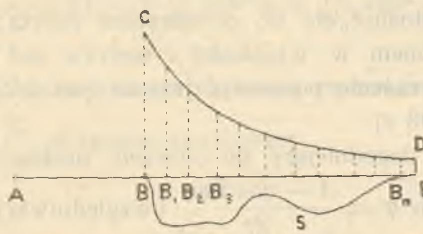
Inny wzór, dogodniejszy do obliczeń, można uzyskać podstawiając w (2): $\sin^2\varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}$; uwzględniwszy nadto wpływ wysokości, otrzymamy następujące wyrażenie:

$$(3) \qquad g = 980{\cdot}6\,(1 - 0{\cdot}00259 \cos 2\varphi - 0{\cdot}000\,000\,196\, z), \text{ albo:}$$
$$g = 980{\cdot}6 - 2{\cdot}540 \cos 2\varphi - 0{\cdot}00019\,.\,z.$$

Wypadkowa ciężkość g nie jest zwrócona dokładnie ku środkowi ziemi (z wyjątkiem równika i biegunów). Objaśnia to dostatecznie ryc. 98. Kąt między ciężkością a powierzchnią ziemi, jeżeli tę ostatnią określimy n. p. jako powierzchnię morza, nie różni się jednak od 90° — jakby to można wnosić z ryc. 98. Działanie bowiem siły odśrodkowej nadaje powierzchni wód (określającej postać) ten właśnie kształt sferoidalny, przy którym wypadkowa ciężkość jest do powierzchni prostopadła. *W środku ziemi ciężkość nie istnieje*, albowiem ciało umieszczone tam ulegałoby siłom działającym równomiernie na wszystkie strony, a wskutek tego znoszącym się wzajemnie.

125. Potencyał grawitacyi. Podnosząc jakiekolwiek ciało ciężkie nad ziemię, wykonywamy pracę przeciw ciężkości, a wskutek tego udzielamy energii potencyalnej ciału, a raczej układowi złożonemu z ciała i ziemi. W podobny sposób wykonywamy także pracę, powiększając odległość jakichbądź dwu mas, przyciągających się wzajemnie wskutek grawitacyi; energia potencyalna układu takiego powiększa się wówczas o wartość pracy wykonanej. Obliczymy wartość tej pracy.

[Weźmy pod uwagę dwie cząstki materyalne A i B (ryc. 99) mające masy m i m' i oznaczmy odległość AB przez r. Przyciąganie się wzajemne tych cząstek wynosi w tem położeniu, jak wiadomo: $F = C\frac{mm'}{r^2}$. Ażeby wbrew przyciąganiu odsunąć cząstkę m' z B do punktu B', leżącego w odległości większej: $AB' = r'$, gdzie przyciąganie wynosi już tylko $F' = C\frac{mm'}{r'^2}$, musimy wykonać pracę L, którą oblicza się w sposób następujący: podzielimy naprzód stały



Ryc. 99.

iloczyn Cmm' przez odległość r obu cząstek w położeniu początkowem, odejmijmy od tego ilorazu iloraz Cmm' przez końcową odległość r' cząstek; różnica tych dwu ilorazów (1)... $L = \frac{Cmm'}{r} - \frac{Cmm'}{r'}$ przedstawiać będzie ściśle wartość szukanej pracy.

Dowód[1]). W miarę oddalania się m' od m siła przyciągająca zmniejsza się według prawa odwrotnych kwadratów. Ażeby tę zmienność okazać na rysunku, wybierzemy na prostej BB' szereg n punktów B_1, B_2, B_3,..., B_n, w odstępach dostatecznie małych i oznaczmy odległości ich od A po kolei przez $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Wykreślmy w każdym z nich rzędną, wyobrażającą przyciąganie, jakie cząstka nieruchoma m, znajdująca się w A wywiera na cząstkę m', gdy ta przechodzi kolejno przez położenia B_1, B_2... aż do B'. Końce tych rzędnych wyznaczają krzywą ciągłą CD, która wyobraża właśnie zmienność siły przyciągającej. Wiadomo (ust. 105), że pole $BCDB'$ przedstawia wartość pracy L, wykonanej przeciw temu przyciąganiu na drodze BB'. Pole to składa się z szeregu wązkich pasków o podstawach $BB_1 = r_1 - r$; $BB_2 = r_2 - r_1, \ldots, BB' = r' - r_n$.

[1]) Według Hoborskiego.

U góry paski te są ograniczone łukami CD. Gdybyśmy zamiast tych pasków podstawili prostokąty o wysokościach równych dłuższym ich bokom, wtedy uzyskana suma pól

$$S_1 = Cmm'\left(\frac{r_1 - r}{r^2} + \frac{r_2 - r_1}{r_1^{\,2}} + \ldots + \frac{r' - r_n}{r_n^{\,2}}\right)$$

byłaby z pewnością cokolwiek większa od szukanego pola $BCDB'$. Gdybyśmy znowu wprowadzili do rachunku ich prawe, krótsze boki, wtedy suma

$$S_2 = Cmm'\left(\frac{r_1 - r}{r_1^{\,2}} + \frac{r_2 - r_1}{r_2^{\,2}} + \ldots + \frac{r' - r_n}{r'^2}\right)$$

byłaby niezawodnie za mała w stosunku do szukanego pola.

Im więcej nakreślimy pasków i im węższe one będą, tem mniej obie sumy S_1 i S_2 różnić się będą od siebie i od prawdziwej wartości pola $BCDB'$. Ażeby tę wspólną granicę znaleźć rachunkiem, wybierzmy te n punktów podziału B_1, $B_2 \ldots$ w odległościach od A, wybranych planowo według następującej zasady:

$$r_1 = rp,\ r_2 = rp^2,\ r_3 = rp^3 \ldots r_n = rp^n,\ r' = rp^{n+1}$$

w czem p oznacza liczbę większą od jedności, zależną od liczby n nakreślonych pasków; mianowicie będzie zawsze $\frac{r'}{r} = p^{n+1}$, jak to okazuje ostatnie z tych równań. Im większe wybierzemy n, tem mniej średnie odległości r_1 i r, r_2 i r_1, i t. d. będą się różniły, tem bardziej p zbliży się do jedności.

Podstawiwszy obrane tak wartości na r_1 i $r_2 \ldots$ we wzory na S_1 i S_2, znajdziemy łatwo

$$S_1 = Cmm'\frac{p-1}{r}\left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \ldots + \frac{1}{p^n}\right),$$

$$S_2 = Cmm'\frac{p-1}{rp^2}\left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \ldots + \frac{1}{p^n}\right).$$

Stosując tu znany wzór na sumę postępu geometrycznego:

$$1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\dots+\frac{1}{p^n}=\frac{1-\frac{1}{p^{n+1}}}{1-\frac{1}{p}},$$

uzyskamy po prostej przeróbce:

$$S_1=\frac{Cmm'p}{r}\left(1-\frac{1}{p^{n+1}}\right);\quad S_2=\frac{Cmm'}{rp^n}\left(1-\frac{1}{p^{n+1}}\right),$$

albo, kładąc z powrotem $p^{n+1}=\frac{r'}{r}$,

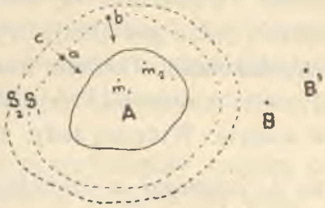
$$S_1=Cmm'p\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right);\quad S_2=\frac{Cmm'}{p}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right).$$

Widać stąd, że gdy liczba pasków n rośnie do nieskończoności, a p zbliża się nieograniczenie do jedności, obie sumy zlewają się w jednę wartość, wyrażającą szukaną pracę L, podaną powyżej we wzorze (1).

Wartość tej pracy jest zresztą niezależna od kształtu drogi wybranej pomiędzy punktami B i B'; prowadząc cząstkę m' po innej dowolnej linii BSB' (ryc. 99), musieliśmy wykonać taką samą pracę L, jak na drodze prostej BB'. Taką drogę krzywą, jak BSB', można bowiem zawsze zastąpić linią schodkową, złożoną z nieskończenie krótkich łuczków kolistych, kreślonych z A, jako środka, i z nieskończenie krótkich promieni skierowanych ku A. Na łuczkach pracy niema, gdyż przyciąganie jest tam prostopadłe do drogi; suma zaś prac na promieniach jest widocznie równa obliczonej wyżej pracy L. Ta niezależność pracy od kształtu drogi jest, jak wiadomo, cechą wszystkich sił zachowawczych (ust. 109). Grawitacya jest zatem siłą zachowawczą.

Weźmy teraz pod uwagę ciało A, jakiejkolwiek postaci i wielkości (ryc. 100), złożone z wielkiej liczby cząstek materyalnych, o masach m_1, m_2, m_3 i t. d. Obok tego ciała, w punkcie B, znajduje się cząstka przyciągana m'. Wszystkie cząstki ciała, działając na m', przyciągają tę cząstkę wzdłuż prostych łączących je z punktem B; długości tych prostych oznaczymy przez r_1, r_2, r_3 i t. d. Przyciąganie, jakie cała bryła wywiera na cząstkę m', jest to wypadkowa tych wszystkich przyciągań częściowych. Ażeby przesunąć cząstkę m' z położenia B w inne B', musimy wykonać pracę przeciw siłom, pochodzącym od wszystkich cząstek ciała A. Całkowitą pracę otrzymamy, dodając do siebie wszystkie te prace cząstkowe (ust. 104).

Na podstawie tego, co znaleźliśmy poprzednio dla dwu cząstek, wnosimy, że praca, użyta celem oddalenia cząstki m' z B do B' (równająca się zarazem przyrostowi energii potencyalnej układu



Ryc. 100.

złożonego z ciała A i cząstki m'), będzie równa różnicy wartości jakie przyjmuje suma:

$$C\frac{m_1 m'}{r_1} + C\frac{m_2 m'}{r_2} + C\frac{m_3 m'}{r_3} + \ldots$$

gdy za $r_1, r_2, \ldots$ przyjmiemy raz odległości cząstek od B, drugi raz od B'. Sumę tę możemy oznaczyć krócej przez:

$$(2) \qquad Cm'\Sigma\frac{m}{r}.$$

Praca równa się więc różnicy wartości, jakie to wyrażenie przyjmuje w początkowym i końcowym punkcie drogi BB', bez względu na jej kształt.

Wyrażenie $C\Sigma\frac{m}{r} = u$, t. j. *suma ilorazów z mas wszystkich cząstek przyciągających, przez odległości ich od pewnego dowolnego punktu* (B), *pomnożona przez stałą grawitacyi, nazywa się* ***potencyałem*** *ciała złożonego z tych cząstek*, a mianowicie jest to wartość, jaką potencyał posiada w obranym punkcie B. Oznaczywszy wartość potencyału w punkcie B przez u, w punkcie B' przez u', widzimy, że praca L, potrzebna do przeniesienia cząstki m' z B do B', wynosić będzie: $L = m'(u - u')$.

Potencyał można jeszcze inaczej określić. Przyjmijmy, że cząstka przyciągana, znajdująca się w B, posiada masę równą jednostce, $m' = 1$; wyobraźmy sobie następnie, że tę jednostkę masy przeniesiono po jakiejkolwiek drodze do miejsca dowolnego, a nieskończenie odległego od ciała A. Praca, użyta w tym celu, nie będzie bynajmniej nieskończenie wielka, albowiem siły przyciągające zmniejszają się szybko w miarę zwiększania się odległości. Wartość jej równa się różnicy wartości, jakie przyjmuje wyrażenie (2), naprzód w B, a następnie w nieskończoności. Ostatnia wartość jest oczywiście zerem, albowiem wszystkie mianowniki (r) ułamków tworzących sumę są nieskończenie wielkie. Widzimy tedy, że praca owa wynosi $C\Sigma \frac{m}{r} = u$; znaczy to, *że potencyał w jakimbądź punkcie* (*B*), *w pobliżu ciała przyciągającego* (*A*), *jest równy pracy, potrzebnej do przeniesienia jednostki masy*, wbrew przyciąganiu ciała *A*, *z owego punktu* (*B*), *do punktu nieskończenie odległego od ciała.*

Potencyał jest to wielkość bardzo użyteczna we wszelkich zastosowaniach teoryi grawitacyi, [a także w zastosowaniu do wszelkich sił, działających jak grawitacya w stosunku odwrotnym do kwadratu odległości, a więc w zastosowaniu do przyciągań elektrycznych i magnetycznych]. Określa on najlepiej i najdosadniej przyciąganie, jakie pewna bryła wywiera na dowolną cząstkę, znajdującą się w sąsiedztwie. Pomyślmy, że w każdym punkcie (takim jak n. p. *a* ryc. 100), w otoczeniu ciała przyciągającego — w t. zw. polu działania ciała A — obliczono wartość potencyału, według wzoru: $u = C\Sigma \frac{m}{r}$. Znajdą się oczywiście pomiędzy tymi punktami takie, n. p. b, w których potencyał mieć będzie wartość tę samą jak w a. Punkty te wytyczają około bryły przyciągającej powierzchnię zamkniętą, zwaną powierzchnią poziomu. Przyjmując po kolei różne wartości potencyału, możemy wykreślić mnóstwo podobnych powierzchni; w każdej z osobna potencyał będzie stały, w każdej jednak wartość będzie inna.

Na ryc. 100 dwie te powierzchnie poziomu oznaczone są przez S_1 i S_2; na jednej z nich potencyał posiada wszędzie wartość u_1, na drugiej u_2. Jeżeli na jednej z nich, n. p. na S_1, umieścimy gdziekolwiek n. p., w punkcie a, cząstkę materyalną m', a następnie przesuniemy ją do innego miejsca b, na tej samej powierzchni, to przesunięcie to nie będzie wymagało żadnej pracy, nie spotka przeto oporu ze strony grawitacyi, gdyż różnica wartości potencyału, a więc i praca L są tutaj równe zeru.

Z tego wynika, że przyciąganie, jakie bryła A wywiera na uważaną cząstkę, jest wszędzie prostopadłe do powierzchni poziomu, przechodzącej przez tę cząstkę. Wniosek ten objaśnimy najlepiej przykładem ciężkości ziemskiej: przesuwanie ciała ciężkiego w kierunku poziomym nie wymaga wykonania pracy przeciw ciężkości; z tego wynika, że ciężkość musi działać prostopadle do płaszczyny poziomej, która jest właśnie częścią powierzchni poziomu (stąd nazwa).

Jeżeli natomiast poprowadzimy cząstkę m' z punktu a, leżącego na S_1, do punktu c, leżącego na innej, bardzo blizkiej powierzchni poziomu S_2, w kierunku prostopadłym do S_1 t. j. wprost przeciwnym sile działającej na cząstkę, wtenczas potrzeba wykonać pracę:

$$L = m' (u_1 - u_2).$$

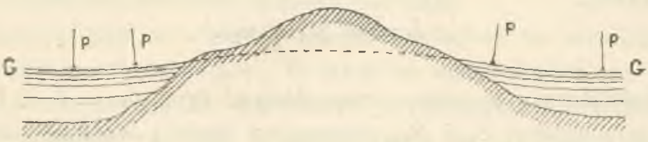
Podzieliwszy tę pracę przez długość drogi $ac = l$, t. j. przez odstęp powierzchni S_1 i S_2, otrzymamy średnią wartość siły przyciągającej F, którą ciało A wywiera w kierunku ca na cząstkę m' mianowicie:

$$F = m' \frac{u_1 - u_2}{l}.$$

Gdyby cząstka przyciągana posiadała masę równą jednostce, natenczas nazwalibyśmy tę siłę natężeniem grawitacyi, albo natężeniem pola grawitacyi, w pobliżu punktów a lub c. Stosunek $\frac{u_1 - u_2}{l}$, wyrażający ubytek potencyału wzdłuż linii ac przypadający na jednostkę długości, nazwiemy *spadem potencyału* w pobliżu punktów a lub c. W podobnem znaczeniu mówi się n. p. o spadzie albo stromości gościńca, rozumiejąc przez to różnicę wysokości dwu miejsc, podzieloną przez ich poziomą odległość. Możemy tedy powiedzieć że *natężenie pola grawitacyi w jakimkolwiek punkcie równa się spadowi potencyału w pobliżu tego punktu, w kierunku prostopadłym do powierzchni poziomu.*

Widać zarazem, że przy stałej wartości różnicy $u_1 - u_2$ natężenie pola grawitacyi jest odwrotnie proporcyonalne do odstępu l sąsiednich powierzchni poziomu; w miejscach tedy, gdzie natężenie pola jest wielkie, powierzchnie poziomu skupiają się więcej ku sobie. W ten sposób powierzchnie te uzmysławiają nietylko kierunek lecz i natężenie grawitacyi.

Jeżeli bryła przyciągająca jest kulą o masie m, złożoną z jednolitych, spółśrodkowych warstw, natenczas w każdym punkcie, leżącym zewnątrz kuli, w odległości r od środka, potencyał wyraża się wzorem: $u = C\frac{m}{r}$; kula działa bowiem na cząstki zewnętrzne tak, jak gdyby cała jej masa była skupiona w środku. Potencyał grawitacyi na powierzchni ziemi wynosi tedy w przybliżeniu $u_0 = C\frac{m}{R}$, gdzie m i R oznaczają masę i promień ziemi. Zważywszy, że $C = \frac{gR^2}{m}$ (ust. 123), mamy także: $u_0 = gR$. Jest to praca potrzebna do oddalenia jednostki masy od ziemi



Ryc. 101

do nieskończoności, wbrew jej ciężarowi; u_0 przedstawia zarazem wartość energii kinetycznej, którejby nabyła jednostka masy, spadając na ziemię z odległości nieskończenie wielkiej.

O ile wolno uważać ziemię jako kulę złożoną z jednolitych warstw, o tyle powierzchnie poziomu są również kulami, współśrodkowemi z ziemią. Rzeczywisty kształt tych powierzchni jest jednakowoż cokolwiek odmienny od kulistego, przedewszystkiem z tego powodu, że ciężkość zależy nietylko od grawitacyi, lecz także od siły odśrodkowej, wynikającej z obrotu ziemi (ust. 124). To, co na małym obszarze powierzchni ziemi nazywamy płaszczyzną poziomą, jest to część jednej z powierzchni poziomu. Ściślej mówiąc, płaszczyzna pozioma jest to styczna do powierzchni poziomu, przechodzącej przez uważany punkt. Powierzchnia wody w spoczynku jest zawsze prostopadła do kierunku ciężkości; powierzchnia morza jest zatem jedną z powierzchni poziomu okalających ziemię. Jeżeli wyobrazimy sobie tę właśnie powierzchnię poziomu dopełnioną także wśród lądów, wtenczas otrzymamy bryłę okrągłą, której się używa celem ścisłego określenia kształtu ziemi, pomimo nieregularnych nierówności jej powierzchni. Bryła ta nazywa się g e o i d ą. Rozmieszczenie lądów i gór wywiera znaczny wpływ na postać geoidy GG (ryc. 101). Góry bowiem, tudzież lądy, przyciągają ku sobie pion p, sprawiają tedy, że w ich sąsiedztwie powierzchnie poziomu się podnoszą. Kształ geoidy nie jest dotąd dokładnie znany; w każdym razie różni się tylko nieznacznie od elipsoidy obrotowej spłaszczonej (ust. 124).

Potencyał własny bryły grawitującej ku sobie samej. Wyobraźmy sobie bryłę złożoną z cząstek o masach m_1, m_2, m_3,... Oderwijmy od tej bryły cząstkę m_1 i unieśmy ją w nieskończoność. Trzeba będzie wykonać wtenczas pracę L_1, przeciw grawitacyjnemu przyciąganiu pozostałych cząstek, a praca ta wynosi $L_1 = m_1 u_1$, w czem u_1 oznacza wartość potencyału pozostałych cząstek w tem miejscu, które zajmowała cząstka oderwana. Oderwijmy z kolei cząstkę m_2 i unieśmy ją nieskończenie daleko; praca wykonana będzie teraz $L_2 = m_2 u_2$ i t. d. Jeżeli w ten sposób rozbierzemy i rozproszymy całą bryłę, okaże się, że wykonaliśmy ogółem pracę $U = L_1 + L_2 + L_3 \ldots$ Tę pracę całkowitą zowiemy potencyałem własnym danej bryły w pierwotnym jej ustroju. Ona wyraża widocznie wyczerpanie energii potencyalnej, jakie zachodzi w materyi nieskończenie rozproszonej, gdy ona zbiera się i skupia pod wpływem grawitacyjnego przyciągania, formując zwartą bryłę. Wielkość ta ma ważne znaczenie w różnych teoryach kosmogonicznych, tłumaczących powstawanie światów przez skupianie się odłamów meteorycznych rozproszonych w przestrzeni. Jeżeli bryła jest jednolitą kulą o masie M i promieniu R, wówczas rachunek całkowy daje $U = \frac{3}{5}\frac{CM^2}{R}$, jako wartość własnego jej potencyału, w czem C oznacza stałą grawitacyi (por. tom II, ust. 86).

Zadania.

231) Obliczyć okres obiegu T nieskończenie małego księżyca (satelity), krążącego około kuli jednolitej, o gęstości d, tuż obok jej powierzchni.

Odp. r promień kuli, m masa satelity. Siła dośrodkowa $= \frac{4\pi^2 mr}{T^2}$ $=$ grawitacyi $= C\frac{(\frac{4}{3}r^3\pi d)m}{r^2}$, stąd $T = \sqrt{\frac{3\pi}{Cd}}$ (niezależny od m i od wielkości kuli).

232) Obliczyć powyższy okres dla kuli wodnej ($d = 1$).

Odp. R prom. ziemi, D jej średnia gęstość, $C = \frac{3g}{4\pi RD}$, zatem: $T = 2\pi\sqrt{\frac{RD}{gd}} = 2\pi\sqrt{\frac{5{\cdot}5 \times 637 \times 10^6}{980 \times 1}}$ sek. $=$ 3 godz. 18 min. (Zalecano użycie tego okresu jako bezwzględnej jednostki czasu, zależnej tylko od własności wody).

233) Jeden z księżyców Jowisza okrąża tę planetę w okresie $T_1 = 1{\cdot}769137$ dni, a odległość jego średnia od Jowisza, równa a_1, wynosi $0{\cdot}002819$ odległości a ziemi od słońca. Obliczyć masę M_1 Jowisza,

przyjąwszy, że masa słońca M jest 331640 razy większa od masy ziemi m, a okres obiegu tej ostatniej $T = 365{\cdot}256$ dni. Malutką masę m tego księżyca można opuścić.

Odp. Napiszmy dla systemu Jowisza i jego satelity takie równanie, jak (3) w ust. 120, które odnosi się do słońca i ziemi. Podzieliwszy te równania przez siebie, znajdziemy:

$$\frac{M+m}{M_1+m_1} = \frac{T_1^2 a^3}{T^2 a_1^3},$$

skąd $M_1 = 317$ mas ziemi.

234) Przyjąwszy: masa słońca $= 331640$ mas ziemi; masa księżyca $= {}^1/_{80}$ masy ziemi; prom. słońca $= 108{\cdot}7$ prom. ziemi; prom. księżyca $= 0{\cdot}273$ prom. ziemi, obliczyć natężenie ciężkości na biegunach słońca i księżyca

Odp. $\dfrac{983 \times 331640}{(107{\cdot}7)^2} = 27000\ cm/sek^2$; $\dfrac{983}{80 \times (0{\cdot}273)^2} = 165\ cm/sek^2$.

235) Obliczyć przyciąganie kuli żelaznej ($d = 7{\cdot}86$), o średnicy 10 m, względem masy 1 kg, znajdującej się tuż obok powierzchni kuli.
Odp. $6{\cdot}66 \times 10^{-8} \times \frac{4}{3} \times 500 \times 3{\cdot}14 \times 7{\cdot}86 \times 1000 = 1{\cdot}09$ *dyn.*

236) Dowieść, że we wnętrzu kuli jednolitej natężenie ciężkości g jest proporcyonalne do odległości od środka.

Odp. Promień kuli $= R$, gęstość $= d$. Na cząstkę znajdującą się w odległości r od środka, działa tylko jądro kuliste o promieniu r (ust. 122); zatem $g = C \times \frac{4}{3}\,\dfrac{r^3 \pi d}{r^2} =$ stała $\times\, r$.

237) Obliczyć g dla Lwowa ($\varphi = 49^0 49' 52''$; $z = 320$ m).

Odp. 980·97.

238) Jaką wartość posiada potencyał grawitacyi na powierzchni kuli jednolitej o masie 1000 gr i promieniu 10 cm?

Odp. $C \times 100$ *erg/gr.*

239) Znaleźć promienie powierzchni poziomu otaczających tę kulę, na których potencyał posiada wartości 80 C, 60 C, 40 C i 20 C.

Odp. 12·5; 16·7; 25·50 *cm.*

240) Jakiej pracy należałoby użyć celem podwojenia odległości księżyca od ziemi?

Odp. M masa ziemi, $m = \dfrac{M}{80}$ masa księżyca, $r = 60\ R$ odległość ich; $L = C\dfrac{Mm}{r} - C\dfrac{Mm}{2r} = \frac{1}{2}\,C\dfrac{Mm}{r}$; $C = \dfrac{gR^2}{M}$, zatem:

$$L = \frac{gRm}{2 \times 80 \times 60} = \frac{980 \times 637 \times 6 \times 10^{33}}{2 \times 80 \times 60} \text{ ergów}$$

$$= \frac{637 \times 6 \times 10^{28}}{2 \times 80 \times 60}\ kgm.$$

241) Obliczyć wartość potencyału grawitacyi na powierzchni ziemi.

Odp. $C\frac{M}{R} = gR = 980 \times 637 \times 10^6 = 624 \times 10^9\ erg/gr\ (cm^2/sek^2)$ $= 6370\ kgm/gr.$

242) Obliczyć energię kinetyczną, jakiej nabywa kamień meteoryczny ważący 5 *kg*, spadając na ziemię z niezmiernie wielkiej odległości, tudzież ilość ciepła powstałego wskutek uderzenia o ziemię?

Odp. Energia $= 5000 \times 6370$ *kgm*; ciepło $= \frac{5000 \times 6370}{527}$ $= 75000$ kaloryi.

243) Z jaką prędkością należałoby wyrzucić z ziemi ciało jakiekolwiek (masa *m*), aby ono nie spadło napowrót na ziemię?

Odp. $\frac{1}{2} mv^2 = m \times 624 \times 10^9$ ergów, stąd $v = 11170\ m/sek$ (co najmniej).

244) Ile pracy wymagałoby podniesienie ciała ważącego 10 *kg* na wysokość $z = 60000\ m$ nad ziemię?

Odp. $L = mgR \left(1 - \frac{R}{R+z}\right) = mgz \left(1 - \frac{z}{R} + \ldots\right)$ $= 600\,000 \times 0{\cdot}9906\ kgm.$

CZĘŚĆ DRUGA.

DYNAMICZNE WŁASNOŚCI MATERYI.

ROZDZIAŁ IX.

Ciśnienie i odkształcenie.

126. Określenie własności dynamicznych. Oprócz ruchu, którego badanie było przedmiotem fizyki ogólnej, działanie sił na materyę wywołuje także pewne zmiany wewnętrzne jej ustroju, polegające na przesunięciu cząstek z pierwotnych względem siebie położeń. Zmiany te nazywamy w ogólności odkształceniami. Odkształcenie materyi wywołują siły wewnętrzne, działające pomiędzy sąsiedniemi częściami, bądź to trwale, bądź przemijająco, zwane ciśnieniami, albo napięciami wewnętrznemi.

Objawy te zależą, co do stopnia i jakości, od rodzaju materyi poddanej działaniu sił; tak n. p. belka żelazna, obciążona, ugina się, a po zdjęciu ciężaru wraca mocą sił wewnętrznych do pierwotnej postaci; drewniana w podobnych warunkach może się złamać; ołowiana ugnie się trwale i t. p.

Zachowanie się ciał wobec sił działających na nie zależy od tych własności materyi, które nazwiemy dynamicznemi, a których wykład będzie przedmiotem niniejszego działu fizyki.

127. Stany skupienia materyi. W fizyce ogólnej opisywane były te własności materyi, które są wspólne wszelkim ciałom; w niniejszym dziale natomiast wypada nam wyłożyć pewien szereg własności, które nie są u wszystkich ciał jednakowe, lecz zależą od rodzaju materyi. W celu uproszczenia wykładu podzielimy ciała na pewne szeregi; zamiast opisywać oddzielnie żelazo, miedź, kamienie i t. p. wyłożymy wspólne tym ciałom własności, zaliczając je do szeregu ciał stałych; woda, alkohol, nafta i inne o pokrewnych własnościach dynamicznych utworzą szereg cieczy; powietrze, para wodna, wodór i t. d. szereg gazów i par. Głębokie różnice, jakie dostrzegamy na pierwszy rzut oka między ciałami należącemi do tych szeregów, usprawiedliwiają ostatecznie ten podział; powiadamy, że *ciała, należące do jednego szeregu, znajdują się w tym samym stanie skupienia*. Zwyczajnie odróżnia się te trzy, wybitnie różniące się stany skupienia: stały, ciekły i gazowy; są jednak stany przejściowe pomiędzy stałym a ciekłym, tudzież pomiędzy ciekłym a gazowym, tak, iż można ułożyć szereg ciał, poczynający się od ciała stałego, n. p. od stali a przechodzący nieznacznem stopniowaniem do gazowego, n. p. do wodoru. Ciecze i gazy określa się często wspólnem mianem płynów. Różnice pomiędzy rozmaitymi stanami skupienia można w przybliżeniu ocenić za pomocą dotyku, t. j. za pomocą zmysłu siły; dotykając się n. p. kamienia i wosku, oceniamy natężenie sił wewnętrznych, działających między częściami tych ciał, gdy zewnętrzny nacisk zmienia wzajemne ich położenia. Celem umiejętnego określenia stanów skupienia należy poznać możliwe rodzaje odkształceń, tudzież rodzaj i natężenie ciśnień wewnętrznych, właściwych różnym rodzajom materyi.

128. Odkształcenie. Zdolność odkształcania się jest powszechną własnością materyi; nie znamy ciał, nawet pomiędzy najbardziej stałemi, któreby pod wpływem sił zewnętrznych nie zmieniały bodaj odrobinę postaci swej, rozmiarów, objętości. Zależnie od rodzaju zewnętrznego działania, odkształcenia mogą być rozmaite: zgięcie, zgniecenie, skręcenie i t. p. Okażemy jednak, że, mimo tę różnorodność, wszelkie odkształcenia można sprowadzić do dwu rodzajów głównych. Jeżeli zwrócimy uwagę na jakąbądź małą cząstkę we wnętrzu ciała, natenczas odkształcenie albo zmienia gęstość tej cząstki, albo jej nie zmienia; w pierwszym przypadku objętość uważanej cząstki zwiększyła się lub zmniejszyła, w drugim nie zmieniła się, odkształceniu uległa przeto tylko postać cząstki. Wszelkie odkształcenie jest zatem bądź odkształceniem objętości (zgęszczeniem lub rozrzedzeniem), bądź też odkształceniem postaci, albo nakoniec składa się z tych dwu odkształceń, t. j. polega na odkształceniu postaci, któremu towarzyszy zgęszczenie lub rozrzedzenie materyi. Możemy więc ograniczyć się do opisu pierwszych dwu głównych rodzajów odkształcenia. Wielkość odkształcenia określamy zawsze liczbą stosunkową, niemianowaną; miarą odkształcenia jest stosunek zmiany rozmiarów lub objętości, do rozmiarów lub objętości pierwotnej, nieodkształconej.

129. Rozszerzenie lub zgęszczenie jednostajne[1]. Odkształcenie samej objętości zdarza się wtenczas, gdy objętość ciała powiększa się lub zmniejsza, a postać zostaje podobna do pierwotnej. Odkształcenie tego rodzaju zowiemy rozszerzeniem lub zgęszczeniem (ściśnieniem, skurczeniem); ono jest jednostajne, jeżeli wszystkie części danego ciała rozszerzają się (albo zgęszczają) w tym samym stosunku.

Ciało mające n. p. postać kuli, rozszerzone lub zgęszczone jednostajnie, zamienia się na kulę większą albo mniejszą; podobnie sześcian zostaje sześcianem, stożek stożkiem i t. p. Jeżeli to odkształcenie rozciąga się jednostajnie na wszystkie części ciała, wtenczas nietylko cały sześcian rozszerza się, lecz także każda cząstka wewnętrzna, mająca pierwotnie postać sześcienną, zachowuje tę postać po odkształceniu, a zmienia się tylko jej objętość, w tym samym stosunku jak objętość całego ciała.

Stopień rozszerzenia jednostajnego określa się w następujący sposób: jeżeli pierwotna objętość ciała jest V, a po odkształceniu V', wtenczas różnica $V' - V$ równa się zmianie objętości (znak jej jest albo $+$ albo $-$, zależnie od tego, czy mamy rozszerzenie, czy zgęszczenie). Miarę odkształcenia uważanego, którą oznaczać będziemy przez θ, daje stosunek zmiany objętości do objętości pierwotnej,

$$(1) \qquad \theta = \frac{V' - V}{V},$$

zwany krótko »rozszerzeniem« albo »zgęszczeniem«.

Zmianie objętości towarzyszy oczywiście zmiana rozmiarów ciała, którą obliczymy jak następuje. Dajmy na to, że ciało posiada

[1] Przymiotnik »jednostajny« służy do określenia własności, która we wszystkich punktach ciała jest jednakowa; przymiotnik »stały« określa własność która z biegiem czasu nie ulega zmianie. N. p. ciało jednostajnie ogrzane: które posiada we wszystkich punktach jednakową temperaturę; stałą temperaturę natomiast posiada ciało, które się ani ogrzewa ani ostyga.

postać sześcianu, którego krawędzi mają pierwotnie długość l; mamy zatem: $V = l^3$. Po odkształceniu objętość wynosi podług (1):

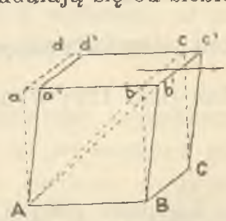
$$V' = V(1+\theta), \text{ czyli } V' = l^3(1+\theta).$$

Jeżeli przez l' oznaczymy nową długość krawędzi, wtenczas będzie: $l' = l\sqrt[3]{1+\theta}$. W przypadkach małych odkształceń, gdy θ jest małym ułamkiem, można napisać w przybliżeniu: $\sqrt[3]{1+\theta} = 1 + \frac{\theta}{3}$, przyczem opuszcza się drugą i wyższe potęgi tego ułamka, jako nader małe. Wtenczas będzie $l' = l\left(1+\frac{\theta}{3}\right)$, albo, kładąc: $\frac{\theta}{3} = \lambda$:

$$l' = l(1+\lambda), \text{ lub } \lambda = \frac{l'-l}{l}.$$

Stosunek (λ) zmiany pewnego rozmiaru ciała do pierwotnej długości tegoż samego rozmiaru zowiemy wydłużeniem. Przy jednostajnem a małem rozszerzeniu objętości wydłużenie rozmiarów równa się trzeciej części tegoż rozszerzenia; wartość jego w tym przypadku jest oczywiście jednakowa na wszystkich liniach w ciele uważanem.

130. Skręcenie proste. Podczas gdy przy odkształceniu objętości wszystkie cząstki ciała zbliżają się, albo oddalają się od siebie równomiernie, przy odkształceniu postaci przesuwają się one obok siebie w taki sposób, żeby objętość ciała nie zmieniła się. Ażeby zrozumieć, jakiej zmianie ulega przytem ustrój wewnętrzny ciała, weźmy pod uwagę cząstkę materyi we wnętrzu ciała, mającą pierwotnie postać sześcienną (ryc. 102) *abcd ABCD*. Najprostszy sposób odkształcenia takiej cząstki bez zmiany objętości, polega na wydłużeniu jej w jakimkolwiek kierunku, w połączeniu ze zwężeniem w kierunku poprzecznym, podczas gdy rozmiary jej w kierunku trzecim, prostopadłym do tamtych obu, zostają niezmienione. Aby to uskutecznić, skręćmy



Ryc. 102.

sześcian tak, żeby podstawa $ABCD$ pozostała w położeniu pierwotnem, podczas gdy płaszczyzna górna $abcd$ przesuwa się do $a'b'c'd'$ w kierunku równoległym n. p. do krawędzi ab.

Każda warstwa równoległa do podstawy przesuwa się podobnież w kierunku ab, o odstęp proporcyonalny do swej odległości od podstawy; wskutek tego sześcian zmienia się na równoległościan. Jeżeli to odkształcenie jest bardzo małe, wówczas wysokość równoległościanu będzie niemal zupełnie równa pierwotnej wysokości sześcianu, objętości ich będą zatem jednakowe. Jako miarę tego odkształcenia, które nazwiemy **skręceniem prostem**, przyjmuje się stosunek wzajemnego przesunięcia się dwu warstw równoległych do ich odległości, a więc n. p. aa' do Aa. Oznaczywszy więc wartość skręcenia przez α, mamy:

$$\alpha = \frac{aa'}{Aa}.$$

Ilekroć odkształcenie jest małe, możemy linię aa' uważać jako łuk zakreślony promieniem Aa ze środka A. Stosunek łuku do promienia jest miarą (łukową) kąta; widzimy więc, że stosunek α, przyjęty za miarę skręcenia, równa się kątowi aAa', o który kąty proste sześcianu zmieniły się przez odkształcenie.

Wskutek skręcenia prostego materya ciała wydłuża się w kierunku przekątnej Ab', a jednocześnie zwęża się w kierunku przekątnej Ba'. Jeżeli długość boków sześcianu oznaczymy przez l, natenczas długość przekątnej przed odkształceniem wynosiła: $Ab = l\sqrt{2}$; po odkształceniu długość tej samej linii będzie $Ab' = \sqrt{2l^2 - 2l^2 \cos(90 + \alpha)} = l\sqrt{2}\sqrt{1 + \sin\alpha}$, albo wreszcie jeżeli odkształcenie jest małe: $Ab' = l\sqrt{2}\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)$[1]. Wydłużenie tej linii (ust. 129) wynosi więc:

$$\lambda = \frac{\alpha}{2};$$

w kierunku drugiej przekątnej otrzymamy podobne zwężenie, czyli wydłużenie ujemne:

$$\lambda = -\frac{\alpha}{2}.$$

---

[1]) Według znanych wzorów przybliżonych: $\mathrm{Sin}\, x = x$; $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2}$, gdy x jest bardzo małym ułamkiem jedności.

Wnosimy ztąd, że wydłużenie ciała w pewnym kierunku w stosunku $1 : 1 + \lambda$, połączone z takiem samem zwężeniem w kierunku prostopadłym do pierwszego, podczas, gdy trzeci kierunek, prostopadły do tamtych, pozostaje niezmieniony, jest równoważne skręceniu prostemu o kąt α (w mierze łukowej), równy podwójnemu wydłużeniu, t. j. $\alpha = 2\lambda$.

Jeżeli poddamy ciało jakiemubądź odkształceniu, natenczas odkształcenie każdej cząstki we wnętrzu ciała można złożyć z tych dwu głównych rodzajów odkształcenia, których własności wyłożyliśmy w ostatnich dwu ustępach.

Zadania.

245) Jakiego rozszerzenia doznaje ciało, mające objętość 85 cm^3, jeżeli objętość zwiększa się do 91 cm^3? *Odp.* $\theta = 0{\cdot}0706$.

246) Ile wynosi gęstość (d') ciała, które doznało zgęszczenia θ, jeżeli przed odkształceniem gęstość była d. *Odp.* $d' = \frac{d}{1-\theta}$.

247) Ile wynosi przyrost gęstości, jeżeli θ jest bardzo małe? *Odp.* θd.

248) Przez jednostajne wydłużenie w jednym kierunku i takież zwężenie w kierunku prostopadłym, zamieniono kulę o promieniu 100 na elipsoidę trójosiową, o półosiach głównych: 102, 98, 100; ile wynosi skręcenie materyału w mierze łukowej, tudzież stopniowej?
Odp. $\alpha = 0{\cdot}04$; $2^0 17'$.

249) Kawałek płótna wydłużono w kierunku przekątnej oczek tkaniny w stosunku 1000 : 1020 i zwężono w takim samym stosunku w kierunku drugiej przekątnej; o ile zmieniają się przytem kąty (pierwotnie proste) pomiędzy nitkami? *Odp.* $2^0 17'$.

131. Ciśnienie. Ciała odkształcają się pod wpływem sił zewnętrznych, działających bądź to na całą ich masę (jak n. p. ciężkość), bądź na powierzchnię zewnętrzną.

Siły działające na powierzchnię ciał nazywamy ciśnieniami. Do sił tego rodzaju należy n. p. ciśnienie pary na wewnętrzną powierzchnię kotła parowego, ciśnienie powietrza, ciśnienie wody na dno zbiornika i t. p. Ciśnienie jest to więc jakoby siła rozpostarta na pewnej powierzchni.

Ciśnienie nazywamy j e d n o s t a j n e m, jeżeli działanie jego jest we wszystkich częściach uważanej powierzchni jednakowe; w przeciwnym razie jest ono n i e j e d n o s t a j n e. Tak n. p. warstwa piasku, jednakowej wszędzie grubości, wywiera na podstawę ciśnienie jednostajne.

Ciśnienie jednostajne, działające na pewną ograniczoną płaszczyznę, można zawsze zrównoważyć jedną siłą, podpierającą tę płaszczyznę ze strony przeciwnej. Natężenie tej siły jest miarą t. zw. ciśnienia całkowitego, albo parcia, działającego na całą płaszczyznę. Natężeniem ciśnienia (albo krótko wprost »ciśnieniem«) nazywamy natomiast stosunek ciśnienia całkowitego, albo parcia, do wielkości pola, na które ono działa. Im mniejsze jest to pole, tem bardziej skupione jest całkowite działanie, tem większej sile podlega każda jednostka powierzchni. Tak n. p. dwa sztywne krążki (ryc. 103) o różnych polach, ale obciążone jednakowymi ciężarami, wywierają na podstawę jednakowe parcia, lecz pod mniejszym krążkiem to ciśnienie całkowite jest bardziej skupione; ciśnienie na powierzchni mniejszej jest większe.

Miarą ciśnienia jednostajnego jest stosunek całkowitego parcia do pola powierzchni uciskanej, albo inaczej: *miarą ciśnienia jest siła*

Ryc. 103.

przypadająca na jednostkę powierzchni. Oznaczywszy całkowite parcie przez P, natężenie ciśnienia przez p, pole przez S, możemy to wyrazić równaniem: $p = \frac{P}{S}$. Tak n. p. jeżeli w zbiorniku mającym poziome dno, którego pole wynosi 1500 cm^2, znajduje się warstwa wody o wysokości 20 cm, natenczas całkowity ciężar wody będzie: $P = 1500 \times 20 = 30000$ gr, jest to parcie całkowite. Każdy centymetr kwadratowy dna podlega natomiast sile 20 gr. Ciśnienie na dnie będzie więc:

$$p = \frac{30\,000\ gr}{1500\ cm^2},\ \text{czyli}\ p = 20\ gr/cm^2.$$

Ponieważ jest ono jednostajne, przeto możemy natężenie jego określić również wyrażeniem 40 gr na 2 cm^2; albo 20000 gr na 1000 cm^2, czyli 20 kg na $^1/_{10}$ m^2, albo 200 kg/m^2 i t. p.

Jeżeli ciśnienie nie jest jednostajne, wtenczas należy określić natężenie jego w każdym punkcie powierzchni z osobna. Około obranego punktu zakreślamy pole tak małe, żeby w zakresie jego można było uważać ciśnienie za jednostajne; miarą ciśnienia, w uważanem miejscu, będzie wówczas stosunek całkowitej siły działającej na to pole, do jego wielkości.

Z tych uwag wynika, że jednostka ciśnienia, a jednostka siły, są to dwie wielkości różne, których nie należy mieszać z sobą. *Jednostkę ciśnienia stanowi jednostka siły, działająca na jednostkę pola.*

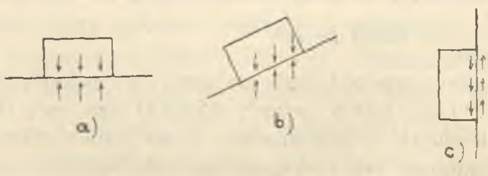
Miary. W bezwzględnym układzie miar jednostką ciśnienia jest *dyna na centymetr kwadratowy*, t. j. $gr.\ cm/sek^2.$ *na* cm^2, albo $gr/cm\ sek^2$.

W układzie ciężarowym: *Ciężar grama na* cm^2, co oznaczamy krótko przez gr/cm^2; niekiedy także: ciężar kilograma ma metr kwadratowy $= 1000\ gr$ na $10000\ cm^2$. Pomiędzy rozmaitemi miarami ciśnienia zachodzą następujące stosunki:

$$1\ kg/m^2 = {}^1/_{10}\ gr/cm^2,$$
$$1\ gr/cm^2 = 981\ dyn/cm^2,$$
$$1\ kg/m^2 = 98{\cdot}1\ dyn/cm^2.$$

W nauce o gazach poznamy inną jeszcze, często używaną jednostkę ciśnienia, która nazywa się a t m o s f e r ą, a wynosi w przybliżeniu $1033{\cdot}3\ gr/cm^2$, albo $1013250\ dyn/cm^2$ (ust. 160). Technicy nazywają często atmosferą $1\ kg/cm^2$.

Kierunek ciśnienia. Ciśnienie może działać na powierzchnię bądź w kierunku prostopadłym, bądź ukośnie, a nawet stycznie. Je-



Ryc. 104.

żeli n. p. do płaskiej podstawy przykleimy płaską, ciężką kłodę (ryc. 104), natenczas ciśnienie jej na podstawę zmieniać będzie kierunek, ilekroć zmienimy pochylenie podstawy: w położeniu *a)* jest ono prostopadłe, w *b)* ukośne, w *c)* styczne względem podstawy.

Podstawa oddziaływa oczywiście na kłodę w kierunku przeciwnym. Ciśnienia ukośne lub styczne, mierzą się w taki sam sposób i temiż miarami jak prostopadłe.

Jeżeli ciśnienie jest skierowane nie ku powierzchni, lecz od niej na zewnątrz, wtenczas nazywa się napięciem; jest to to samo, co ciśnienie ujemne.

132. Ciśnienia i napięcia wewnętrzne. We wnętrzu ciał odkształconych albo odkształcających się powstają w ogólności siły wewnętrzne, usiłujące przeszkodzić zmianie wzajemnego położenia cząstek. Każda cząstka, pomyślana we wnętrzu ciała, jest uciskana, albo ciągniona, przez cząstki sąsiednie; są to działania, wywierane na powierzchnię cząstki, a zatem ciśnienia lub napięcia. One nazywają się ciśnieniami wewnętrznemi, a mierzą się tak samo, jak ciśnienia zewnętrzne. Cisnąc n. p. na górny koniec laski, opartej dolnym końcem o ziemię, ściskamy zarazem wszystkie cząstki, z których laska się składa. Ciśnienie ręki nie przenosi się na ziemię bezpośrednio, lecz za pośrednictwem wszystkich cząstek laski. Jeżeli poprowadzimy w myśli, gdziekolwiek, poprzeczny przekrój, natenczas cząstki leżące po obu stronach przekroju cisną się wzajemnie; to działanie stanowi właśnie to, co nazwaliśmy ciśnieniem wewnętrznem na uważany przekrój. W przekrojach sznurka, albo drutu wyprężonego działają podobnie wewnętrzne napięcia.

Zadania.

250) Na oba końce walca, o promieniu 0·05 *m*, działają siły wynoszące po 50 *kg* w kierunku osi na zewnątrz, t. j. siły usiłujące go rozerwać; obliczyć napięcie w którymkolwiek przekroju, prostopadłym do osi. *Odp.* $\frac{50}{(0{\cdot}05)^2\pi} = 6366\ kg/m^2$.

251) Obliczyć wartość tego napięcia w gr/cm^2, w $gr/cm\ sek^2$ i w atmosferach. *Odp.* 636·6 gr/cm^2; 624500 dyn/cm^2; 0·62 *atm.*

252) Na kwadrat o powierzchni 1 m^2 działa ciśnienie niejednostajne; wzdłuż jednego boku wynosi ono 0, wzdłuż naprzeciwległego 100 gr/cm^2; w każdej linii równoległej do tych boków jest ono jednostajne a rośnie proporcyonalnie do odległości od pierwszego boku. Jaka siła powinna działać na kwadrat ze strony przeciwnej, aby to ciśnienie zrównoważyć.

Odp. 500 *kg.*; t. j. równa ciężarowi połowy sześcianu ważącego $100 \,.\, (100)^2$ *gr*; punkt przyłożenia jej, w odległości $33^1/_3$ *cm* od boku silniej naciskanego.

133. Sprężystość. Sprężystością nazywamy tę własność materyi, na mocy której ciała uwalniają się same od odkształcenia, skoro usuniemy siły zewnętrzne, które odkształcenie sprawiły. Jako przykłady ciał sprężystych wymienimy: kauczuk, który nawet po znacznem wydłużeniu ściąga się do pierwotnej długości; sprężyny stalowe różnej postaci i w rozmaity sposób odkształcane; powietrze, które, po zgęszczeniu, napowrót się rozszerza i t. p. Znamieniem ciał sprężystych jest i to, że nie zdołają one bez zewnętrznej pomocy utrzymać się trwale w stanie odkształconym, lecz muszą być w tym stanie trzymane przez siły zewnętrzne. Własności tej nie posiadają ciała niesprężyste; kawałek wosku miękkiego można ugnieść w jakikolwiek kształt, a w tym odkształconym stanie utrzyma się on bez zewnętrznej pomocy. S p r ę ż y s t o ś ć ciała nazywamy doskonałą, jeżeli do utrzymania pewnego odkształcenia potrzeba zawsze tej samej siły zewnętrznej, bez względu na to, ile razy ciało w ten sposób odkształcamy i chociażbyśmy je między jednym a drugim razem poddawali jakimbądź innym odkształceniom. Sprężystość jest zatem doskonała, jeżeli siły zewnętrzne, potrzebne do utrzymania ciała w równowadze (a przeto także i siły wewnętrzne równoważące tamte), zależą tylko od każdoczesnego odkształcenia, a nie od sposobu, jakim to odkształcenie zostało wytworzone. Tak n. p. do konstrukcyi dynamometru (ust. 96), albo wagi sprężynowej, należałoby używać sprężyny doskonale sprężystej; wtenczas bowiem, pod wpływem pewnego obciążenia, wskazówka dynamometru wskazywać będzie zawsze na tę samą liczbę; w przeciwnym razie siła i odkształcenie nie byłyby niezmiennie od siebie zależne i nie moglibyśmy polegać na wskazaniach dynamometru.

Stosownie do dwu głównych rodzajów odkształcenia odróżniać będziemy także dwa główne rodzaje sprężystości: s p r ę ż y s t o ś ć o b j ę t o ś c i i s p r ę ż y s t o ś ć p o s t a c i. Pierwsza objawia się, gdy ciało ściskamy jednostajnie ze wszystkich stron (powietrze, wodę, korek, stal i t. p., druga, gdy je skręcamy). Przy wszelkich odkształceniach złożonych wchodzą jednocześnie w grę oba rodzaje sprężystości.

134. Prawa Hooke'a[1]**).** Własności, po których poznajemy ciała sprężyste — mianowicie, zdolność do wywierania siły, gdy są

---

[1]) Czytaj Huka.

odkształcone, i zdolność do prostowania się, gdy je uwolnimy od zewnętrznego przymusu — tłumaczą się tem, że między cząstkami ciała sprężystego, których wzajemne położenia zostały przez odkształcenie zmienione, działają siły wewnętrzne, usiłujące je sprowadzić do tych położeń, jakie są im właściwe w ciele nieodkształconem. Razem z odkształceniem znikają i te siły; im większe odkształcenie, tem większe są siły wewnętrzne. Siły te uważać należy jako ciśnienia wewnętrzne (ust. 132), wywierane na powierzchnię każdej części ciała przez części otaczające. Przy bardzo znacznych odkształceniach siły te mogą stać się tak dużemi, że dwie sąsiednie części ciała zostaną od siebie oderwane, jak to widzimy n. p. na sznurach, łańcuchach i t. p., nadmiernie napiętych.

W zakresie odkształceń tak małych, iżby sprężystość ciał można uważać jako doskonałą, doświadczenie wykazało bardzo prostą zależność ciśnień wewnętrznych od odkształceń wszelkiego rodzaju, mianowicie: 1) *ciśnienie wzrasta proporcyonalnie do wielkości odkształcenia*, albo: *stosunek ciśnienia do odkształcenia w tem samem ciele sprężystem jest wielkością stałą.* 2) *Odkształcenia sprężyste jednakowej wielkości lecz przeciwnych kierunków wzbudzają ciśnienia jednakowe, lecz działające w kierunkach przeciwnych.* Tak n. p. zgięcie sprężyny na prawo lub na lewo wymaga tej samej siły; podobnież wydłużenie lub skrócenie, rozszerzenie i zgęszczenie i t. p.

Prawa te znalazł Hooke (r. 1675) drogą doświadczalną i przekonał się, że one stosują się do wszelkiego rodzaju odkształceń ciał sprężystych, byle zmiana wzajemnych położeń części ciała była mała.

Sznurek kauczukowy, albo stalowa sprężyna spiralna, która pod obciążeniem $P\,gr$ przedłuża się o 1 cm, przedłuży się pod działaniem sił $2P$, $3P$,... o 2, 3 cm i t. d. Przedłużenia sprężyn z cienkiego drutu, wygięcia cienkich płyt i t. d. mogą być nawet znaczne, a mimo to prawo Hooke'a stosuje się do nich, albowiem odkształcenie każdej cząstki z osobna, n. p. odgięcie małego kawałka sprężyny, jest bardzo małe, a tylko wskutek sumowania się tych małych odkształceń, całe ciało zmienia znacznie swą postać.

Stały stosunek między ciśnieniem wywołanem przez odkształcenie sprężyste, a wielkością tego odkształcenia, nazywa się spółczynnikiem sprężystości uważanego rodzaju odkształcenia, a więc:

$$\frac{\text{ciśnienie}}{\text{odkształcenie}} = \text{spółczynnik sprężystości.}$$

Oprócz rodzaju odkształcenia, spółczynniki sprężystości zależą tylko od rodzaju materyi sprężystej, od jej temperatury i innych własności fizycznych.

W następujących ustępach określimy dwa główne spółczynniki, właściwe odkształceniu objętości i postaci.

135. Spółczynnik ściśliwości (spółczynnik sprężystości objętościowej). Pod wpływem jednostajnego zewnętrznego ciśnienia, działającego w kierunku prostopadłym na całą powierzchnię, ciała ulegają zgęszczeniu, objętość ich zmniejsza się. Postać pozostaje podobną do pierwotnej — o ile są jednolite i we wszystkich kierunkach jednakowo ściśliwe (szkło, metale lane, płyny). Odkształcenie to dotyczy wyłącznie objętości; jego miarą jest: $\theta = \frac{V' - V}{V}$, gdzie V oznacza objętość pierwotną, V' zmienioną wskutek ciśnienia (ust. 129).

Niech p oznacza natężenie ciśnienia, działającego na powierzchnię (obliczone, jak zawsze, na jednostkę pola). Według prawa Hooke'a ciśnienie to jest proporcyonalne do odkształcenia, możemy więc napisać:

$$p = \sigma . \theta, \text{ albo } V' - V = \frac{pV}{\sigma}.$$

σ oznacza tu spółczynnik proporcyonalności; nazywa się on spółczynnikiem ściśliwości albo sprężystości objętościowej; wartość jego zależy od rodzaju materyi poddanej ciśnieniu. Z ostatniego wzoru wypada, że zmiana objętości ciała ściskanego jest proporcyonalna do ciśnienia i do objętości pierwotnej, odwrotnie proporcyonalna do spółczynnika ściśliwości; im większe σ w jakim materyale, tem trudniej on jest ściśliwy.

Ciało zgęszczone w całości, zgęszczone jest jednostajnie we wszystkich swych cząstkach, w tym samym stosunku θ, jak całość. Każda cząstka wewnętrzna uciskana jest przez cząstki otaczające ją tem samem ciśnieniem p, jakie działa na zewnętrzną powierzchnię.

Spółczynnik ściśliwości, jak wogóle wszelkie spółczynniki sprężystości, jest wielkością tego samego rodzaju jak ciśnienie; wyraża się pewną liczbą jednostek siły na jednostkę powierzchni (n. p.

gr/cm^2, albo *dyn* na cm^2). Okazuje to powyższy wzór: $\sigma = \frac{p}{\theta}$, gdzie θ jest stosunkiem zmiany objętości do objętości pierwotnej, a więc liczbą niemianowaną; wskutek tego wymiar σ jest ten sam jak wymiar ciśnienia p.

Odwrotność spółczynnika ściśliwości $\frac{1}{\sigma} = \frac{\theta}{p} = \frac{V' - V}{pV}$ nazywa się ściśliwością danej materyi. Miarą jej jest odkształcenie pod wpływem jednostki ciśnienia, n. p. ułamek objętości pierwotnej na atmosferę lub t. p.

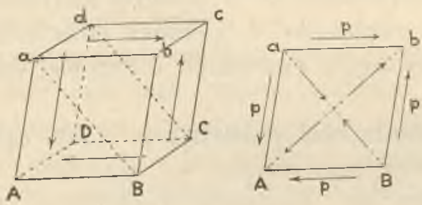
136. Spółczynnik sprężystości postaci. (Sztywność). Sprężystość objętościową okazuje wszelka materya, sztywność, t. j. sprężystość postaci właściwa jest tylko ciałom stałym. Ten rodzaj sprężystości określa się jak następuje. Wyobraźmy sobie sześcian wycięty z danego materyału (ryc. 102), przymocowany (n. p. przyklejony) podstawą $ABCD$ do stołu; na górną płaszczyznę $abcd$ niechaj działa ciśnienie styczne w kierunku równoległym do jednej pary krawędzi, dajmy na to, do ab i cd. Ciśnienie tego rodzaju wywoła widocznie skręcenie proste. Oznaczmy przez p natężenie tego ciśnienia (na jednostkę powierzchni), przez α skręcenie, które ono sprawia (kąt aAa' w mierze łukowej); według prawa Hooke'a te dwie wielkości będą znowu względem siebie proporcyonalne, a więc:

$$p = \tau \, . \, \alpha.$$

Spółczynnik proporcyonalności τ, podobnie jak σ, posiada pewną wartość stałą, inną w każdym rodzaju materyi; nazywa się on spółczynnikiem sprężystości postaci albo sztywnością uważanego materyału.

Ciała, w których τ jest wielkie, wymagają, dla pewnej zmiany postaci, wielkiego zewnętrznego ciśnienia; ciała takie mają znaczną sztywność (n. p. stal); małe τ oznacza, że ciało daje się łatwo skręcać, że jest wiotkie (n. p. galareta).

W ust. 130 okazaliśmy, że skręcenie proste o kąt α jest równoważne wydłużeniu $\lambda = \frac{\alpha}{2}$ w kierunku przekątnej Ab (ryc. 102) w połączeniu ze zwężeniem tejże wartości bezwzględnej w kierunku aB, prostopadłym do poprzedzającego. Jest więc rzeczą jasną, że zamiast powyższego ciśnienia stycznego można podstawić ciśnienie prostopadłe w kierunku przekątnej, w połączeniu z równem napięciem w kierunku drugiej przekątnej. Ażeby znaleźć wartość tych ciśnień i napięć, wyobraźmy sobie sześcienną część materyi (ryc. 105), we wnętrzu każdego ciała, któremu nadano w całości skręcenie proste. Jak okazuje ryc. 105 wszystkie cztery ściany boczne doznawać będą od otaczających cząstek ciśnień stycznych, tego samego natężenia p. Można bowiem AB uważać za podstawę, przyczem na ab działa ciśnienie styczne p, zaś na AB reakcya tej samej wielkości; ale można Bb uważać za podstawę, wówczas ciśnienie działające na Aa będzie siłą skręcającą. Siły działające na ściany ab i Bb, ciągną materyę w jednym kierunku, siły aA i BA w przeciwnym; one usiłują widocznie rozerwać uważaną część ciała w płaszczyznie przekątnej $aBCd$. Płaszczyzna ta podlega więc sile prostopadłej do niej, a równającej się wypadkowej sił działających na



Ryc. 105.

ab i Bb; na tę samą płaszczyznę działa w stronę przeciwną wypadkowa sił działających na AB i aA, równa tamtej. Wszystkie siły działające na boczne ściany równe są pl^2, gdzie l oznacza długość krawędzi sześcianu. Wypadkowa, działająca na przekątną płaszczyznę $aBCd$, wynosi przeto $pl^2\sqrt{2}$ (gdyż przy małem odkształceniu kąty między krawędziami sześcianu różnią się tak mało od 90^0, iż można przyjąć, że przekątna wynosi $l\sqrt{2}$). Ponieważ pole tej płaszczyzny $aBCd = l^2\sqrt{2}$, przeto ciśnienie, w tym razie ujemne, czyli ciągnienie lub napięcie, które na nią działa, obliczone na jednostkę powierzchni, wynosi: $\frac{pl^2\sqrt{2}}{l^2\sqrt{2}} = p$; wartość tego ciśnienia jest więc taka sama, jak ciśnień na ściany boczne.

Dalej widzimy, że cząstki materyi, leżące po obu stronach drugiej płaszczyzny przekątnej $AbcD$, wywierają na siebie ciśnienie prostopadłe do tej płaszczyzny; łatwo się przekonać, obliczając jak poprzednio, że wartością tego ciśnienia jest znowu p. Z tego rozważania wynika wniosek, że przez każdy punkt w ciele skręconem można położyć dwie płaszczyzny prostopadłe do siebie, mające tę własność, że w kierunku prostopadłym do jednej z nich materya jest sciskana, w kierunku prostopadłym do drugiej rozciąganą; oba te ciśnienia (dodatnie i ujemne) są równe i wynoszą $p = \tau\alpha$, w czem α oznacza miarę skręcenia.

Można także powiedzieć, że materya, poddana w pewnym kierunku ciśnieniu p, w połączeniu z napięciem p w kierunku prostopadłym do pierwszego, ulega prostemu skręceniu o kąt $\alpha = \frac{p}{\tau}$; w jednym z tych kierunków materya zwęża się w stosunku: $1 : 1 - \lambda$, albo $1 : 1 - \frac{\alpha}{2}$, w drugim wydłuża się w tym samym stosunku.

Nawzajem, wydłużenie λ w pewnym kierunku, w połączeniu z takiem samem zwężeniem w kierunku prostopadłym, budzi napięcia i ciśnienia w tychże kierunkach, o wspólnej wartości: $p = 2\lambda\tau$.

137. Określenie ciał jednolitych. Ciało nazywa się jednolitem, jeżeli materya jego posiada we wszystkich częściach jednakowe własności fizyczne i chemiczne. Dwie części, choćby najmniejsze, jednakowej postaci, położone w ciele w tym samym kierunku, po wyjęciu z ciała jednolitego, nie dałyby się odróżnić od siebie, ani za pomocą odczynników chemicznych, ani za pomocą prób fizycznych.

Ciała, nie mające jednakowych własności we wszystkich częściach, nazywają się n i e j e d n o l i t e m i.

Przykłady ciał jednolitych: woda w niewielkiem naczyniu, mająca jednostajną temperaturę, kawałek szkła starannie odlany i wolno studzony; drut równo wyciągnięty; kryształy soli kamiennej i większa część kryształów wogóle. Ciała niejednolite: granit ziarnisty, drzewo, powietrze atmosferyczne (u dołu gęste, w górze coraz rzadsze), gąbka i t. p.

138. Określenie ciał równokierunkowych (izotropowych). Ciało jednolite nazywa się równokierunkowem, jeżeli materya jego posiada we wszystkich k i e r u n k a c h jednakowe własności, t. j. jeżeli żaden kierunek w materyi nie wyróżnia się niczem od innych. Gdybyśmy wyjęli z wnętrza ciała równokierunkowego kulistą część materyi, natenczas nie możnaby rozpoznać, w jakim kierunku kula ta była w ciele położona.

Ciała, w których pewne kierunki wyróżniają się, pod jakimkolwiek względem od innych, nazywamy różnokierunkowemi (anizotropowemi).

Przykłady ciał równokierunkowych: woda i inne płyny znajdujące się w równowadze, szkło, metale niekrystaliczne i t. p. Ciała różnokierunkowe: kryształy; ciała, które stały się różnokierunkowemi wskutek odkształcenia, bądź to sprężystego, bądź trwałego; druty; wiele ciał osadowych; drzewo, posiadające w kierunku włókien inne własności, aniżeli w kierunku prostopadłym do włókien i t. p.

139. Sprężystość ciał różnokierunkowych. Ciała jednolite i równokierunkowe są we wszystkich kierunkach jednakowo ściśliwe; sprężystość postaci jest również niezależna od kierunku skręcenia. Z tego powodu własności sprężyste tych ciał zależą od dwu tylko spółczynników sprężystości σ i τ.

Ciała różnokierunkowe natomiast mają w różnych kierunkach rozmaitą ściśliwość; ciała tego rodzaju, poddane jednostajnemu ciśnieniu ze wszystkich stron, zmieniają, ogólnie mówiąc, nietylko objętość ale i postać, albowiem różne kierunki zwężają się w niejednakowym stopniu. Sztywność takich ciał bywa również różna, zależnie od kierunku skręcenia.

Zadania.

253) Sprężyna spiralna, z drutu stalowego, przedłuża się o 17 *mm*, gdy na nią działa siła 1 *gr*. Jakiej siły potrzeba do przedłużenia jej o 4 *cm*; ile energii potencyalnej mieści się wówszas w sprężynie? *Odp.* 2·35 *Gr*; 4·8 *gr cm*.

254) Objętość 1 *l* wody zmniejsza się o 47 mm^3, gdy na nią wywieramy ciśnienie 1 *atm*, ile wynosi spółczynnik ściśliwości wody? *Odp.* $\sigma = \frac{\theta}{p}$; $p = 1033{\cdot}3\ gr/cm^2$; $\theta = \frac{0{\cdot}047}{1000}$, zatem $\sigma = 22 \times 10^6\ gr/cm^2$.

225) Jaka jest ściśliwość wody? *Odp.* $\frac{1}{22 \times 10^6}\ cm^2/gr$, czyli 0·000047 na atmosferę.

256) Na sześcian kauczukowy, o krawędzi 10 *cm*, działają, prostopadle do jednej pary ścian równoległych siły rozciągające po 5·235 *kg*; prostopadle do drugiej pary, siły ściskające, tego samego natężenia. Sześcian przedłuża się w kierunku pierwszej pary sił, a zwęża się w kierunku drugiej o 0·873 *mm*. Znaleźć skręcenie, tudzież spółczynnik sprężystości postaciowej.

Odp. $\lambda = 0{\cdot}873 : 100 = 0{\cdot}00873$; $\alpha = 2\lambda = 0{\cdot}01746$ (t. j. 1^0); $p = 5235 : 100 = 52{\cdot}35$ gr/cm^2; $\tau = \frac{52{\cdot}35}{0{\cdot}01746} = 3000$ gr/cm^2.

257) Uzasadnić, dlaczego ciała sprężyste odkształcone, a następnie oswobodzone, mogą odbywać ruch drgający prosty (np. struny), odkształcając się przytem naprzemian na obie strony względem położenia równowagi.

Odp. Siły wewnętrzne przyciągają każdą cząstkę ciała odkształconego ku położeniu równowagi, bez względu na to, w którą stronę ona jest odchylona; natężenie tych sił (według prawa Hooke'a) jest proporcyonalne do odchyleń, a wskutek tego przyśpieszenia są również proporcyonalne do odchyleń — co jest znamieniem ruchu drgającego.

258) Na końcu sprężyny spiralnej (ryc. 47) zawieszono ciało ważące 200 *gr*; sprężyna przedłużyła się wskutek tego o 15 *cm*. Ciało potrącone następnie w kierunku pionowym odbywa drgania, do góry i na dół; znaleźć okres tych drgań (opuszczając małą masę sprężyny).

Odp. Gdy ciało oddali się o s *cm* z położenia równowagi, wtenczas działa na nie siła $P = \frac{200 \times s}{15}$ $gr = 13080 \times s$ *dyn*; przyśpieszenie wynosi więc: $\lambda = 65{\cdot}4 \times s$. Ponieważ w każdym ruchu drgającym prostym $\lambda = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \times s$, przeto $\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 65{\cdot}4$, skąd $T = 0{\cdot}78$ *sek.*

259) Ile wynosi energia potencyalna tej masy, gdy odchylenie jest największe, $= 10$ *cm*, tudzież energia kinetyczna w chwili przejścia przez położenie równowagi?

Odp. Energia potencyalna $= \frac{1}{2} \frac{200 \times (10)^2}{15}$ gr $cm = 654000$ *erg.*; energia kinetyczna $= \frac{1}{2} m V^2$ ($V = \frac{2a\pi}{T}$, ust. 24) $= \frac{1}{2} \times 200 \times 65{\cdot}4 \times (10)^2 = 654000$ *ergów.*

ROZDZIAŁ X.

Własności ciał stałych.

140. Określenie ciał stałych. Głównem znamieniem, odróżniającem ciała stałe od płynów, jest to, że posiadają one określoną, właściwą sobie postać. Płyny rozlewają się w naczyniach, w których je trzymamy i przyjmują zawsze postać zakreśloną kształtami naczynia; ciała stałe natomiast mają właściwe sobie kształty i usiłują je trwale zachować. Zewnętrzne siły mogą wprawdzie zmieniać postać ciała stałego. jednakże tylko w określonym stopniu, choćby nawet działanie to trwało nieograniczenie długi czas; powiadamy, że ciała stałe nie »rozpływają się« pod działaniem sił trwale przyłożonych. Siły zewnętrzne nadmiernego natężenia mogą jednak zniszczyć trwale związek cząstek; ciało stałe rozrywa się, kruszy i t. d. Dzięki tym własnościom tylko ciała stałe nadają się jako materyał do rzeźb, ornamentów, medalów, monet, narzędzi mechanicznych, t. j. do tych zastosowań, gdzie chodzi głównie o postać i o trwałe jej zachowanie. Z płynu, choćby na pozór twardego, (n. p. ze smoły), nie możnaby wyrzeźbić posągu, któryby mimo działania ciężkości i innych sił zewnętrznych, zachował trwale pierwotne kształty.

Z tego wynika, że każde ciało, posiadające trwałą sprężystość postaci (sztywność), powinno być uważane za ciało stałe; gdy zaś spółczynnik sprężystości postaciowej jest równy zeru, wtenczas ciało jest cieczą lub gazem. Ciałem stałem jest tedy ołów, jakkolwiek jest on sprężysty tylko w zakresie bardzo małych odkształceń; ciałem stałem jest również galareta, bo sztywność jej, jakkolwiek mała, nie jest jednak zerem.

141. Sprężystość objętości ciał stałych. Ściśliwość. Wszystkie ciała stałe są sprężyste, w mniej lub więcej obszernych granicach odkształcenia. Wszystkie są ściśliwe, jakkolwiek bardzo trudno; doświadczenie uczy, że ściśliwość ciał stałych jest wogóle znacznie mniejsza, aniżeli ściśliwość cieczy, a tem więcej gazów. Ciała doskonale jednolite, jakiemi są prawdopodobnie tylko kryształy, posiadają doskonałą sprężystość objętości, t. j. po ustaniu ucisku wracają dokładnie do pierwotnej objętości, nie doznawając trwałego zwiększenia gęstości. Większość ciał stałych ulega jednak pod ciśnieniem trwałym odkształceniom — zwłaszcza jeżeli ustrój ich wewnętrzny jest mniej lub więcej gąbczasty, chociażby przestwory próżne (t. zw. pory) były na oko niedostrzegalne.

.Niektóre metale, na pozór jednolite są jednak tak dziurkowate, że można przez nie wodę przeciskać. Gęstość złota powiększa się przy wybijaniu monet od 19·258 do 19·367; miedzi od 8·535 do 8·916. Wyżarzenie i powolne ochłodzenie przywraca pierwotną gęstość. Wyżarzenie i nagłe ochłodzenie zmienia również trwale gęstość; gęstość miedzi, szkła, stali (hartowanie), zmniejsza się wówczas; mosiądzu, spiżu zwiększa się.

Bezpośrednie wymierzenie ściśliwości ciał stałych jest trudne; z powodu małości zmian, jakie sprawia ciśnienie, nawet bardzo znaczne. Zwyczajnie zanurza się ciało w wodzie i wywiera się z zewnątrz odmierzone ciśnienie za pomocą prasy lub pompy; skrócenie stosunkowe którejkolwiek linii w ciele równokierunkowem równa się trzeciej części zgęszczenia masy (ust. 129); stosunek ciśnienia do zgęszczenia daje spółczynnik ściśliwości.

Pojemność naczyń z materyału równokierunkowego, poddanych jednakowemu ciśnieniu wewnątrz i zewnątrz, zmniejsza się w tym samym stosunku, w jakim zmniejszyłaby się objętość jądra z tego samego materyału, wypełniającego szczelnie wewnętrzną objętość naczynia.

142. Sprężystość postaci. Sztywność. Wszystkie ciała stałe posiadają sprężystość postaci, wszelako własności ich różnią się w tej mierze znacznie od własności ciała idealnego, doskonale sprężystego. Należy tu zwrócić uwagę na wielkość i na czas trwania odkształcenia, któremu poddajemy ciało.

Jeżeli odkształcenie przekroczy pewną granicę, wtenczas po odjęciu sił zewnętrznych, ciało nie powraca dokładnie do postaci pierwotnej, lecz zachowuje pewne odkształcenie trwałe, tego samego rodzaju jak odkształcenie przemijające, lecz mniejsze. To odkształcenie ciała, po którem pozostają dostrzegalne już ślady odkształcenia trwałego, zowie się granicą sprężystości w danym rodzaju odkształcenia.

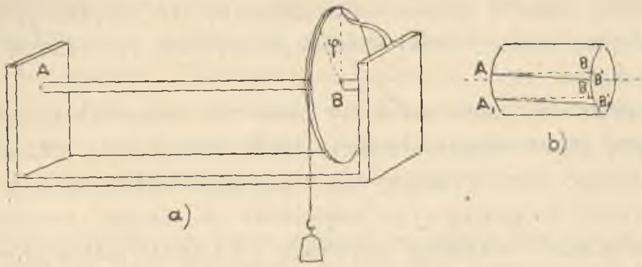
Własności sprężyste ciał zależą dalej od czasu trwania odkształceń. Odkształcenie, które w krótko trwającem doświadczeniu znika po zdjęciu sił zewnętrznych w zupełności, pozostawia trwałe ślady, jeżeli trwa bardzo długo. Sprężyny zgięte długi czas, osiadają i nabywają zgięcia trwałego. Z tego wynika, że jeżeli pozostawimy ciało długi czas w stanie odkształconym, to cząstki jego ułożą się z biegiem czasu w taki sposób, że ciśnienia wewnętrzne doznają pewnej ulgi.

Nawzajem, jeżeli poddamy ciało sile odkształcającej stałej, działającej przez dłuższy czas, to ciało uzyska natychmiast pewne odkształcenie; lecz w miarę tego, jak ciało przybiera nowy ustrój wewnętrzny, uwalniający je częściowo od ciśnień wewnętrznych, siła zewnętrzna otrzymuje przewagę i zwiększa odkształcenie. Po pierwszem odkształceniu następuje więc jeszcze dalsze powolne poddawanie się ciała, które może trwać nawet dni lub miesiące, jednakowoż w każdem ciele istotnie stałem dąży do pewnego kresu. Po odjęciu siły zewnętrznej odkształcenie nie znika znowu odrazu w całości, lecz ciało uwalnia się od resztek jego bardzo powoli. Zjawiska te nazwano opóźnieniem sprężystem.

Kauczuk, galareta, stal, mają najobszerniejsze granice sprężystości; ołów, cynk, cyna bardzo ciasne. Objawy opóźnienia sprężystego są bardzo wybitne w kauczuku, szkle; mniejsze w metalach.

143. Ważniejsze rodzaje odkształcenia sprężystego długich prętów. a) **Skręcenie prętów o przekroju kolistym.** Najprostsze objawy sprężystości dostrzegamy na prętach pryzmatycznych i prostych. Pręty takie nadają się najlepiej do mierzenia spółczynników sprężystości, a zarazem są ważne ze względu na rozmaite zastosowania n. p. jako belki w konstrukcyach technicznych. Pręt AB (ryc. 106a), o przekroju kolistym, jest w A stale przytwierdzony; na wolny koniec B działa moment zewnętrzny, skręcający go o pewien kąt φ.

Chodzi nam o obliczenie wartości momentu zewnętrznego M, który wywołuje skręcenie wolnego końca o kąt φ. Pomyślmy szereg przekrojów prostopadłych do osi pręta, którego długość oznaczymy przez L; pierwszy A, będzie nieruchomy; ostatni, B obróci się o kąt φ. Każdy przekrój pośredni obróci się o kąt proporcyonalny do odległości od końca stałego. Dwa przekroje odległe od siebie o AB (ryc. 106, b), obrócą się względem siebie o $\frac{\varphi}{L} . AB$. Każda prosta równoległa do osi pręta zamieni się wskutek tego przez skręcenie na wysmukłą linię śrubową. Pomyślmy, że pręt cały podzielono na cienkie spółosiowe rurkowate warstwy. Cząstka ABA_1B_1 (ryc. 106, b) pierwotnie prostokątna, leżąca na powierzchni jednej z takich rurek (o promieniu r) przyjmie kształt $AB'A_1B'_1$, ulegnie zatem



Ryc. 106.

skręceniu prostemu (ust. 130) o kąt $BAB' = \alpha = \frac{BB'}{AB}$. Ponieważ jednak $BB' = r \cdot \frac{\varphi}{L} \cdot AB$, przeto $\alpha = \frac{r\varphi}{L}$. Wszystkie cząstki pręta ulegają zatem skręceniu prostemu; najsilniej odkształcają się te, które leżą na zewnętrznej powierzchni, gdzie r równa się promieniowi pręta R.

Skręcenie proste α wywołuje ciśnienie styczne $p = \alpha\tau$ (ust. 136). Weźmy pod uwagę którykolwiek, n. p. końcowy przekrój pręta (ryc. 107). Każda cząstka przylegająca doń wywiera ciśnienie równoległe do przekroju, a prostopadłe do osi i do promienia łączącego cząstkę ze środkiem przekroju. Suma momentów tych ciśnień, w przypadku równowagi, powinna być równa momentowi zewnętrznemu M. Cząstka C w przekroju końcowym (ryc. 107), odległa o r od osi, mająca pole s, przyczynia się do tego siłą: $CD = ps = \alpha\tau s = \frac{\varphi\tau sr}{L}$, a więc momentem $\frac{\varphi\tau sr^2}{L}$. Suma tych momentów, obejmująca wszystkie cząstki przylegające do przekroju, wynosi: $\frac{\varphi\tau}{L}\Sigma sr^2$, i jest zrównoważona przez moment zewnętrzny M. Sumę iloczynów elementów powierzchni, przez kwadraty odległości ich od osi, t. j. Σsr^2 nazywamy momentem bezwładności przekroju względem osi. Równa się ona widocznie momentowi bezwładności blaszki nieskończenie cienkiej, mającej kształt przekroju, w której każda jednostka powierzchni posiada masę $= 1$, a zatem cała blaszka masę S, równą liczebnie powierzchni przekroju. Według wzoru podanego przy końcu ustępu 75 (str. 150) na moment bezwładności walca kolistego względem osi, znajdziemy, że moment bezwładności przekroju kolistego o promieniu R, wynosi $\Sigma sr^2 = \frac{1}{2}R^2 \times S = \frac{1}{2}R^4\pi$.

Ryc. 107.

Zależność pomiędzy momentem zewnętrznym M, a kątem skręcenia φ wolnego przekroju (w mierze łukowej) wyraża więc równanie:

(1) $$M = \tau \cdot \frac{\pi\varphi R^4}{2L},$$

z którego czytamy, *że moment zewnętrzny, potrzebny do skręcenia pręta o przekroju kolistym, zależy od spółczynnika sztywności i jest do niego proporcyonalny; nadto jest on wprost proporcyonalny do kąta skręcenia wolnego końca i do czwartej potęgi promienia, zaś odwrotnie proporcyonalny do długości pręta.*

Skręcenie prętów o przekroju kolistym daje najprostszy sposób porównywania różnych materyałów pod względem sztywności. Wymierzywszy na danym pręcie R i L w *cm*, M w *gr . cm*, tudzież kąt φ w mierze łukowej, możemy na podstawie równania (1) obliczyć spółczynnik τ. Tablica tych spółczynników podana będzie na końcu ust. 144.

Do pomiarów tego rodzaju służyć może przyrząd wyobrażony na ryc. 106. Sztywność cienkich drutów dogodniej jest mierzyć metodą wahadłową. Na drucie odmierzonej długości L i grubości $2R$ zawiesza się bryłę o znanym momencie bezwładności $= B$, t. zw. wibrator. Wibrator może mieć postać rury, walca, albo pręta poziomego obciążonego na końcach ciężkiemi kulami. Skoro obrócimy go w płaszczyźnie poziomej o pewien kąt, to jednocześnie drut skręci się o ten sam kąt. Wibrator oswobodzony odbywa następnie wahania około drutu jako osi. W istocie jest to wahadło, poruszane sprężystością drutu. Stosując wzory znane z teoryi wahadła (ust. 100) mamy w tym razie: $M = \tau \frac{\pi\varphi R^4}{2L}$ zatem $D = \tau \frac{\pi R^4}{2L}$; nadto jest, jak wiadomo: $T = 2\pi\sqrt{\frac{B}{D}}$, gdzie T oznacza okres wahań. Zmierzywszy czas T obliczamy stąd: $\tau = \frac{8\pi BL}{R^4 T^2}$.

Zadania.

260) Obliczyć moment potrzebny do skręcenia okrągłego pręta stalowego, o długości 2 *m* i średnicy 1 *cm*, o 1^0, przyjmując $\tau = 800 \times 10^6$ *gr/cm²*. *Odp.* 6854 *gr . cm.*

261) Wibrator, zawieszony na drucie stalowym, wykonywa w przeciągu pięciu minut 90 wahnień; ten sam wibrator, zawieszony na drucie miedzianym, tej samej długości i średnicy, wykonywa w ciągu pięciu

minut 70 wahnień; znaleźć stosunek sztywności stali (τ_1) do sztywności miedzi (τ_2).

Odp. $\tau_1 : \tau_2 = 9^2 : 7^2 = 81 : 49$.

262) Znaleźć ten sam stosunek, jeżeli przy równej długości drutów, średnice są d_1 i d_2, a stosunek częstości wahnień $n_1 : n_2$.

Odp. $\tau_1 : \tau_2 = \frac{n_1^2}{d_1^4} : \frac{n_2^2}{d_2^4}$.

263) Na drucie mosiężnym, o długości 576·5 *cm* i średnicy 0·04828 *cm* zawieszony jest wibrator, którego moment bezwładności, względem osi drutu, wynosi 36550 *gr cm*². Okres wahań wibratora znaleziono $=$ 66·574 *sek.*

Odp. $\tau = \frac{8\pi \times 36550 \times 576{\cdot}5}{(0{\cdot}02414)^4\ (65{\cdot}574)^2} = 362{\cdot}7 \times 10^9\ dyn/cm^2 = 369{\cdot}7 \times 10^6\ gr/cm^2$.

144. b) **Przedłużenie albo skrócenie prętów.** Pręt, albo drut, przytwierdzony stale u jednego końca, ciągniemy za drugi koniec siłą P, w kierunku równoległym do jego osi. Pręt wydłuża się wówczas, a jednocześnie zwęża się w kierunku poprzecznym. Rozważmy warunki równowagi sił zewnętrznych i sił sprężystych, wzbudzonych w pręcie przez to odkształcenie. Przytwierdzony koniec pręta usiłuje wyrwać się z przyrządu, który go trzyma, a to taką samą siłą P, jak ta, która ciągnie koniec wolny. W każdym przekroju poprzecznym istnieje ciśnienie (ujemne w przypadku uważanym, a więc napięcie), t. j. cząstki leżące po jednej stronie przekroju, usiłują oderwać się od cząstek leżących po drugiej. Całkowita siła, działająca na wskroś każdego przekroju, jest znowu P, a wskutek tego ciśnienie (na jednostkę powierzchni) w każdym przekroju będzie:

$$p = \frac{P}{S},$$

w czem S oznacza pole każdego przekroju poprzecznego. Długość pręta nieodkształconego oznaczymy przez L; pod wpływem siły wydłużającej zamienia się ona na $L + l$. Pręt staje się o l dłuższym, wydłużenie jego (ust. 129) wynosi przeto:

$$\lambda = \frac{l}{L}.$$

Miarą odkształcenia materyału pręta nie jest »przedłużenie l«, lecz »wydłużenie λ«. Widocznem jest bowiem, że pręt o długości

$2L$ dwa razy większej, przedłużony o $2l$, będzie tak samo w każdem miejscu odkształcony, jak pręt L, przedłużony o l. Według prawa Hooke'a ciśnienie p jest proporcyonalne do odkształcenia λ, możemy zatem napisać:

(1) $$p = \varepsilon\lambda, \text{ albo } \frac{P}{S} = \frac{\varepsilon l}{L},$$

albo także:

(2) $$l = \frac{LP}{\varepsilon S}.$$

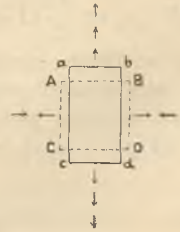
Spółczynnik proporcyonalności ε jest to wielkość stała, zależna od materyału pręta, t. zw. spółczynnik wydłużenia, albo moduł Younga. Jest to spółczynnik sprężystości, właściwy uważanemu sposobowi odkształcenia.

Przy wydłużaniu zmienia się jednocześnie postać i objętość pręta; z tego powodu sprężystość przy wydłużaniu zależy zarówno od sprężystości przy zgęszczaniu jak i przy skręcaniu, t. j. ε zależy od obu głównych spółczynników: τ i σ.

Poprzednie uwagi, równania (1) i (2), tudzież spółczynnik ε, stosują się również do skrócenia, którego doznaje pręt, gdy siła P działa nań w przeciwnym kierunku. Pręt albo słup, ściskany podłużnie, skraca się, a jednocześnie staje się nieco szerszym.

Aby wymierzyć spółczynnik wydłużenia ε dla pewnego materyału, zawiesza się pręt, albo drut znanych rozmiarów pionowo; naprzód obciąża się go na dolnym końcu ciężarkiem, któryby go należycie wyprostował, następnie dodaje się większy ciężar P i odmierza z możliwą dokładnością przedłużenie l. Wartość spółczynnika oblicza się następnie z równania (2).

Materya pręta, pod wpływem podłużnego napięcia p, przyjmuje, według (1), wydłużenie λ w kierunku osi; w kierunku poprzecznym następuje jednocześnie zwężenie, którego wartość oznaczymy przez λ'. Pomyślmy we wnętrzu pręta sześcian (ryc. 108) $ABCD$ o krawędziach $= 1$; po odkształceniu uzyska on postać $abcd$; długość krawędzi podłużnych będzie $1 + \lambda$, poprzecznych: $1 - \lambda'$, albo $1 - \lambda\mu$, jeżeli przez $\mu = \frac{\lambda'}{\lambda}$ oznaczymy stosunek zwężenia poprzecznego do wydłużenia. Objętość sześcianu, równa pierwotnie 1, zamieni się na $(1 + \lambda)(1 - \lambda\mu)^2$, albo po opuszczeniu λ^2,



Ryc. 108.

jako bardzo małej wielkości, na $1 + \lambda (1 - 2\mu)$. Rozszerzenie materyału wynosi więc: $\theta = \lambda (1 - 2\mu)$. Gdyby sześcian doznał był tylko tego rozszerzenia, wtenczas zarówno podłużne jak poprzeczne rozmiary jego uzyskałyby wydłużenie $\lambda_1 = \frac{\theta}{3} = \frac{\lambda}{3} (1 - 2\mu)$. Ponieważ w rzeczywistości sześcian uzyskał podłużne wydłużenie λ i poprzeczne zwężenie $- \lambda\mu$, przeto obok jednostajnego rozszerzenia θ materyał jego doznał jeszcze odkształcenia postaci.

W istocie, widać natychmiast, że rzeczywiste odkształcenie materyału otrzymamy, dodając do powyższego wszechstronnego wydłużenia λ_1 dwa skręcenia proste: jedno składające się z pewnego wydłużenia λ_2 w kierunku osi i takiegoż zwężenia λ_2 w kierunku poprzecznym, na szerokość, drugie złożone znowu z wydłużenia λ_2 w kierunku osi i zwężenia λ_2 w drugim poprzecznym, na grubość. Bo istotnie, rzeczywiste zwężenie kierunku poprzecznego można przedstawić jak następuje:

$$- \lambda\mu = \lambda_1 - \lambda_2, \text{ gdzie } \lambda_2 = \frac{\lambda}{3} (1 - 2\mu) + \lambda\mu = \frac{\lambda}{3} (1 + \mu).$$

Aby zaś otrzymać rzeczywiste wydłużenie λ w kierunku osi, należy do λ_1 dodać:

$$\lambda - \lambda_1 = \lambda - \frac{\lambda}{3} (1 - 2\mu) = \frac{2\lambda}{3} (1 + \mu),$$

a więc istotnie $2\lambda_2$. Rozbiór ten wskazuje, że odkształcenie każdej cząstki pręta składa się istotnie z jednostajnego rozszerzenia: $\theta = 3\lambda_1$, w połączeniu z dwoma skręceniami prostemi, z których jedno polega na wydłużeniu krawędzi podłużnych o λ_2 i na takiem samem zwężeniu w kierunku szerokości sześcianu; drugie na wydłużeniu krawędzi podłużnych znowu o λ_2 i na takiem samem zwężeniu w kierunku grubości.

Rozszerzenie θ wymaga, żeby na wszystkie ściany działało napięcie $p_1 = \sigma\theta = 3\,\sigma\lambda_1 = \sigma\lambda\ (1 - 2\mu)$ (ust. 135); pierwsze ze skręceń prostych wymaga ciśnienia w kierunku szerokości: $p_2 = 2\lambda_2\tau$ (ust. 136), czyli: $p_2 = \frac{2\lambda}{3} (1 + \mu)\tau$, w połączeniu z napięciem podłużnem, tej samej wielkości; drugie skręcenie proste wymaga znowuż takiego ciśnienia p_2, w kierunku grubości i napięcia p_2 w kierunku podłużnym. Wypadkowe napięcie podłużne p, na ściany *ab* i *cd* (ryc. 108), składa się tedy ze sił $p_1 + p_2 + p_2$, przeto:

$$p = \lambda [\sigma (1 - 2\mu) + \tfrac{4}{3} \tau (1 + \mu)].$$

Porównywając to z wzorem (1):

$$p = \lambda\varepsilon,$$

znajdziemy:

$$\varepsilon = \sigma(1 - 2\mu) + \tfrac{4}{3}\tau(1 + \mu).$$

Aby znaleźć wartość stosunku μ, wydłużenia sześcianu, a więc i całego pręta, do zwężenia poprzecznego, należy przypomnieć sobie, że boczne ściany w pręcie wydłużonym nie doznają z zewnątrz ani ciśnienia, ani napięcia, że przeto napięcie p_1 i ciśnienie p_2 muszą się znosić; to daje równanie:

$$\sigma\lambda(1 - 2\mu) = \frac{2\lambda}{3}(1 + \mu)\tau,$$

z którego obliczamy:

(3) $$\mu = \frac{3\sigma - 2\tau}{6\sigma + 2\tau}.$$

Podstawiwszy tę wartość w równanie na ε, znajdziemy:

(4) $$\varepsilon = \frac{9\sigma\tau}{3\sigma + \tau}.$$

Taka jest, w ciałach jednolitych i równokierunkowych, zależność spółczynnika wydłużenia, od głównych spółczynników sprężystości σ i τ.

Ponieważ τ i ε, tudzież μ, dają się łatwo wymierzyć na prętach, przeto zmierzywszy dwie z tych wielkości możemy obliczyć pozostałe na podstawie związków wynikających z (3) i (4), mianowicie:

(5) $$\sigma = \frac{\varepsilon\tau}{9\tau - 3\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{3 - 6\mu}.$$

(6) $$\tau = \frac{\varepsilon}{2 + 2\mu}.$$

Rachunki te mają jednak wartość tylko dla ciał jednolitych i równokierunkowych.

Tablica spółczynników sprężystości

w milionach gramów na centymetr kwadratowy ($Gr/cm^2 \times 10^6$) [1].

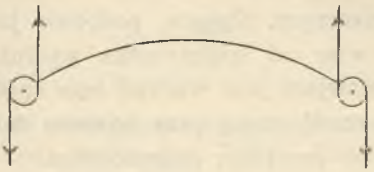
	ε	τ	σ	μ
Stal	2200	860	1700	0·28
Żelazo	2000	780	1500	0·28
Platyna	1700	620	2300	0·38
Miedź	1250	460	1300	0·34
Bronz	1050	390	1300	0·36
Mosiądz	1000	370	1100	0·35
Cynk	1050	420	700	0·25
Srebro	730	270	940	0·37
Glin	700	260	680	0·33
Szkło	650	260	450	0·26
Kryształy soli kam. . . .	—	—	246	—
Ołów	160	57	270	0·4
Drzewo jodłowe	120	6	—	—
Lód	60	—	—	—
Kauczuk	0·01	0·003	0·63	0·5
Woda	0·00	0·00	22·0	—
Powietrze	0·00	0·00	0·001	—

Są to wartości średnie, w liczbach okrągłych, zebrane z różnych doświadczeń, ważne dla temperatury około 15°. Spółczynniki metali odnoszą się do twardego stanu tychże; ciała te miękną przez wyżarzenie, a spółczynniki sprężystości zmniejszają się (n. p. dla miedzi blizko o 20%). W temperaturach wyższych doświadczenie okazuje znaczne zmniejszenie sprężystości. Dla porównania z ciałami stałemi umieszczone są w powyższej tablicy także spółczynniki ściśliwości wody i powietrza.

145. Zgięcie. Pręt prosty zgina się, gdy nań działają przynajmniej dwie pary sił, w płaszczyźnie równoległej do osi (ryc. 109); jedna siła bowiem nadałaby prętowi ruch postępowy — jedna para

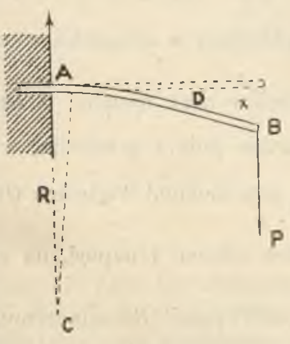
[1] t. j. w tonnach na cm^2.

obracałaby go — dopiero dwie pary, równoważące się, mogą wywołać trwałe zgięcie, jak to objaśnia ryc. 109. Weźmy n. p. pod uwagę pręt o długości L, przytwierdzony stale u jednego końca A (trzymany w kleszczach, lub wmurowany w ścianę), gdy na drugi

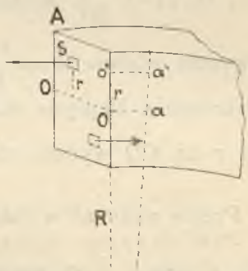


Ryc. 109.

koniec B działa siła P (ryc. 110 *a*), prostopadła do osi. Jedną parę sił stanowi w tym razie siła P w B, razem z oddziaływaniem, również P, w punkcie A. Moment tej pary wynosi $M = PL$, gdyż jeżeli zgięcie jest niewielkie, jak tu zakładamy, ramię siły P równa się długości belki. Drugą parę zewnętrzną stanowią siły sprężyste w końcowym przekroju A pręta. Wskutek zgięcia, cząstki leżące po wypukłej stronie pręta zostały bowiem wydłużone; cząstki po stronie



Ryc. 110 a.



Ryc. 110 b.

wklęsłej skróciły się. Odkształcenia te są powodem napięć po stronie zewnętrznej, ciśnień na wewnętrznej, przekroju końcowego A (ryc. 110 *b*). One usiłują obrócić cały pręt w przeciwną stronę, aniżeli para PP. Celem utrzymania równowagi, wypadkowy ich moment powinien być równy momentowi $M = P . L$. Cząstki, które nie doznały ani wydłużenia ani skrócenia tworzą t. zw. w a r s t w ę obojętną. Ona przebiega środkiem pręta i oddziela części wydłużone od skróconych.

W zgiętym pręcie spotykamy więc ten sam rodzaj odkształcenia materyi, jak w ustępie poprzedzającym, t. j. wydłużenie i skrócenie, przy którem pręt może swobodnie zwężać się lub rozszerzać w kierunku poprzecznym. Zgięcie, podobnie jak wydłużenie, lub skrócenie, zależy więc od spółczynnika wydłużenia ε; będzie ono tem większe, im mniejsza jest wartość tego spółczynnika. Większa lub mniejsza sztywność pręta przy zginaniu zależy nadto od jego długości i od postaci przekroju poprzecznego.

Miarą zgięcia jest zakrzywienie pręta w tej części, która zakrzywia się najsilniej, t. j. w A. Promień krzywizny $AC = R$ (ryc. 110 a) warstwy obojętnej jest w tem miejscu najkrótszy. Przez środek przekroju A (ryc. 110 b) przechodzi linia OO, w której warstwa obojętna przecina przekrój. Wszystkie cząstki pręta przylegające do tego przekroju, a leżące powyżej OO uległy wydłużeniu, tem większemu, im więcej są od OO odległe; wszystkie cząstki leżące poniżej OO doznały znowu skrócenia. Łatwo okazać, że cząstka leżąca w odległości r od OO uległa wydłużeniu $\lambda = \frac{r}{R}$. Porównajmy bowiem dwa krótkie włókienka Oa i $o'a'$ (ryc. 110) odległe od środka krzywizny o R i $R + r$, których długości były przed zgięciem jednakowe. Po zgięciu będzie $o'a' : Oa = R + r : R$ skąd $o'a' = Oa\left(1 + \frac{r}{R}\right)$. Widać zatem, że wydłużenie w odległości r od linii OO wynosi istotnie $\lambda = \frac{r}{R}$. Poniżej tej linii r jest ujemne, λ oznacza tam skrócenie. Napięcie działające na malutkie pole s przekroju, w odległości r od OO wynosi więc: $\lambda\varepsilon s = \frac{\varepsilon rs}{R}$; jego moment względem OO jest $\frac{\varepsilon s r^2}{R}$. Przeto moment wypadkowy wszystkich ciśnień i napięć, na całym przekroju: $M = \frac{\varepsilon}{R}\Sigma s r^2$, albo $M = \frac{\varepsilon B}{R}$, jeżeli przez B oznaczymy, podobnie jak w ust. 143, moment bezwładności przekroju A względem linii OO[1]); moment B zależy od rozmiarów i od kształtu tegoż przekroju. Zważywszy, że moment wypadkowy sił sprężystych, w przekroju A, równoważy moment siły zewnętrznej P, otrzymamy:

$$PL = \frac{\varepsilon B}{R}, \text{ skąd: } R = \frac{\varepsilon B}{PL}.$$

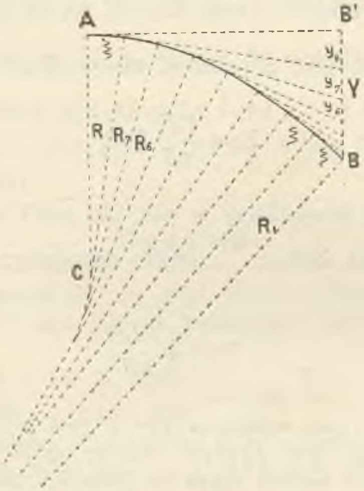
---

[1]) Można dowieść, że linia OO przechodzi zawsze przez środek ciężkości przekroju; wynika to stąd, że ciśnienia i napięcia działające na przekrój powinny zawsze składać się tylko na wypadkową parę, bez wypadkowej siły.

Inne przekroje pręta są mniej zgięte aniżeli A; tak n. p. przekrój D, w odległości x od wolnego końca B (ryc. 110 a), możemy uważać jako przekrój końcowy krótszej belki BD, umocowanej w D. Moment siły P względem niego wynosi tylko Px (znowu w założeniu, że ugięcie jest nieznaczne); promień krzywizny R' w tem miejscu D będzie tedy:

$$R' = \frac{\varepsilon B}{Px}.$$

Widzimy więc, że zakrzywienie pręta zwiększa się proporcyonalnie do odległości od wolnego końca (ryc. 110 c). Łatwiej aniżeli promień



Ryc. 110 c.

krzywizny R daje się wymierzyć t. zw. strzałka zgięcia BB' (ryc. 110 c), okazująca, o ile wolny koniec pręta obniżył się wskutek obciążenia siłą P. Celem znalezienia wartości strzałki, podzielimy długość pręta, zaczynając od B, na bardzo wielką ilość równych odcinków, o jednakowej długości $= \xi$. Promienie krzywizny tych odcinków będą po kolei, według poprzedzającego wzoru:

$$R_1 = \frac{\varepsilon B}{P\xi}, \quad R_2 = \frac{\varepsilon B}{P2\xi}, \quad R_3 = \frac{\varepsilon B}{P3\xi}, \ldots, \quad R = \frac{\varepsilon B}{PL}.$$

Jeżeli w końcach tych odcinków wykreślimy styczne do zgiętego pręta (na ryc. 110 c, dla większej wyrazistości rysunku, zgięcie jest mocno przesadzone), natenczas podzielą one linię BB' na odcinki, których długości oznaczymy kolejno przez y_1, y_2, y_3,..., a których suma równa się szukanej strzałce Y. Z podobieństwa wysmukłych trójkątów, które tworzą przecinające się po kolei promienie R_1, R_2,... i trójkątów utworzonych przez należące do nich styczne, wynikają następujące proporcye:

$$\frac{y_1}{\xi} = \frac{\xi}{R_1}; \quad \frac{y_2}{2\xi} = \frac{\xi}{R_2}; \quad \frac{y_3}{3\xi} = \frac{\xi}{R_3} \text{ i t. d.}$$

Otrzymujemy stąd, podstawiwszy za R_1, R_2 i t. d. wartości:

$$y_1 = \frac{P\xi^3}{\varepsilon B}; \quad y_2 = \frac{P\xi^3}{\varepsilon B}(2)^2; \quad y_3 = \frac{P\xi^3}{\varepsilon B}(3)^2; \ldots$$

Oznaczmy liczbę odcinków ξ przez n, zatem $n\xi = L$, a znajdziemy:

$$Y = \frac{P\xi^3}{\varepsilon B}\Sigma n^2.$$

Ponieważ, jak dowiedliśmy w ust. 75, jeżeli n jest bardzo wielką liczbą, można przyjąć $\Sigma n^2 = \frac{n^3}{3}$, przeto dostajemy:

$$Y = \frac{1}{3}\frac{PL^3}{\varepsilon B},$$

t. j. strzałka zgięcia pod wpływem siły P jest proporcyonalna do sześcianu długości pręta; pręt dwakroć dłuższy ugnie się ośm razy więcej. Sztywność jego zależy zresztą także od momentu bezwładności B, a więc od kształtu przekroju.

Przypuśćmy n. p., że przekrój pręta jest prostokątem o bokach b i c, tudzież że siła P działa równolegle do boku b. Z wzorów danych w ust. 75 na moment bezwładności równoległościanu prostokątnego, znajdziemy ramię bezwładności, zakładając tam $a = o$, mianowicie $k^2 = {}^1/_{12}\, b^2$, zatem $B = k^2bc = {}^1/_{12}\, b^3c$. Jako wartość strzałki otrzymujemy więc w tym przypadku:

$$Y = 4\frac{PL^3}{\varepsilon b^3 c}.$$

Wynik ten można wypowiedzieć jak następuje: *Strzałka zgięcia pręta o przekroju prostokątnym jest proporcyonalna do obciążenia P i do sześcianu długości; natomiast jest odwrotnie proporcyonalna do szerokości* (w kierunku prostopadłym do płaszczyzny zgięcia), *do sześcianu wysokości i do spółczynnika wydłużenia* ε.

Prawo to objaśnia znaną własność prostokątnych listew, desek i t. p., które są bez porównania sztywniejsze przy zginaniu na kant aniżeli na płask.

Z powyższych praw zgięcia pręta, przytwierdzonego na jednym końcu, można odrazu otrzymać podobne prawa dla pręta, który jest u obu końców luźnie podparty, a w środku obciążony siłą P, prostopadłą do osi. Strzałka zgięcia będzie widocznie taka, jak gdyby dwa pręty, kształtu przedstawionego na ryc. 110a, były złączone z sobą w przekroju A, a na końcach B poddane były siłom $\frac{P}{2}$ działającym do góry (takie jest bowiem oddziaływanie punktów podparcia). Zamiast P we wzorze powyższym, należy więc napisać $\frac{P}{2}$, zamiast L, $\frac{L}{2}$. Okaże się wówczas, że strzałka zgięcia pręta podpartego u obu końców jest szesnaście razy mniejsza (2×2^3) aniżeli wówczas, gdy pręt jest u jednego końca stale przymocowany, u drugiego obciążony.

Zadania.

264) O ile przedłuża się pręt stalowy, długości 3 *m*, przekroju prostokątnego: 2×3 *mm*, gdy na końce jego działają siły wydłużające, po 200 *Kg*?

Odp. $l = \frac{2 \times 10^5 \times 300}{2200 \times 10^6 \times 0{\cdot}06} = 0{\cdot}46$ *cm*.

265) Jaką średnicę (d) powinien mieć okrągły pręt mosiężny, o długości 2 *m*, aby wydłużenie jego nie przewyższało wartości 0·0005, skoro na nim zawiesimy ciężar 50 *Kg*?

Odp. Oznaczywszy przez r promień, znajdziemy ciśnienie w przekroju $= \frac{50000}{r^2\pi}$, zatem $\lambda = 0{\cdot}0005 = \frac{p}{\varepsilon} = \frac{50000}{r^2\pi \times 1000 \times 10^6}$; stąd $r = 0{\cdot}178$ *cm*, $d = 3{\cdot}56$ *mm*.

266) Między dwoma punktami stałymi napięta jest struna stalowa, o długości 80 *cm* i średnicy 0·7 *mm*. Struna ta zostaje wygiętą w łuk koła, przyczem jej punkt środkowy odchyla się z położenia równowagi o 3 *mm*. O ile zmienia się przytem siła, którą struna ciągnie punkty stałe. *Odp.* Rośnie o 307 *Gr*.

267) Obliczyć stosunek (μ), zwężenia poprzecznego do wydłużenia, dla szkła, przyjąwszy stosunek $\varepsilon : \tau$ jako dany i równy $2\frac{1}{2}$.

Odp. $\mu = \frac{1}{4}$.

268) Ile wynosi stosunek $\varepsilon : \tau$, jeżeli $\mu = \frac{1}{3}$? *Odp.* 8 : 3.

269) Znaleźć strzałkę zgięcia, tudzież najkrótszy promień krzywizny, belki poziomej drewnianej, umocowanej jednym końcem, obciążonej

na wolnym końcu ciężarem 50 *Kgr*; długość jej wynosi 2 *m*; wysokość 30 a szerokość 25 *cm*.

Odp. $Y = \frac{1}{5}$ *mm*; $R = 6750$ *m*.

270) Znaleźć stosunek strzałek zgięcia dwu belek poziomych, z tego samego materyału, jednakowej długości i masy, umocowanych jednym końcem, a obciążonych jednakowo na końcu wolnym, jeżeli przekrój pierwszej jest kwadratem o bokach poziomych i pionowych, a drugiej kołem.

Odp. $3 : \pi = 1 : 1{\cdot}047$. — (Moment bezwładności kwadratu $a \times a$, względem średnicy równoległej do a, wynosi $\frac{a^4}{12}$; koła o promieniu r, względem średnicy $= \frac{r^4\pi}{4}$).

271) Na końcu prostego pręta stalowego, o długości 40 *cm*, szerokości 5 *mm*, grubości 2 *mm*, przymocowana jest masa 300 *gr*. Znaleźć częstość drgania tej masy w kierunku prostopadłym do szerokości pręta, opuszczając masę samego pręta. *Odp.* $n = 1{\cdot}65$ na *sek*.

146. Obszerność granic sprężystości. Granicą sprężystości nazywa się, jak już wspomniano, najmniejsze odkształcenie, po którem pozostaje w ciele widoczne odkształcenie trwałe (ust. 142). U większej części ciał sprężystych granice te są nader ciasne; odległość dwu sąsiednich cząstek ciała, przy wszelkich odkształceniach, w zakresie granic sprężystości, różni się od pierwotnej ich odległości zaledwie o mały ułamek tejże odległości pierwotnej. Przy wydłużeniach prętów znaleziono następujące granice sprężystości, (są to największe wydłużenia λ, jakie pręt może znosić, nie doznając przytem wydłużeń trwałych, większych niż $^5/_{100000}$ to znaczy: 0·05 *m m* na *metr*, albo 0·5 *m m* na 10 *metrów* długości pręta:,

Stal	0·0020	Ołów	0·00014
Żelazo	0·0015	Jodła	0·002
Miedź	0·00093	Kauczuk przeszło . .	1 0

Wyżarzenie, zwłaszcza metali twardszych, n. p. żelaza, ścieśnia granice sprężystości nader znacznie, nawet do $^1/_{10}$ powyższych wartości

Skręcenia proste (α, ust. 130), możliwe w obrębie granic sprężystości, nie przekraczają nawet dla stali wartości $\alpha = 0{\cdot}014$ t. j. około 50′; dla innych metali wynoszą zaledwie kilkanaście minut. Nie należy tego oczywiście mieszać z całkowitym kątem skręcenia prętów, oznaczonym wyżej przez φ, który dla cienkich prętów (drutów i t. p.) może być bardzo znaczny, pomimo że skręcenia proste α poszczególnych cząstek nie przekraczają powyższych granic.

147. Plastyczność i kruchość. Granice odkształceń sprężystych ciał stałych, jak widzieliśmy, są bardzo ciasne; odkształcenia przekraczające te granice nie znikają w całości po odjęciu sił odkształcających, lecz zostawiają po sobie odkształcenia trwałe (ust. 142). Jeżeli wskutek tych odkształceń trwałych postać ciała może znacznej uledz zmianie, zanim nastąpi zerwanie związku cząstek, wtenczas ciało nazywamy plastycznem, czyli gniotkiem. Ciało natomiast, które nie przyjmuje odkształceń trwałych, które pęka, kruszy się, rozrywa albo łamie, przy odkształceniach niewiele większych niż granice sprężystości, nazywa się kruchem. Własności ciał w tej mierze zależą nie mało od szybkości, z jaką odkształcenie powstaje, a zatem od natężenia siły zewnętrznej i od czasu działania jej. Tak n. p. smoła szewska, w temperaturach średnich, jest ciałem kruchem, łamliwem; wszelako wobec sił trwale działających, choćby nawet słabych, zachowuje się jak ciało plastyczne, a nawet płynne. Kelvin umieścił płytę takiej smoły na powierzchni wody w szerokim słoju, położył na niej kilka kul ołowianych, a pod nią zanurzył w wodzie kilka korków; w przeciągu sześciu miesięcy kule przecisnęły się nawskroś przez płytę i spadły na dół, korki wypłynęły na wierzch. Wobec krótko trwających odkształceń toż samo ciało jest o tyle sztywne i sprężyste, że może być w tym względzie porównane ze szkłem.

Stopień plastyczności zależy także od rodzaju odkształcenia. Pod względem plastyczności przy kuciu (kowalność) idą metale w następującym porządku: ołów, złoto, srebro, miedź, platyna, żelazo; przy walcowaniu na blachy porządek jest taki: złoto, srebro, miedź, ołów, platyna, żelazo; przy wyciąganiu na druty (ciągliwość): platyna, srebro, żelazo, miedź, złoto, ołów. Ze złota robi się blaszki o grubości $^1/_{10}$ μ; z platyny druty o średnicy $^5/_{100}$ μ. Wyżarzenie, tudzież ogrzanie, zwiększa plastyczność (kucie żelaza na gorąco, formowanie szkła); mechaniczne przerabianie (kucie, wyciąganie i t. p.) zwiększa twardość, kruchość i sprężystość. — Hartowanie stali polega na ogrzaniu do czerwoności i nagłem ostudzeniu w wodzie; zewnętrzne warstwy ściągają się nagle i wywierają wielkie ciśnienie na wnętrze, które zwolna pod tem ciśnieniem ostyga. Przy podobnem postępowaniu mogą tworzyć się trwałe napięcia wewnętrzne, dające ciału pozory nadmiernej kruchości (krople batawskie). Mierne ogrzanie stali (odstalenie) usuwa zbyteczną twardość i kruchość.

148. Twardość. Twardość jest to własność wielce złożona, na którą składają się: sztywność, ściśliwość i kruchość. Twardość ocenia się zwyczajnie według siły potrzebnej do wciśnięcia ostrego kolca w ciało, albo według zdolności rysowania innych ciał. Minerały porównywa się zwyczajnie, pod względem twardości, z następującą skalą dowolną: 1) *łojek*, 2) *gips*, 3) *szpat wapienny*, 4) *fluoryt*, 5) *apatyt*, 6) *adular*, 7) *kwarc*, 8) *topaz*, 9) *korund*, 10) *dyament*.

Metale idą pod względem twardości w następującym porządku: stal, żelazo, platyna, miedź, cynk, srebro, złoto, glin, cyna, ołów. Na twardość zważa się przy wyborze materyału na pilniki i proszki do szlifowania. Szybki ruch jest pomocny przy piłowaniu i szlifowaniu; proszkiem dyamentowym szlifuje się dyamenty; wirujący krążek miedziany, powleczony szmerglem, przecina szkło; miałki piasek, dmuchany silnie na szkło używany bywa do sporządzania napisów i ornamentów.

149. Wytrzymałość. Miarą wytrzymałości jest napięcie, które powinno działać na pewną płaszczyznę we wnętrzu ciała, aby oderwać od siebie cząstki, przylegające po obu stronach do tej płaszczyzny. Zerwanie związku cząstek poprzedza zwyczajnie znaczne odkształcenie trwałe. Jeżeli odkształcenie wywołuje we wszystkich punktach w ciele ciśnienia jednakowe (jak n. p. przy wyciąganiu prętów pryzmatycznych), wówczas ciało rozrywa się w tym przekroju, w którym (wskutek niezupełnej jednolitości), materyał jest przypadkowo najsłabszy, albo przekrój mniejszy (wyszczerbienie, zadraśnięcie i t. p.). Jeżeli ciśnienia nie są jednakowe, wtenczas zerwanie zdarzy się naprzód tam, gdzie ciśnienie jest największe (n. p. przy zginaniu pręta, w miejscu najbardziej skrzywionem). Rozmaitym rodzajom odkształcenia właściwe są różne sposoby zerwania związku cząstek: wydłużenie — rozerwanie; ściskanie — zgniecenie (n. p. kamieni w budowlach); zgięcie — złamanie; skręcenie — ukręcenie; skręcenie proste — starcie, czyli ścięcie (oderwanie cząstek w kierunku stycznym do przekroju, jak n. p. przy krajaniu ciał nożycami).

Doświadczenie uczy, że siła potrzebna do zerwania związku cząstek wzdłuż pewnej płaszczyzny, w której odkształcenie wzbudza ciśnienie jednostajne (wytrzymałość ciała w tej płaszczyznie) jest w przybliżeniu proporcyonalna do pola tej płaszczyzny. Stosunek siły do pola przekroju, t. j. napięcie sprawiające zerwanie, nazywa się spółczynnikiem wytrzymałości. Tak n. p. siła potrzebna do rozerwania pręta jest proporcyonalna do jego przekroju (i nie zależy oczywiście od długości pręta). Spółczynnik wytrzymałości równa się w tym razie sile, potrzebnej do rozerwania pręta o przekroju równym jednostce. Następująca tablica daje przybliżone wyobrażenie o wartości spółczynników wytrzymałości różnych materyałów, przy różnych odkształceniach. (Spółczynniki wyrażone są w milionach Gramów na centymetr kwadratowy).

Rozerwanie:

Stal	8	Cynk	1·9	Liny konopne	1·0
Żelazo	4	Ołów	0·2	Włókno jedwab.	3·0
Miedź	3	Drzewo jodłowe	0·7	Rzemienie	0·3

Zgniecenie:				Starcie:	
Żelazo lane	3·0	Piaskowiec	1·2	Żelazo kute	3·5
Ołów	0·5	Cegła	0·2	Żelazo lane	2·0
Granit	1·6	Drzewo	0·4	Drzewo	0·05

Te same czynniki, które powiększają plastyczność i miękkość zmniejszają wytrzymałość. Ciała są znacznie wytrzymalsze wobec sił zewnętrznych działających krótko, aniżeli wobec obciążeń trwałych, albo często powtarzanych. Podwyższenie temperatury, tudzież wyżarzenie (u metali) działa również osłabiająco. Szczególnie szkodliwemi są odkształcenia często powtarzane, a różniące się znacznie co do wielkości; aby n. p. złamać pręt żelazny, wyginamy go naprzemian na prawo i na lewo. Części składowe konstrukcyi technicznych (budowli, machin i t. p.) nie powinny doznawać ciśnień większych aniżeli pewna n-ta część spółczynnika wytrzymałości; liczba n nazywa się pewnością. Gdy chodzi o rozerwanie, przyjmuje się dla drzewa $n = 9$ do 15, dla żelaza i stali 4 do 8. Im większe n tem większe bezpieczeństwo konstrukcyi.

Ciała różnokierunkowe miewają często w różnych kierunkach różną wytrzymałość, jak to widać n. p. na łupkach, łyszczkach, soli kamiennej — łupliwych w pewnych określonych kierunkach.

Zadania.

272) Obliczyć największy ciężar, jaki zdoła unieść pionowy pręt żelazny, o przekroju 10 mm^2, nie wydłużając się po za granicę sprężystości. *Odp.* $2000 \times 10^6 \times 0{\cdot}1 \times 0{\cdot}0015$ $Gr = 300$ Kg.

273) Ile energii potencyalnej można umieścić na drucie stalowym, o długości 10 m i średnicy 0·6 mm, przedłużając go aż do granicy sprężystości?

Odp. $U = \frac{1}{2}Pl = \frac{1}{2}\varepsilon S\lambda^2 L = \frac{1}{2} \times 2100 \times 10^6 \times (0{\cdot}03)^2 \times 3{\cdot}1416 \times$ $\times (0{\cdot}002)^2 \times 1000 = 12438$ $Gr.\ cm.$

274) Jakiej siły potrzeba do przerwania drutu stalowego o średnicy 1 mm? *Odp.* $P : (0{\cdot}05)^2\pi = 8 \times 10^6 : 1$; $P = 63$ Kg.

275) Jaką średnicę powinien mieć okrągły pręt żelazny, aby przy pięciokrotnej pewności uniósł ciężar 500 Kg?

$$Odp.\ \tfrac{1}{4}d^2\pi = 5 \times \frac{500000}{4000000} cm^2;\ d = 11\ mm.$$

276) Obliczyć największy ciężar P, któryby można zawiesić na końcu poziomej belki, utwierdzonej stale przy drugim końcu, jeżeli długość belki wynosi L, wysokość b, szerokość c, gdy największe dozwolone napięcie w danym materyale wynosi w?

Odp. Ciężar P sprawia zgięcie, najsilniejsze w przekroju utwierdzonym, gdzie promień krzywizny wynosi: $R = {}^1/_{12} \dfrac{\varepsilon b^3 c}{LP}$. W tymże przekroju (niebezpiecznym) będą największe wydłużenia i skrócenia, a mianowicie w cząstkach najbardziej odległych od środka, t. j. w odległości $\dfrac{b}{2}$; wydłużenia te będą: $\lambda = \dfrac{1}{R}\dfrac{b}{2} = \dfrac{6PL}{\varepsilon b^2 c}$, przeto odpowiednie napięcia: $\lambda\varepsilon = \dfrac{6PL}{b^2 c}$; one nie powinny przewyższać w, zatem największe bezpieczne obciążenie będzie: $P = \frac{1}{6}\dfrac{b^2 cw}{L}$.

277) Obliczyć największy ciężar P, który można zawiesić w środku tej belki, jeżeli jest ona u obu końców podparta.

Odp. Podstawić w poprzedzającym wzorze $\dfrac{L}{2}$ zamiast L, tudzież $\dfrac{P}{2}$ zamiast P, wówczas otrzymamy $P = \frac{2}{3}\dfrac{b^2 cw}{L}$ (t. j. 4 razy tyle co poprzednio).

278) Jaki może być ciężar P, w obu poprzedzających zadaniach, jeżeli on nie działa w jednym tylko przekroju, lecz jest jednostajnie rozłożony na całej długości belki?

Odp. W obu przypadkach dwakroć większy.

279) Jaki ciężar można zawiesić, przy 10-krotnej pewności, na końcu belki drewnianej o długości 3 m, wysokości 20 cm, szerokości 15 cm ($w = 80$ Kgr/cm^2). [Por. zad. 276).

Odp. $\frac{1}{6}\frac{(20)^2 \times 15 \times 80}{300} = 266$ *Kg.*

280) Przy jakiem obciążeniu belka złamie się? *Odp.* 2660 *Kg.*

150. Tarcie wewnętrzne, czyli lepkość ciał stałych. Ciała sprężyste, odkształcone, a następnie oswobodzone, drgają około położenia równowagi. Ruch ten jest zupełnie podobny do ruchu wahadeł, albowiem i tu siły sprężyste, wzbudzone przez odchylenie z położenia równowagi, są proporcyonalne do odchyleń. Okres drgania, podobnie jak u wahadeł, nie zależy od wielkości amplitudy. Gdyby ciśnienia, powstające przy odkształceniu ciał sprężystych były siłami ściśle zachowawczemi, wówczas ruch drgający ciała sprężystego trwałby bez końca, podobnie jak ruch wahadła niedoznającego oporów tarcia. Doświadczenie uczy jednak, że ruchy tego rodzaju są zawsze drganiami zanikającemi. Ubytku energii drgania nie można kłaść wyłącznie na karb oporów zewnętrznych (powietrza), gdyż podobne zanikanie amplitudy drgań zauważono także w próżni. Nawet ciała najbardziej sprężyste (ust. 133), odkształcające się w granicach sprężystości (struny stalowe w fortepianie, których dźwięk zanika jak wiadomo bardzo szybko) nie podlegają siłom zachowawczym. Wytłumaczono te zjawiska w następujący sposób. Ciśnienia wewnętrzne w ciałach doskonale sprężystych mają tylko wtenczas znamiona sił zachowawczych, gdy je badamy w stanach równowagi. Podczas ruchu natomiast, t. j. podczas odkształcania się, powstają obok ciśnień sprężystych jeszcze dodatkowe opory, zależne od prędkości odkształcania się, które znikają dopiero wtenczas, gdy odkształcenie przestaje się zmieniać; one sprzeciwiają się zarówno wzrostowi jak i ubytkowi odkształcenia, a z tego powodu zużywają energię kinetyczną. Opory te, czynne zwłaszcza przy odkształceniach postaci, nazwano tarciem wewnętrznem, albo lepkością (z powodu podobieństwa do sił podobnych, działających w płynach); można je uważać jako tarcie między cząstkami ciała, budzące się wtenczas, gdy cząstki te przesuwają się jedne obok drugich.

Z rozpoznania tych sił wewnętrznych wynika następujące twierdzenie: ciśnienia w ciałach doskonale sprężystych można tylko wtenczas uważać jako siły zachowawcze, gdy odkształcenia odbywają się nieskończenie powoli; wszelka inna zmiana odkształceń jest połączona ze stratą energii dynamicznej, przyczem (jak przy wszelkich zjawiskach tarcia) na miejsce tej utraconej energii powstaje ciepło.

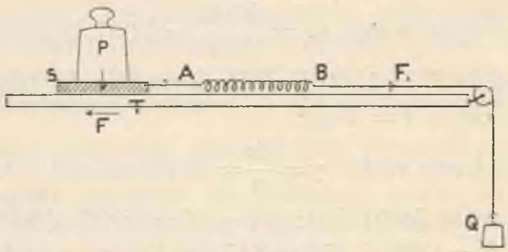
151. Tarcie zewnętrzne. Gdy jedno ciało stałe posuwa się po drugiem, w taki sposób, iż ta sama część powierzchni pierwszego dotyka się po kolei różnych części powierzchni drugiego (łyżwa na lodzie), wtenczas pojawia się również opór, częstokroć bardzo znaczny, zwany tarciem zewnętrznem. Obecność jego można poznać po następujących zjawiskach: 1) Jeżeli ciało, ślizgające się na powierzchni drugiego, posiada pewien zapas energii kinetycznej, lecz porusza się bez zewnętrznej pomocy, wtenczas energia jego zanika stopniowo i zamienia się na ciepło; w końcu ruch ustaje zupełnie. 2) Aby utrzymać ciało ślizgające się w ruchu jednostajnym, potrzeba użyć siły pociągowej, którаby tarcie zrównoważyła (siła równa się wtenczas oporowi). 3) Ciało spoczywające na podstawie, zaczyna poruszać się dopiero wtenczas, gdy siła ciągnąca je dorówna co najmniej tarciu o podstawę. Z tego wynika, że tarcie między dwoma ciałami, znajdującemi się we względnym spoczynku, jest siłą do pewnego stopnia zmienną. Nie ma go wcale, dopóki nie ma usiłowania zewnętrznego, starającego się poruszyć jedno ciało na drugiem. Gdy jest takie usiłowanie, ale bardzo małe, wtenczas zjawia się odrazu opór tarcia, lecz wzrasta tylko do tego stopnia, żeby właśnie zrównoważył owo zewnętrzne usiłowanie. Dopiero gdy to usiłowanie urośnie do pewnej wartości, powierzchnie ciał odrywają się od siebie i zaczyna się ślizganie. Podczas ruchu tarcie zachowuje *mniej więcej tę samą wartość największą, jaką miało w chwili* zaczęcia się ruchu. Zwykle zmniejsza się cokolwiek.

Tarcie w chwili zaczęcia się ruchu, nazywa się także tarciem statycznem; tarcie podczas ruchu — kinetycznem. Tarcie statyczne jest wskutek uleżenia się ciała na podstawie nieco większe niż kinetyczne. (To wyjaśnia nam dlaczego ciało, znajdujące się na płaszczyznie pochyłej, zsuwa się dopiero wtenczas, gdy pochylenie jest dostatecznie wielkie).

Główną przyczyną tarcia zewnętrznego są nierówności powierzchni, które podczas ruchu muszą być albo starte, albo stosownie odkształcone, a w każdym razie sprawiają lekkie, ale bardzo częste wstrząśnienia, zużywające pracę siły pociągowej. Ruch wozu po nierównej, kamienistej drodze, jest jakoby powiększonym obrazem tego, co się dzieje przy tarciu ciał twardych; ruch na drodze błotnistej objaśnia tarcie w przypadku ciał miększych, mających pewien stopień plastyczności. Wygładzenie powierzchni zmniejsza tarcie, nie usuwa go jednak w zupełności.

Warunki, od których zależy wielkość tarcia między dwoma ciałami stałemi, starano się określić na drodze doświadczalnej. Oto są znalezione w tej mierze wypadki:

Doświadczenie uczy, że 1) *wielkość tarcia F* (t. j. siły działającej równolegle do drogi, a starającej się zahamować względny



Ryc. 111.

ruch dwu ciał) *jest proporcyonalna do siły P, która przyciska ciało ślizgające się do podstawy.*

Stosunek tarcia F do siły prostopadłej P, nazywa się spółczynnikiem tarcia; wartość jego zależy od rodzaju powierzchni, zarówno ciała ślizgającego się, jak podstawy; stosunek ten oznaczymy literą f:

$$\frac{F}{P} = f, \text{ czyli } F = f \cdot P.$$

2) *Tarcie nie zależy od wielkości powierzchni ślizgającej się*, gdyż n. p. przy podwojeniu powierzchni, siła P rozkłada się na pole podwójnej wielkości, wskutek czego (według 1) na każdej połowie powierzchni działa tarcie o połowę mniejsze — podwójna powierzchnia doznaje zatem takiego tarcia, jak pierwej pojedyncza.

3) *Tarcie nie zmienia się wiele, gdy prędkość ruchu się zmienia*; przy wielkich prędkościach jest ono atoli nieco mniejsze, aniżeli przy małych.

Celem wymierzenia spółczynnika tarcia dla różnych ciał, używa się sanek S (ryc. 111), ruchomych na poziomym torze T, obciążonych stosownym ciężarem P. Siły pociągowej F_1 dostarcza ciężar Q, działający na sanki za pośrednictwem sznurka i dynamometru AB, mierzącego natężenie tej siły pociągowej. Ponieważ tarcie jest siłą niemal stałą, przeto gdy siła pociągowa F_1, również stała, przewyższa tarcie F, ruch będzie jednostajnie przyśpieszony i odbywać się będzie pod wpływem siły wypadkowej $F_1 - F$. Wymierzenie tego ruchu prowadzi do obliczenia F, jak to okażemy na następującym przykładzie:

Sanki razem z obciążeniem ważą 5000 *gr*, zatem siła przyciskająca je pod podstawy (toru): $P = 5000$ *Gr*; masa sanek w układzie ciężarowym: $m = \frac{5000}{981} = 5{\cdot}097$. Dynamometr wskazuje podczas ruchu $F_1 = 1300$ *Gr*. Sanki przebywają drogę $s = 400$ *cm* w przeciągu czasu $t = 3$ *sek*.

Przyśpieszenie ruchu: $\gamma = \frac{2s}{t^2} = 88{\cdot}89$ *cm/sek*². Siła wypadkowa. poruszająca masę 5·097 jest: $F_1 - F = 5{\cdot}097 \times 88{\cdot}89 = 453$ *Gr*; zatem tarcie $F = 1300 - 453 = 847$ *Gr*. Nakoniec spółczynnik tarcia: $f = \frac{F}{P} = \frac{847}{5000} = 0{\cdot}17$.

Dla różnych ciał znaleziono następujące spółczynniki tarcia (są to stosunki dwu sił, zatem liczby niezależne od jednostek miar):

	f	φ
Pas rzemienny na metalu . .	0·56	$29\frac{1}{2}^0$
Metal na drzewie	0·5—0·6	27—31⁰
Drzewo na drzewie	0·25—0·5	14—27⁰

Ciało umieszczone na płaszczyźnie pochyłej zaczyna zsuwać się dopiero wtenczas, gdy kąt α, t. j. pochylenie płaszczyzny ku poziomowi, urośnie co najmniej do wartości $\varphi = \operatorname{arc\,tg} f$. Jeżeli bowiem ciężar ciała oznaczymy przez P, natenczas składowa jego, usiłująca posuwać ciało po płaszczyźnie pochylonej pod kątem α wynosi $P \sin \alpha$; siła przyciskająca je do płaszczyzny jest: $P \cos \alpha$, zatem tarcie $= Pf \cos \alpha$. Ruch będzie więc możliwy, gdy $P \sin \alpha \geqq Pf \cos \alpha$, czyli $\operatorname{tg} \alpha \geqq f$. Jeżeli więc φ oznacza najmniejsze pochylenie, przy którem zesuwanie się może nastąpić, to $\operatorname{tg} \varphi = f$, czyli $\varphi = \operatorname{arc\,tg} f$. W ogólności ślizganie się ciała, po jakiejkolwiek płaszczyźnie, może rozpocząć się dopiero wtenczas, gdy wzajemne działanie ciała i płaszczyzny jest pochylone względem prostopadłej do płaszczyzny, co najmniej pod kątem $\varphi = \operatorname{arc\,tg} f$. Kąt ten, zależny od spółczynnika tarcia, nazywamy **kątem tarcia**. Poprzedzająca tablica zawiera obok spółczynników f, także wartości kąta tarcia φ dla kilku par ciał.

Siła potrzebna do wprowadzenia w ruch ciała spoczywającego bywa pospolicie większa, aniżeli siła wystarczająca do utrzymania go w ruchu; to stosuje się zwłaszcza do ciał miększych. dla których tarcie statyczne może przewyższać kinetyczne nawet o $30^0/_0$.

Tarcie można znakomicie zmniejszyć, jeżeli ślizganie się ciała zastąpimy toczeniem; praktycznem zastosowaniem tego są wozy i koleje. Aby utrzymać walec, toczący się po płaszczyznie poziomej, w ruchu jednostajnym. musimy działać nań bez przerwy stałym momentem zewnętrznym; moment ten, utrzymujący jednostajne toczenie się walca, mimo oporu jaki ruch ten spotyka, równa się, jak okazało doświadczenie, iloczynowi siły przyciskającej walec do płaszczyzny (ciężaru walca) przez pewną, zwykle bardzo małą długość δ, zależną od rodzaju powierzchni; dla drzewa po drzewie δ wynosi około 1 *mm*, dla żelaza po żelazie około 0·05 *mm*. Tak n. p. jeżeli walec o promieniu r, ważący P, toczy się po płaszczyznie poziomej, a siła pociągowa F działa na oś walca w kierunku poziomym, wtenczas jest: $Fr = P\delta$, czyli $F = \frac{P\delta}{r}$.

Siła pociągowa potrzebna do poruszania wozów wynosi od $^1/_{10}$ do $^1/_{50}$ ciężaru, zależnie od dobroci drogi; dla pociągów kolejowych $^1/_{200}$ do $^1/_{300}$ ciężaru.

Pożytek tarcia: ono umożliwia chodzenie i jazdę, stanowi w istocie siłę zewnętrzną, która nas przy chodzeniu porusza; bez tarcia lokomotywa nie mogłaby poruszyć pociągu — koła jej obracałyby się, ale nie toczyłyby się naprzód; korzystamy zeń w hamulcach u wozów i u pociągów kolejowych; ono umożliwia przenoszenie energii (transmisyę) z motorów do maszyn roboczych za pośrednictwem pasów. Tarcie jest natomiast szkodliwe w tych przypadkach, gdy chodzi o zachowanie energii kinetycznej; ono sprawia stratę dzielności w motorach, transmisyach i t. p.

Zadania.

281) Znaleźć dalekość, do której dobiegnie człowiek, ślizgający się na łyżwach, ważący 65 *kg*, gdy rozpędzi się do prędkości 6 *m/sek*, a porusza się dalej bez pomocy zewnętrznej.

Odp. Tarcie $F = 0{\cdot}02 \times 65 = 1{\cdot}3$ *Kg*; przyśpieszenie $\gamma = -\frac{1{\cdot}3}{65} \times 9{\cdot}81 = 0{\cdot}19$ *m/sek*²; dalekość $s = \frac{v^2}{2\gamma} = 95$ *m*.

282) Jaką dzielność powinna mieć lokomotywa, jeżeli ma poruszać pociąg, ważący razem z lokomotową 300 *t*, z prędkością 10 *m/sek.*, na torze poziomym (spółczynnik tarcia $^1/_{250}$).

Odp. $\frac{300000}{250} \times \frac{10}{75} = 160$ koni.

283) Jakiej siły potrzeba do poruszenia bryły żelaznej, ważącej 200 *Kg*, spoczywającej na poziomych żelaznych podkładach.

Odp. 40 *Kg*.

284) Z jakiem przyśpieszeniem zesuwa się kawałek mosiądzu, ważący 5 kg, po desce ($f = 0·6$) pochylonej do poziomu pod kątem 35^0?

Odp. $\gamma = (5 \sin 35^0 - 0·6 \times 5 \times \cos 35^0) \times \frac{981}{5} = 80·5\ cm/sek^2$.

285) Na desce drewnianej leży drewniany sześcian; orzec, czy przy stopniowem pochylaniu się deski sześcian stoczy się na dół, czy zesunie się? *Odp.* Zesunie się.

ROZDZIAŁ XI.

Własności cieczy.

152. Zasadnicze własności cieczy. Najwybitniejszem znamieniem stanu ciekłego, czyli płynnego materyi, jest zupełny brak sztywności; najmniejsza, byle trwale działająca siła, zdoła cząstki cieczy przesuwać nieograniczenie jedne obok drugich. Własność tę posiadają ciecze wspólnie z gazami. Różnią się jednak od gazów tem, że nie posiadają dążności do nieograniczonego rozszerzania się, lecz podobnie jak ciała stałe, mają właściwe sobie objętości, zależne w małym tylko stopniu od temperatury i od zewnętrznego ciśnienia.

Pomiędzy stałym a ciekłym stanem materyi istnieje nieskończony szereg stanów pośrednich, stanowiących przejście od stanu stałego do ciekłego, bądź to przez stopniowe zmniejszanie się sprężystości postaci, bądź też przez rosnącą coraz więcej plastyczność, w połączeniu ze ścieśnianiem się granic sprężystości. Przykładem pierwszego rodzaju przejścia byłby n. p. szereg galaret, o zwiększającej się coraz bardziej zawartości wody; drugi rodzaj stopniowej zamiany ciała stałego na ciecz widzimy w szkle, które przy rozgrzewaniu stopniowo mięknie, zanim zupełnie się stopi.

Różne ciecze różnią się znacznie pod względem ruchliwości cząstek. Jeżeli pochylimy naczynie zawierające wodę, alkohol lub eter, natenczas płyny te zajmą w bardzo krótkim czasie nowe położenia równowagi; natomiast syrop, miód, olej, maź lub smoła spływają o wiele powolniej, w końcu jednak zajmują takież same położenia równowagi jak tamte. Własność ta, zwana w mowie potocznej niewłaściwie gęstością, nazywa się lepkością albo zawiesistością płynów — w przeciwstawieniu do ruchliwości, jaką posiada n. p. woda, albo w wyższym stopniu eter. Objawy te dowodzą, że podczas ruchu cząstek, dopóki postać płynu odkształca się, istnieje opór utrudniający ten ruch, t. zw. tarcie wewnętrzne; wartość jego jest w różnych płynach różna. Tarcie wewnętrzne wpływa jednak tylko na szybkość, z jaką pewna siła zewnętrzna sprowadza odkształcenie; najmniejsza bowiem siła, działająca dostatecznie długi czas, wystarczy do przelania płynu w inną formę. Tak n. p. smoła, podobna na pozór do ciała stałego, rozpływa się z biegiem czasu w naczyniu i przyjmuje poziomą powierzchnię, tak samo jak woda, która czyni to w czasie daleko krótszym (ust. 147).

Tarcie wewnętrzne pojawia się tylko podczas ruchu, mianowicie podczas odkształcania się postaci płynów. W stanie równowagi tarcia tego niema; z tego powodu zarówno *płyny ruchliwe, jak i lepkie, podlegają jednakowym prawom równowagi.*

W wykładzie praw ruchu i równowagi cieczy pomocne jest niekiedy pojęcie cieczy doskonałej. Ciecz taka miałaby następujące własności: 1) zupełną nieściśliwość ($\sigma = \infty$), a zatem objętość niezależną od ciśnienia zewnętrznego; 2) zupełny brak lepkości, t. j. doskonałą ruchliwość cząstek. Żadna ciecz rzeczywista nie jest w tem znaczeniu doskonałą.

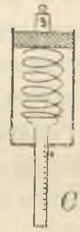
153. Kierunek ciśnienia w cieczach. Brak sprężystości postaci ($\tau = o$) w cieczach sprawia, że ciśnienia styczne do powierzchni, czy to zewnętrznej, czy pomyślanej wewnątrz cieczy, nie mogą utrzymywać się trwale. Gdy na powierzchni zewnętrznej, albo na jakiejkolwiek powierzchni pomyślanej we wnętrzu płynu, powstaną ciśnienia styczne, wówczas cząstki płynu usuwają się pod ich działaniem (szybko lub wolno), t. j. płyną wzdłuż powierzchni, wskutek czego równowaga staje się niemożliwą. To samo stosuje się widocznie i do ciśnień ukośnych, które można rozłożyć na składową styczną i prostopadłą do powierzchni. Z tego wynika, że *na każdej powierzchni rzeczywistej, albo pomyślanej w płynie nieruchomym, ciśnienie działa prostopadle do powierzchni.*

Podczas ruchu atoli, zanim wyrównanie równowagi nastąpi, wzajemne oddziaływania dwu części płynu są zwykle ukośne względem odgraniczającej je powierzchni; jest to jednak możliwe tylko dzięki lepkości płynów, która sprawia, że część poruszająca się pociąga za sobą części sąsiednie — a więc działa na nie w kierunku stycznym.

W płynie doskonałym, nie mającym lepkości, nie mogłyby istnieć takie działania styczne; ciśnienia byłyby prostopadłe do powierzchni zarówno podczas ruchu, jak w stanie równowagi.

154. Prawo Pascala. *Jeżeli na ciecz będącą w spoczynku nie działają żadne siły zewnętrzne, prócz ciśnień na powierzchnię zewnętrzną, wtenczas ciśnienie wewnętrzne jest we wszystkich częściach płynu jednakowe i nie zależy od kierunku powierzchni uciskanej* (t. zn. jest we wszystkich kierunkach jednakowe). Aby wyjaśnić znaczenie ciśnienia wewnętrznego w płynie, opiszemy naprzód przyrząd, za pomocą którego możnaby to ciśnienie okazać i zmierzyć.

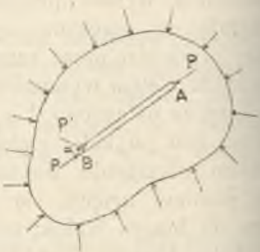
Przyrząd taki wyobraża w przekroju ryc. 112. Jest to walec W w którym porusza się szczelnie, ale z małem tarciem, tłok, którego powierzchnia wynosi przypuśćmy 1 cm^2. Pod tłokiem znajduje się sprężyna, opierająca się na trzonku C, który wychodzi przez szczelny otwór w dnie walca na zewnątrz. Celem wymierzenia sprężystości sprężyny, pomyślmy, że ustawiono tłok w położeniu poziomem i położono nań po kolei ciężarki: 1 Gr, 2 Gr i t. d. Przy każdem obciążeniu wsuwamy trzonek C tak głęboko, aby pomimo ugięcia się sprężyny, tłok dochodził zawsze do brzegu walca; zaznaczamy przytem na trzonku po kolei kreski 1, 2 i t. d., oznaczające ciśnienia: 1 Gr/cm^2, 2 Gr/cm^2 i t. d. Wykonanie takiego przyrządu do mierzenia ciśnień nastręczałoby w rzeczywistości różne trudności. Opisujemy go tylko w tym celu, aby za jego pomocą objaśnić istotę i własności ciśnienia w płynach. Jeżeli zanurzymy przyrząd opisany w płynie, wówczas ciśnienie płynu na tłok ściśnie sprężynę; skoro jednak za pomocą trzonka przysuniemy tłok napowrót do brzegu walca, wówczas odnośna liczba na trzonku wskazywać będzie, w Gr/cm^2, wartość ciśnienia, jakie płyn wywiera w tem miejscu, gdzie przyrząd się znajduje, w kierunku prostopadłym do powierzchni tłoka.



Ryc. 112.

Prawo Pascala odnosi się do cieczy, na którą, prócz zewnętrznych ciśnień, nie działają żadne siły — należy więc wyobrazić sobie ciecz nie ciężką, albo zaniedbać różnice ciśnień wynikające z własnego ciężaru cieczy. Jeżeli chodzi o wywarcie ciśnienia zewnętrznego na całą powierzchnię płynu — jak to wskazuje ryc. 113 — postępujemy zazwyczaj drogą pośrednią, mianowicie (ryc. 114) zamykamy płyn w naczyniu walcowatem i wywieramy, za pośrednictwem tłoka, ciśnienie na jednę część jego powierzchni. Płyn ściśnięty rozpiera ściany naczynia; ściany, na mocy sprężystości swej, wywierają nawzajem ciśnienie na płyn. Skutek jest taki, jak gdyby ciśnienie działało bezpośrednio na całą powierzchnię zewnętrzną płynu.

Po tych objaśnieniach przystąpimy do udowodnienia prawa Pascala. Pomyślmy płyn znajdujący się w równowadze, pod działaniem takich ciśnień zewnętrznych. Weźmy pod uwagę część jego, ograniczoną powierzchnią bardzo wązkiego walca AB (ryc. 113) mającego płaskie. prostopadłe do osi podstawy. Równowaga tej części płynu nie przestałaby istnieć, gdyby walec płynny skrzepł na ciało stałe, nie zmieniwszy jednak postaci, objętości, ani masy (ust. 87). Ciśnienia wywierane na walec przez płyn otaczający są jedynemi działającemi nań siłami; one muszą przeto równoważyć się wzajemnie (na działanie ciężkości nie zważamy obecnie). Kierunek tych ciśnień, jest jak wiemy, prostopadły do powierzchni (ust. 153). Równowaga walca w kierunku AB żąda, żeby parcia P, działające na obie jego podstawy, były równe.



Ryc. 113.

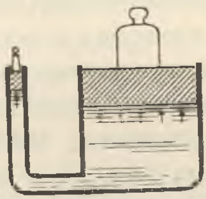
Ponieważ podstawy te mają pola jednakowej wielkości S, przeto ciśnienia, liczone na jednostkę powierzchni, t. j. $p = \frac{P}{S}$, w punktach A i B muszą być jednakowe. Żeby się przekonać, że ciśnienie p nie zależy od kierunku powierzchni na którą działa, dość będzie przyjąć, że n. p. podstawa B nie jest prostopadła do osi walca, lecz pochylona pod jakimkolwiek kątem. Parcie P' na tę podstawę tworzyć będzie wówczas n. p. kąt α z osią walca. Parcie P na podstawę A będzie teraz zrównoważone składową siły P', równoległą do AB, t. j. siłą $P' \cos \alpha$; zatem: $P = P' \cos \alpha$, czyli $P' = \frac{P}{\cos \alpha}$. Siła P' jest większa niż P; ponieważ jednak podstawa, na którą ona działa jest większa w tym samym stosunku, gdyż równa się $\frac{S}{\cos \alpha}$, przeto natężenie ciśnienia p, w kierunku ukośnym, będzie takie same, jak w prostopadłym.

Możnaby to zasadnicze prawo równowagi płynów sprawdzić przyrządem do mierzenia ciśnień (ryc. 112), obracając go w różne strony około punktu A (ryc. 114) i przenosząc następnie do B. Należałoby jednak przyjąć, albo że ciężkość nie istnieje. albo że ciężar własny płynu jest nieznaczny, w porównaniu z ciśnieniami zewnętrznemi; w przeciwnym razie ciśnienie w niższym punkcie B byłoby cokolwiek większe.

[Ażeby uzmysłowić sobie ustrój cieczy wszechstronnie ściśnionej, pomyślmy, że ciecz składa się z mnóstwa bardzo drobnych a ślizgich ziaren. Jakikolwiekby był kształt naczynia ziarenka te rozsuną się i ułożą pod ciśnieniem tak, że każde ziarno będzie równomiernie uciskane przez sąsiednie i nawzajem uciskać je będzie jednakowo na wszystkie strony].

Wniosek 1. Dowód prawa Pascala nie zmieniłby się wcale, gdybyśmy przyjęli. że jedna z podstaw walca idealnego, którego użyliśmy do dowodzenia, znajduje się na zewnętrznej powierzchni

Ryc. 114.



Ryc. 115.

cieczy, t. j. że stanowi część ściany naczynia. Wnosimy stąd, że *ciśnienie, które ciecz ściśniona wywiera na ściany naczynia, jest również jednostajne i równa się ciśnieniu zewnętrznemu.*

Wniosek 2. Wyobraźmy sobie, że niektóre części ściany naczynia są ruchome, nakształt tłoków; na tłoki niech działają siły zewnętrzne, n. p. ciężary ustawione na nich (ryc. 115); pytamy, jak wielkie powinny być te siły, aby się wzajemnie równoważyły — jeżeli ruchowi tłoków nie stoi na przeszkodzie tarcie. Siły, działające na tłoki z zewnątrz, są w tym przypadku zrównoważone przez parcia płynu, działające na ich ściany wewnętrzne. Oznaczmy pola tłoków, wystawione na ciśnienie płynu S i S', siły działające na nie z zewnątrz przez F i F' natenczas będzie $F = pS$, $F' = pS'$ zatem

$$\frac{F}{F'} = \frac{S}{S'}.$$

Siły zewnętrzne, działające na ruchome a płaskie części ścian naczynia, zawierającego ścieśnioną ciecz, równoważą się, jeżeli są proporcyonalne do pól tych ścian.

Jeżeli n. p. pole tłoka większego (ryc. 115) jest 100 razy większe niż pole tłoka mniejszego, wówczas — powiada Pascal — »jeden człowiek cisnący na tłok mnieszy zdoła zrównoważyć ciśnienie 100 ludzi na tłok większy, a pokona ciśnienie dziewięćdziesięciu dziewięciu«. Zastosowaniem tego prawa jest prasa hidrauliczna.

155. Sprężystość cieczy. Ciśnienie wewnętrzne w cieczach, podobnie jak w ciałach stałych, jest zawsze skutkiem odkształcenia, a mianowicie zgęszczenia cieczy. Ciecze nie posiadają sprężystości postaci, z założenia jest więc $\tau = 0$; natomiast posiadają one sprężystość objętości i są w tej mierze doskonale sprężyste. Po wielu bezowocnych usiłowaniach, została ściśliwość cieczy dowiedzioną doświadczalnie przez Cantona w r. 1762.

Trudność tego rodzaju doświadczeń leży w tem, że ciecz badana musi znajdować się w naczyniu, n. p. w cylindrze zaopatrzonym w tłok, jak na ryc. 114. Ciśnienie wywarte na tłok zgęszcza ciecz, ale w wyższym jeszcze stopniu rozdyma samo naczynie. Wskutek tego przesunięcie się tłoka nie jest bynajmniej miarą ściśliwości samej cieczy.


Ryc. 116.

Żeby wpływ ten ile możności zmniejszyć, wywiera się ciśnienie nietylko na wewnętrzną ale i na zewnętrzną stronę naczynia. Fig. 116 wyobraża przyrząd zgęszczający, zbudowany na tej zasadzie przez Örsteda. Na obszernym grubościennym walcu szklanym nakitowana jest u góry oprawa metalowa, kończąca się cylindrem, zawierającym szczelny tłok, dający się wtłaczać za pomocą śruby. We wnętrzu tego walca umieszcza się bańkę szklaną, wydłużoną u spodu w wązką, niemal włoskowatą szyjkę; bańkę tę napełnia się całkowicie cieczą, której ściśliwość ma być badana. Dolny, otwarty koniec szyjki zanurzony jest w rtęci, znajdującej się w małej czarce, na dnie walca. Wszystko to zalane jest całkowicie wodą, sięgającą aż pod tłok. Ciśnienie wywarte przez tłok na tę wodę przenosi się bez zmiany (ust. 154), przez rtęć na ciecz zawartą w bańce; jednocześnie działa ono także na zewnętrzną stronę bańki.

Doświadczenie okazuje, że po wywarciu ciśnienia $= p$, za pomocą tłoka, rtęć podnosi się w szyjce, tem wyżej, im większe jest ciśnienie. Po zniesieniu ciśnienia ciecz odskakuje od razu do objętości pierwotnej. To dowodzi, że ciecz jest istotnie ściśliwa, a nawet w wyższym stopniu, aniżeli szkło, z którego zrobioną jest bańka. Albowiem pod wpływem obustronnego, jednostajnego ciśnienia p, wewnętrzna pojemność bańki zmniejsza się (ust. 141) w tym stosunku, że każdy cm^3 tej pojemności zamienia się na $\left(1-\frac{p}{\sigma'}\right)$ cm^3; σ' oznacza tu spółczynnik ściśliwości szkła. Gdyby tedy ciecz nie była ściśliwą, rtęć nie podnosiłaby się w szyjce, lecz przeciwnie, ciecz byłaby wyparta na zewnątrz.

Ażeby zużytkować to doświadczenie do pomiaru spółczynnika ściśliwości cieczy $= \sigma$, należy szyjkę bańki zaopatrzyć podziałką i wycechować uprzednio bańkę, przez wyważenie wodą lub rtęcią. W ten sposób dowiemy się, że całkowita pojemność bańki, aż po koniec szyjki (= pierwotnej objętości cieczy) wynosi V cm^3; pojemność zaś aż do tej kreski, do której dotarła rtęć $= v\ cm^3$. Pod ciśnieniem jednakże ta ostatnia pojemność znaczy tylko $v\left(1-\frac{p}{\sigma'}\right) cm^3 = V'$, i to jest istotna objętość cieczy zgęszczonej. Na podstawie tych danych obliczamy (ust. 135):

$$\sigma = \frac{pV}{V-V'} = \frac{pV}{V-v\left(1-\frac{p}{\sigma'}\right)}.$$

Wielkość ciśnienia p ocenia się na podstawie prawa Boylego (rozdz. nast. ust. 180) według stopnia zgęszczenia powietrza w rurce umieszczonej obok bańki[1]).

Tablica spółczynników ściśliwości cieczy.
(w milionach Gr na cm^2).

	σ		σ
Rtęć 0°	263·7	Alkohol etyl. 15° . .	11·3
Woda 0°	20·0	Eter etylowy 0° . .	7·1
» 15°	21·9	» » 15° . .	5·76
Dwutlenek węgla 13° .	0·17	Powietrze	0·001

[1]) Zamiast śruby, tłoka i rurki B mierzącej ciśnienie, dogodniej jest użyć

Z przytoczonych w tej tablicy płynów najtrudniej ściśliwą jest rtęć; inne są wogóle tem łatwiej ściśliwe, im bardziej są skłonne do ulatniania się, n. p. eter, a zwłaszcza płynny dwutlenek węgla. Ogrzanie cieczy zwiększa wogóle ściśliwość — z wyjątkiem wody, która do 60° (w przybl.) zachowuje się przeciwnie.

Proporcyonalność zgęszczenia do ciśnienia, jakiej wymaga prawo Hooke'a, okazała się prawdziwą tylko dla małych zgęszczeń. Im więcej zgęszczamy ciecz, tem trudniej staje się ona ściśliwą; n. p. woda, pod ciśnieniem 3000 atmosfer, zmniejsza objętość swą tylko o $^1/_{10}$ część pierwotnej objętości; gdyby ściśliwość jej była stałą, mielibyśmy zamiast tego : $\theta = \frac{3000 \times 1033}{20 \times 10^6}$ t. j. około 0·15.

Sprężystość objętości jest istotną przyczyną ciśnienia wewnętrznego w cieczach; ono jest zawsze skutkiem zgęszczenia cieczy przez siły zewnętrzne. Ciecz ściśniętą w przyrządzie takim n. p. jak ryc. 114, albo 115, albo 116, możnaby porównać do sprężyny działającej na wszystkie strony; albo nawet do zbioru takich sprężyn, bo każda cząstka płynu, zgęszczona, usiłuje rozszerzyć się, a wskutek tego ciśnie na sąsiednie cząstki. Pospolicie jednak mówi się tylko o ciśnieniach wewnątrz płynu i na powierzchni jego, a nie uwzględnia się wcale zmian gęstości i objętości, albowiem są one stosunkowo bardzo małe, nawet przy wielkich ciśnieniach.

Zadania.

286) Naczynie zamknięte, napełnione wodą, połączone jest z dwiema rurami walcowemi, w których mieszczą się tłoki o średnicach 2 *cm* i 10 *cm*. Obliczyć natężenie siły, która powinna działać na drugi tłok, aby zrównoważyła siłę 40 *Kg*, działającą na pierwszy.

Odp. $30 \times \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 750$ *Kg*.

287) Okazać, że zasada zachowania energii stosuje się do poprzedzającego przypadku, gdy tłoki poruszają się pod wpływem działających na nie sił.

Odp. Przy posunięciu o x mniejszy tłok otrzymuje pracę: $L = 30\,x$; większy posuwa się o jednocześnie o y, przyczem $y \,.\, 10^2 = x \,.\, 2^2$, z powodu równości wypartych objętości płynu. Praca wydana przez większy tłok $= 750\,y = 750\,x \left(\frac{2}{10}\right)^2 = L$.

---

powietrza zgęszczonego w osobnym zbiorniku, celem wywarcia ciśnienia na wodę w słoju *C*. Wartość ciśnienia wskazuje osobny przyrząd (manometr), połączony ze zbiornikiem.

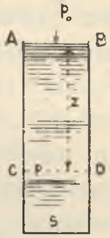
288) Ile atmosfer wynosi ciśnienie panujące w wodzie przy powyższem obciążeniu tłoków (licząc atmosferę $= 1033$ *Kg/cm²*)?
Odp. 9·24.

289) Znaleźć spółczynnik ściśliwości mieszaniny wody 0° z rtęcią 0°, w równych częściach na objętość.

Odp. $\sigma = 1 : \frac{1}{2}\left(\frac{1}{263 \cdot 7} + \frac{1}{20 \cdot 0}\right) = 372$ *t/cm²*.

290) Szklana bańka, wydłużona w szyjkę o średnicy $\frac{1}{2}$ *mm* w świetle, zawiera 100 *cm³* wody; o ile cofnie się powierzchnia wody w szyjce, jeżeli poddamy naczynie zewnątrz i wewnątrz ciśnieniu 5 atmosfer (σ dla szkła: 410, dla wody: 22·6 *t/cm²*). *Odp.* 110 *mm.*

156. Ciśnienia wywołane przez ciężar cieczy. Działanie ciężkości jest przyczyną niejednostajności ciśnienia w płynach, albowiem części głębiej położone unoszą na sobie ciężar części znajdujących się nad niemi, wskutek czego są bardziej od tamtych ściśnięte.



Ryc. 117.

Wyobraźmy sobie ciecz w słoju walcowatym, pionowym, którego dno poziome ma pole S (ryc. 117). Na poziomą powierzchnię cieczy AB niech działa jednostajne ciśnienie p_0, wywarte przez otaczającą atmosferę. Gdyby ciecz nie była ciężką, wtenczas w całej jej masie ciśnienie byłoby $= p_0$ (ust. 154). W rzeczywistości zwiększać się ono będzie z głębokością; obliczmy natężenie jego n. p. w przekroju CD, znajdującym się w głębokości z pod powierzchnią. Na przekroju tym cięży słup cieczy $ABCD$, a nadto ciecz ta przenosi na CD ciśnienie zewnętrzne p_0. Całkowite parcie cieczy z góry na dół, na przekrój CD, będzie tedy: $p_0 S +$ ciężar masy $ABCD$, czyli: $p_0 S + Szgd$; d i g oznaczają tu gęstość cieczy, którą uważać będziemy jako jednostajną, oraz natężenie ciężkości w danem miejscu. Podzieliwszy to parcie przez pole S, otrzymamy natężenie ciśnienia p w przekroju CD, mianowicie:

$$p = p_0 + zgd. \tag{1}$$

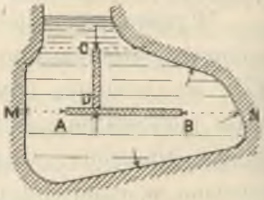
Zważywszy, że d oznacza masę w jednostce objętości, przeto gd ciężar właściwy cieczy, który oznaczymy przez δ (ust. 92), możemy także napisać:

$$p = p_0 + \delta z. \tag{2}$$

Równanie ostatnie zawiera w sobie następujące prawo: *ciśnienie w cieczy nieruchomej, o gęstości jednostajnej, rośnie proporcyonalnie do głębokości: przyrost ciśnienia, przypadający na jednostkę pogłębienia, równa się ciężarowi właściwemu cieczy.*

157. Prawa równowagi cieczy ciężkich. Twierdzenie powyższe, określające zależność ciśnień od głębokości w cieczy ciężkiej a jednolitej jest nietylko wtenczas ważne, gdy naczynie ma postać pionowego walca, lecz stosuje się ogólnie do naczyń wszelkich kształtów; wynika to z następujących praw, dotyczących rozmieszczenia ciśnień w cieczy ciężkiej, znajdującej się w równowadze:

1) *We wszystkich cząstkach tej samej cieczy, leżących na jednej płaszczyznie poziomej, ciśnienie jest jednakowe.* O prawdziwości tego prawa przekonamy się natychmiast, gdy odgraniczymy z cieczy, w myśli, nieskończenie cienki walec, którego pionowe podstawy A i B (ryc. 118) leżą w tym samym poziomie MN. Równowaga bowiem będzie tylko wtenczas możliwa, gdy ciśnienia na podstawy będą równe; ciężar walca i ciśnienia na boczną powierzchnię, jako prostopadłe do tamtych ciśnień, równowważą się wzajemnie, niezależnie od ciśnień na podstawy.



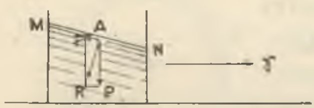
Ryc. 118.

2) *W każdym punkcie w cieczy ciśnienie jest we wszystkich kierunkach jednakowe,* t. j. nie zależy od kierunku powierzchni uciskanej; inaczej mówiąc, każda cząstka cieczy jest ze wszystkich stron jednostajnie ściśnięta, jakkolwiek różne cząstki podlegają ciśnieniom różnej wartości. Prawa tego dowodzi się tak samo, jak odpowiedniego twierdzenia w ust. 154. Następstwem tego twierdzenia jest, że ciśnienia na ścianę naczynia w punktach M i N (ryc. 118) są jednakowe (działają zawsze prostopadle na ściany) i równają się ciśnieniom wewnętrznym w A lub B.

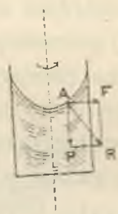
3) *Różnica ciśnień w jakichkolwiek dwu punktach, w cieczy nieruchomej, jednolitej, równa się iloczynowi z ciężaru właściwego cieczy przez różnicę głębokości tych punktów.*

Przyjmijmy naprzód, że dwa punkty C i D (ryc. 118) leżą na tym samym pionie, jeden w głębokości z pod drugim. Równowaga walca pionowego CD, o przekroju S, a podstawach poziomych wymaga, aby parcie z dołu na podstawę D, przewyższało parcie z góry, na podstawę C, o ciężar samego walca, który wynosi $\delta z S$. Różnica ciśnień, obliczonych na jednostkę powierzchni, będzie zatem δz. Tyleż wynosi różnica ciśnień w punktach B i C, nieleżących na jednym pionie, ale mających tę samą różnicę głębokości, albowiem B i D leżą w tym samym poziomie i mają ciśnienia równe.

158. Wniosek 1. Postać powierzchni swobodnej. Ta część zewnętrznej powierzchni cieczy, w której ona nie dotyka się stałych ścian naczynia, nazywa się powierzchnią swobodną, albo zwierciadłem cieczy. Na powierzchni swobodnej ciecze graniczą zazwyczaj z powietrzem, które wywiera na nie ciśnienie jednostajne. *Jeżeli oprócz ciężkości i jednostajnego zewnętrznego ciśnienia, nie działają na ciecz żadne inne siły zewnętrzne, wtenczas powierzchnia swobodna cieczy jest płaska i pozioma.* Ogólniej mówiąc, powierzchnia swobodna



Ryc. 119.



Ryc. 120.

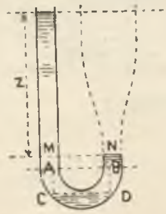
jest prostopadła do kierunku sił, działających na cząstki, znajdujące się na powierzchni. W każdej bowiem płaszczyźnie poziomej, pod działaniem ciężkości, ciśnienie jest jednostajne, lecz wartość jego jest w każdej inna; jeżeli tedy ciśnienie na powierzchni swobodnej jest jednostajne (ciśnienie atmosfery, lub innego płynu lżejszego, który z płynem uważanym się nie miesza — jak n. p. oliwa i woda, rtęć i woda), natenczas nawzajem powierzchnia ta musi być poziomą.

Jeżeli obok ciężkości działają inne siły zewnętrzne, wtenczas powierzchnia nie będzie w ogólności poziomą. Dajmy nato, że naczynie porusza się w kierunku poziomym, ruchem jednostajnie przyspieszonym, z przyśpieszeniem γ. Na cząstkę A (ryc. 119) działa wówczas ciężar $AP = mg$ i oddziaływanie przeciw przyśpieszeniu (ust. 46): $AF = m\gamma$. Powierzchnia będzie w tym razie pochylona i prostopadła do wypadkowej AR. — Ciecz obracająca się razem z naczyniem około pionowej osi przybiera wklęsłą (paraboliczną) powierzchnię (ryc. 120), albowiem na każdą cząstkę A działa, obok ciężaru AP, oddziaływanie przeciw przyśpieszeniu dośrodkowemu (siła odśrodkowa) AF, które w samej osi jest zerem, a powiększa się proporcyonalnie do odległości od osi.

Ciecze rozlane na wielkich obszarach, w obrębie których kierunek ciężkości nie jest stały (morza, wielkie jeziora) mają powierzchnię zakrzywioną, wszędzie prostopadłą do kierunku sił działających na cząstki. Powierzchnia swobodna i wszystkie powierzchnie głębsze, w których ciśnienie jest jednostajne, są więc »powierzchniami poziomu« t. j. stałego potencyału (ust. 125).

Powierzchnia cieczy zakrzywia się także pod wpływem sił molekularnych pochodzących od ścian naczynia i od głębszych cząstek samej cieczy (włoskowatości). Zjawisko to jest znaczne tylko w cieczach zupełnie swobodnych (krople) i w naczyniach wązkich; w tych przypadkach sprawia ono jednak znaczne zboczenia od powyższych praw równowagi, w których uwzględniono tylko działanie ciężkości (patrz tom II, ust. 127).

159. Wniosek 2. Naczynia połączone. W przypadku, gdy ciecz znajduje się w równowadze pod działaniem samej tylko ciężkości (i jednostajnego ciśnienia atmosfery $= p_0$ na powierzchnię), cząstki znajdujące się w tej samej płaszczyznie poziomej podlegają jednakowemu ciśnieniu, c h o c i a ż b y p ł a s z c z y z n a t a w y c h o d z i ł a k i l k a k r o t n i e z a o b r ę b n a c z y n i a — byle cząstki te należały do tej samej, nieprzerwanej masy ciekłej. To zdarza się w naczyniach dwu— albo wieloramiennych (ryc. 121 a), albo w naczyniach złożonych z kilku oddzielnych części, połączonych rurami (ryc. 121 b). W punktach takich, jak A i B, albo C i D, ciśnienie jest jednakowe, gdyż one leżą w tym samym poziomie, a z jednego można dostać się do drugiego nie wychodząc z tej samej masy ciekłej; (w tych warunkach można bowiem zastosować wprost dowód podany w ust. 157, przechodząc od A do B drogą złożoną z krótkich kawałeczków poziomych i pionowych.)



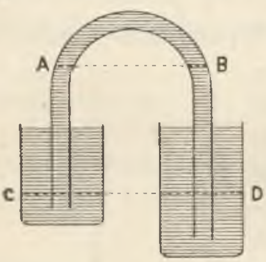
Ryc. 121 a.

W naczyniu takiem jak na ryc. 121 b, część cieczy (w lewarze łączącym naczynia) jest wzniesiona nad poziom powierzchni swobodnej, gdzie ciśnienie $= p_0$. W cząstkach tej porcyi cieczy (A lub B) ciśnienie jest mniejsze od p_0.

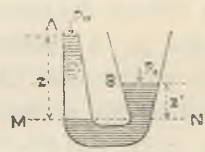
W przypadku gdy jedno z ramion naczynia jest zamknięte od góry ścianą poziomą N (ryc. 121 a), ciecz ciśnie na tę ścianę z dołu do góry, zawsze w kierunku prostopadłym i zawsze z natężeniem $p = p_0 + z\delta$, w czem z oznacza głębokość tej ściany pod powierzchnią swobodną, głębokość mierzoną w kierunku pionowym.

Ciśnienie na N jest zrównoważone oddziaływaniem ściany; możemy jednak zrównoważyć je również ciężarem cieczy, jeżeli usuniemy ścianę N, a przedłużywszy drugie ramię naczynia do góry, napełnimy je tą samą cieczą, która znajduje się w pierwszym ramieniu, w taki sposób, żeby powierzchnie cieczy w obu ramionach leżały w tym samym poziomie. W naczyniach połączonych z sobą, napełnionych tą samą cieczą wszystkie powierzchnie swobodne muszą zatem leżeć w tymsamym poziomie.

Nakoniec, drugie ramię naczynia (ryć. 121 a) możemy napełnić cieczą o gęstości odmiennej; wówczas jednak, gdy nastąpi równowaga, wysokości z i z' obu cieczy nad poziomem M (ryc. 122),



Ryc. 121 b.



Ryc. 122.

w którym obie ciecze się stykają, nie będą jednakowe. W poziomie tym pierwsza ciecz sprawia ciśnienie: $p_0 + z\delta$, działające na dół; druga ciecz działa tamże do góry ciśnieniem: $p_0 + z'\delta'$. W przypadku równowagi ciśnienia te na obie strony powierzchni zetknięcia M powinny być równe, bądzie przeto: $p_0 + z\delta = p_0 + z'\delta'$, a więc:

$$\frac{z}{z'} = \frac{\delta'}{\delta},$$

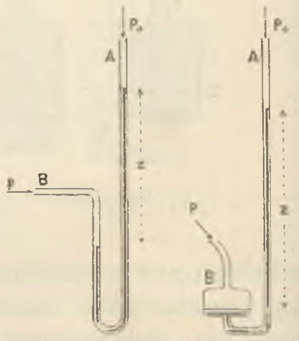
t. j. *stosunek wysokości słupów dwu cieczy, nad wspólną ich powierzchnią zetknięcia się, równa się odwrotnemu stosunkowi ciężarów właściwych.*

Wszystko to jest niezależne od postaci naczyń (zastrzega się jedynie, żeby naczynia nie były tak wązkie, iżby zaznaczał się wpływ włoskowatości; tom II ust. 127).

160. Mierzenie ciśnień sposobem manometrycznym. Opierając się na prawach wyłożonych w poprzedzającym ustępie, opiszemy tu sposób często używany, wyrażania ciśnień za pomocą wysokości słupów cieczy. Warstwa, albo słup cieczy o wysokości z, w naczyniu jakiejkolwiek postaci, wywiera na poziome dno naczynia ciśnienie:

$$p = zdg, \text{ albo } p = z\delta.$$

Gęstość cieczy d i natężenie ciężkości g uważamy jako znane. Wzory powyższe okazują, że do każdego ciśnienia p należy ściśle określona wysokość $z = \frac{p}{\delta}$ słupa cieczy, który ciężarem swym wywiera na dno to właśnie ciśnienie p. Wysokość ta określa wartość ciśnienia równie dokładnie, jak liczba p, wyrażająca je w jednostkach siły na jednostkę powierzchni. Długość z, należącą do ciśnienia p, nazywamy wysokością ciśnienia p w danej cieczy. Zazwyczaj określa się ciśnienie za pośrednictwem wysokości słupów rtęci lub wody; przytem należy zawsze rozumieć, że: rtęć posiada temperaturę 0°, w której gęstość jej wynosi 13·5956 gr/cm^3; woda zaś temperaturę 4°, której odpowiada gęst. 1·000 gr/cm^3.



Ryc. 123.

Ten sposób mierzenia ciśnień, przez równoważne wysokości słupów cieczy, nazywa się manometrycznym, od nazwy manometrów, t. j. przyrządów służących do mierzenia ciśnień (gr. manos = rozcieńczony, służą one bowiem także do pomiaru stopnia rozrzedzenia, lub zgęszczenia gazów). Ryc. 123 wyobraża t. zw. manometry otwarte, które wskazują ciśnienia bezpośrednio pod postacią słupów cieczy. Są to naczynia dwuramienne, dowolnej postaci, napełnione zazwyczaj rtęcią. Ramię A jest otwarte i dopuszcza do wnętrza powietrze atmosfery, które wywiera na ciecz pewne ciśnienie p_0; ramię B natomiast łączymy np. ze zbiornikiem gazu, gdzie istnieje ciśnienie p, mające się określić za pomocą manometru. Rtęć podnosi się w ramieniu otwartem, albo zniża się w niem, zależnie od tego, czy ciśnienie p wywarte na powierzchnię rtęci w ramieniu B jest większe, czy mniejsze, aniżeli ciśnienie, jakie przez A wywiera otaczające powietrze. Pionowy odstęp z powierzchni rtęci w obu ramionach manometru mierzy różnicę pomiędzy ciśnieniem szukanem, a ciśnieniem powietrza, w myśl równania, znanego nam z poprzedzających ustępów.

$$p - p_0 = zgd, \text{ albo } p - p_0 = z\delta.$$

Celem porównania miar manometrycznych ciśnienia z miarami bezwzględnemi i ciężarowemi wykonamy następujący rachunek.

Przyjąwszy $g = 981$, znajdziemy, że słup rtęci o wysokości 1 *cm* wywiera ciśnienie: $p = 13{\cdot}5956 \times 981 = 13\,337$ *dyn* na cm^2. Z tego wypada następująca tabliczka jednostek ciśnienia:

Centymetr rtęci (*cm. rt.*)	$= 13337$ dyn/cm^2.
» »	$= 13{\cdot}5956$ Gr/cm^2.
Centymetr wody (*cm. w.*)	$= 981$ $dyn/cm^2 = 1$ Gr/cm^2.
$Gr/cm^2 = 1$ *cm. w.*	$= 0{\cdot}0735548$ *cm rt.*

Ciśnienie zgd odpowiadające słupowi cieczy o wysokości z, o gęstości d, będzie dopiero wtenczas dostatecznie określone, gdy obok tych dwu czynników znanem będzie natężenie ciężkości g w miejscu obserwacyi. Słup rtęci, tej samej wysokości, przedstawia na równiku ciśnienie mniejsze, aniżeli w pobliżu biegunów. W powyższej tabliczce przyjęliśmy średnią wartość natężenia ciężkości w Polsce $g = 981$. Często odnosi się wysokości słupów manometrycznych do t. zw. »ciężkości normalnej«, t. j. do wartości g w szerokości geograficznej 45^0, w poziomie morza, gdzie (ust. 124) $g = 980{\cdot}6$. Pod nazwą ciśnienia jednej atmosfery rozumie się ciśnienie 76 *cm* rtęci, pod ciężkością normalną; mamy więc:

$$1 \; atm. = 76 \times 13{\cdot}5956 \times 980{\cdot}6 = 1013220 \; dyn/cm^2,$$

albo: $1 \; atm. = 76 \times 13{\cdot}5956 = 1033{\cdot}266 \; Gr/cm^2$.

Zadania.

291) Znaleźć ciśnienie panujące w morzu, w głębokości 1·5 *km*, przyjmując jako gęstość wody morskiej: 1 027 *gr/cm*³.

Odp. Ciśnienie to przewyższa ciśnienie na powierzchni o $p = zdg = 1{\cdot}5 \times 10^5 \times 1\,027 \times 981 = 151{\cdot}123 \times 10^6$ *dyn/cm*².

292) Obliczyć to samo ciśnienie w jednostkach ciężarowych.

Odp. $1{\cdot}5 \times 10^5 \times 1{\cdot}027 = 154050$ *Gr/cm*².

293) tudzież w atmosferach. *Odp.* $\frac{154050}{1033{\cdot}26} = 149$ *atm.*

294) O jaki ułamek gęstości pierwotnej powiększa się gęstość wody morskiej pod wpływem tego ciśnienia, jeżeli przyjmiemy jako spółczynnik ściśliwości: $\sigma = 23{\cdot}7 \times 10^6$ *Gr/cm*².

Odp. O ułamek $= \frac{p}{\sigma}$, t. j. o $^1/_{154}$; gęstość wynosi więc: 1·034.

295) O ile zmniejsza się ciśnienie na dnie morza, gdy ciśnienie powietrza na powierzchni morza zniży się od 76 do 72 *cm* rtęci?

Odp. O 4 *cm rt*, t. j. o $^1/_{19}$ *atm.*

296) W walcu pionowym, o przekroju 8 *cm*², znajduje się rtęć o temperaturze 0°. Na rtęć ciśnie tłok obciążony, ważący razem z obciążeniem 4 *Kg*. Ciśnienie w powietrzu otaczającem wynosi 76 *cm rt*. Znaleźć ciśnienie w rtęci, w głębokości 12 *cm* pod dolną powierzchnią tłoka.

Odp. $p = 76 \times 13{\cdot}5956 + \frac{4000}{8} + 12 \times 13{\cdot}5956 = 1696{\cdot}4$ *Gr/cm*².

297) W naczyniu o dnie poziomem znajduje się warstwa wody głęboka na 15 *cm*; na wodzie warstwa oliwy (gęst. = 0·915) grubości 20 *cm*. Znaleźć ciśnienie na dnie, pomijając ciśnienie powietrza na powierzchnię.

Odp. 15 *cm* wody $+ 20 \times 0{\cdot}915$ *cm* oliwy $= 33{\cdot}3$ *Gr/cm*².

298) Jedno ramię manometru napełnionego rtęcią posiada przekrój poprzeczny 20 *cm*², drugie 3 *cm*². O ile *cm* (x) zniży się powierzchnia rtęci w ramieniu szerszem, a o ile podniesie się (y) w węższem, jeżeli ciśnienie w szerszem ramieniu powiększymy o jedną atmosferę?

Odp. $x + y = 76$ *cm*; $x \,.\, 20 = y \,.\, 3$. Stąd: $x = 9{\cdot}9$, $y = 66{\cdot}1$ *cm*.

299) Rurka kształtu litery *U*, składająca się z części poziomej, o długości l i dwu ramion pionowych A i B, zawiera ciecz. Znaleźć różnicę wysokości powierzchni cieczy w ramionach pionowych, jeżeli rurka obraca się jednostajnie około ramienia A jako osi.

Odp. Powierzchnia płynu w B będzie n. p. o z wyższa niż w A. Na płyn w rurze poziomej, o przekroju s, działa więc ku osi obrotu siła $zdgs$. Ona równoważy siłę odśrodkową, działającą na tę samą część płynu, od osi na zewnątrz. Siła odśrodkowa wynosi $M \frac{l}{2} \tilde{\omega}^2$, gdzie $\tilde{\omega}$ = prędkości kątowej, $M = lsd$. Stąd równanie:

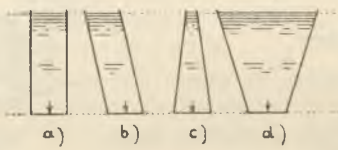
$$\frac{l^2 s d \tilde{\omega}^2}{2} = zdgs;\ z = \frac{l^2 \tilde{\omega}^2}{2g}.$$

300) Naczynie napełnione cieczą o gęstości d podnosimy w próżni pionowo do góry, ruchem jednostajnie przyśpieszonym, z przyśpieszeniem γ. Znaleźć ciśnienie w głębokości z pod powierzchnią cieczy.

Odp. $zd\ (g+\gamma)$.

161. Parcie cieczy na ściany naczyń. Ciśnienie cieczy w którymkolwiek punkcie ściany naczynia składa się z ciśnienia wywieranego na powierzchnię (n. p. ciśnienia powietrza), które ciecz przenosi jednostajnie na wszystkie części ścian, tudzież z ciśnienia wywołanego przez ciężar samej cieczy. Opuścimy tu ciśnienie powietrza, albowiem zwyczajnie działa ono również i na zewnętrzną stronę ścian, wskutek czego nie ma wpływu na zjawiska równowagi, któremi obecnie się zajmujemy.

Na każdej ścianie poziomej (na dnie) ciśnienie jest jednostajne i wynosi: $p = \delta z$, w czem z oznacza głębokość dna pod



Ryc. 124.

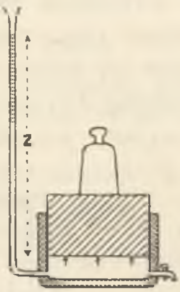
powierzchnią cieczy Pomnożywszy to ciśnienie przez pole dna S, znajdziemy całkowite parcie na dno:

$$P = S\delta z.$$

Widzimy, że parcie cieczy na dno naczynia *nie zależy od postaci naczynia, ani od ilości zawartej w niem cieczy*; zależy ono wyłącznie od ciężaru właściwego cieczy, od głębokości dna pod powierzchnią i od wielkości pola dna. W naczyniach *a, b, c, d* (ryc. 124), mających dna jednakowej wielkości a napełnionych cieczą do tej samej wysokości, parcia cieczy na dno są jednakowe, pomimo że pojemności tych naczyń są różne. Celem dokładniejszego objaśnienia tego prawa, wyobraźmy sobie płaską poziomą puszkę AB (ryc. 125), do której wchodzi wązka pionowa rurka CD, napełniona równie jak puszka cieczą. Parcie na dno puszki równa się, według powyższego prawa, ciężarowi płynu, który zajmowałby objętość $ABA'B'$; ogromną tę siłę wywiera w rzeczywistości mała ilość płynu w rurce. Należy jednak zważyć, że ciecz w puszce jest ściśnięta, a miarą manometryczną panującego w niej ciśnienia jest wysokość *CD*. Ciśnieniem tem ciecz rozpiera ściany puszki, a zatem także górną jej pokrywę, która nawzajem, mocą swej sprężystości, oddziaływa na ciecz i ciśnie ją tak samo, jak gdyby na niej ciężyła warstwa sięgająca aż do *A'B'*.

Na zasadzie tego prawa można urządzać machiny, wywierające bardzo znaczne siły pod wpływem ciężaru małej ilości wody.

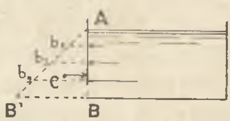
Ryc. 125.



Ryc. 126.

Korzystając z tego, że ciśnienie jest we wszystkich kierunkach jednakowe, a zatem działa także do góry, można n. p. podnosić znaczne ciężary, ciśnieniem cienkiego słupa wody, jak to wyobraża (ryc. 126).

N a ś c i a n a c h p i o n o w y c h, l u b u k o ś n y c h, ciśnienie nie jest jednostajne, lecz rośnie w miarę głębokości. Weźmy n. p. pod uwagę ciśnienia w różnych punktach ściany pionowej *AB* (ryc. 127), mającej kształt prostokąta o bokach poziomych i pionowych. Podzielmy ścianę na nieskończenie wązkie poziome paski. Parcie cieczy na którykolwiek z tych pasków równa się ciężarowi słupa cieczy, któryby miał za podstawę pole uważanego paska, a za wysokość, głębokość jego pod powierzchnią. Głębsze paski są przeto silniej



Ryc. 127.

uciskane aniżeli płytsze. Siłę wypadkową, działającą na całą ścianę, oblicza się w następujący sposób. Wykreślmy na każdym pasku poziomy słup cieczy, tak długi, jak głęboko uważany pasek leży pod powierzchnią cieczy. Słupy te utworzą widocznie pryzmat trójścienny, przedstawiający się w przekroju jako trójkąt ABB'. Całkowite parcie cieczy na ścianę AB równa się ciężarowi tego pryzmatu. Obliczymy je przeto, pomnożywszy pole ściany AB przez połowę głębokości dolnej krawędzi B i przez ciężar właściwy cieczy. Środek ciężkości C trójkąta ABB' znajduje się w $\frac{1}{3}$ odległości środka boku BB' od A. Gdyby więc chodziło o podparcie ściany z zewnątrz, celem zrównoważenia parcia cieczy, natenczas należałoby umieścić podporę w poziomie punktu C, t. j. w $\frac{1}{3}$ wysokości zwilżonej części ściany.

Zadania.

301) Rura prowadząca wodę ze zbiornika, w którym powierzchnia wody znajduje się w wysokości 20 *m* nad poziomem, wchodzi przez dno do wnętrza pionowego walca, zatkanego tłokiem o średnicy 30 *cm*. Jakim ciężarem należy obciążyć tłok, aby zrównoważyć ciśnienie wody, jeśli wysokość tłoka nad ziemią wynosi 2 *m?*

Odp. $(15)^2\pi \times 1800$ *Gr* $= 1{\cdot}27$ *t*.

302) Dowieść, że parcie (P) cieczy na jakąkolwiek płaską ścianę, zalaną w całości płynem, równa się iloczynowi z pola ściany (S), przez ciężar właściwy cieczy (δ) i przez głębokość środka (ciężkości) ściany pod powierzchnią.

Odp. Podzieliwszy ścianę na nieskończenie małe elemeny, oznaczmy pole jednego z nich przez s, głębokość przez z. Na element ten działa prostopadła doń siła δzs; podobnie na inne. Wypadkowa tych sił wynosi: $P = \delta \Sigma zs$. Jeżeli Z oznacza głębokość środka powierzchni, mamy: $Z = \frac{\Sigma sz}{\Sigma s} = \frac{\Sigma sz}{S}$, zatem $P = \delta ZS$.

303) Jedna z bocznych, pionowych ścian naczynia prostokątnego napełnionego po brzegi cieczą o gęstości 0·8, jest obracalna około dolnej krawędzi. Znaleźć moment wypadkowy ciśnienia cieczy względem tej krawędzi, wiedząc, że ściana jest kwadratem o boku 18 *cm*.

Odp. $18 \times 18 \times 9 \times 0{\cdot}8 \times 6 = 14000$ *Gr cm*.

304) To samo naczynie napełnione jest do połowy wodą, resztę przestrzeni, aż po brzegi, zajmuje płyn o gęstości 0·8. Znaleźć natężenie i punkt przyłożenia siły, działającej na zewnętrzną stronę ściany, a równoważącej ciśnienie obu płynów.

Odp. Całkowite ciśnienie płynu wyższego $= 9 \times 18 \times 4{\cdot}5 \times 0{\cdot}8$ *Gr*, odpowiada sile działającej w wysokości 12 *cm* nad dnem. Całkowite ciśnienie niższego płynu, który obok własnego ciężaru przenosi także ciśnienie płynu wyższego, wynosi: $9 \times 18 \times 9 \times 0{\cdot}8 + 9 \times 18 \times 4{\cdot}5 \times 1$. Pierwszy składnik odpowiada sile działającej w wysokości 4·5; drugi, sile w wysokości 3 *cm* nad dnem. Wypadkowa tych trzech sił wynosi 2478·6 *Gr* i działa w wysokości 5·8 *cm*.

162. Parcie cieczy na ciała zanurzone. (Prawo Archimedesa). Powierzchnia ciał zanurzonych w cieczy, bądź to całkowicie, bądź częściowo (ryc. 128 *A*, *B*), doznaje również ciśnienia, w kierunku prostopadłym, podobnie jak ściany naczyń. Ciśnienia te wynikają z działania ciężkości na ciecz; wskutek tego nie są one jednostajne, lecz przeważają w punktach zanurzonych głębiej pod powierzchnią cieczy; tak n. p. ciśnienie w punkcie K wynosi $p = dgz$ w czem z oznacza głębokość punktu K (pomijamy tu znowu ciśnienie powietrza). Całkowite parcie cieczy na ciało zanurzone jest to wypadkowa wszystkich ciśnień tego rodzaju, działających na zwilżoną część powierzchni ciała.

Archimedes dowiódł około r. 220 przed Chr., że *parcie, które ciecz wywiera wskutek ciężaru swego na ciało zanurzone całkowicie albo częściowo, jest równoważne jednej sile, działającej na ciało w kierunku pionowym do góry. Siła ta jest równa ciężarowi cieczy wypartej przez ciało, a punktem jej przyłożenia jest środek przestrzeni, z której ciecz została przez ciało wypartą.*

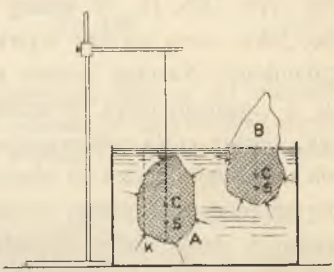
Oznaczywszy zatem przez V objętość cieczy wypartej przez ciało, przez δ ciężar właściwy cieczy, przez P całkowite parcie które ciecz wywiera na ciało, w kierunku pionowym do góry — możemy wyrazić prawo Archimedesa wzorem:

$$P = V\delta.$$

Aby przekonać się o prawdziwości tego prawa, wyobraźmy sobie, że wyjęliśmy ciało z cieczy, a przestrzeń, z której ciecz była przez ciało wyparta, zapełniliśmy jednolitą cieczą tego samego rodzaju. Ciecz podstawiona na miejsce ciała będzie oczywiście w równowadze z resztą cieczy w naczyniu. Równowaga nie przestałaby również istnieć, gdybyśmy przyjęli, że ciecz wprowadzona na miejsce ciała skrzepła na bryłę stałą, zachowując właściwą sobie postać, objętość i ciężar (ust. 87). Rozważmy jakie siły utrzymują tę ciecz stężałą w równowadze. Siłami temi są: 1) jej własny ciężar, działający w środku ciężkości C, który jest zarazem środkiem przestrzeni, którą przedtem zajmowała zanurzona część ciała; 2) ciśnienia cieczy otaczającej, *te same, które przedtem działały na powierzchnię ciała*. Ciśnienia te równoważą więc ciężar cieczy zajmującej miejsce ciała, działający w punkcie C. Z tego powodu muszą one mieć jedną wypadkową, równą temu ciężarowi, a działającą pionowo do góry, w linii przechodzącej przez C, jak tego wymaga prawo Archimedesa. Punkt C nazywamy środkiem ciśnienia.

163. Wnioski i zastosowania. Warunki pływania. Obok wypadkowego parcia cieczy, określonego przez prawo Archimedesa, działają zwyczajnie na ciało zanurzone w cieczy inne siły. Przedewszystkiem działa na nie własny jego ciężar, w środku ciężkości ciała, w S (ryc. 128). Ciało zanurzone w cieczy tonie, albo wypływa na powierzchnię, zależnie od tego, czy ciężar jego własny przeważa parcie cieczy, czy naodwrót. Oznaczmy objętość ciała przez V, przez Q jego ciężar, przez δ ciężar właściwy cieczy. Jeżeli ciało jest całkowicie zanurzone w cieczy, wtenczas wypadkowa siła niezrównoważona, działająca na ciało w kierunku z góry na dół (parcie cieczy), wynosi:

$$Q - V\delta.$$



Ryc. 128.

Jeżeli ciężar ciała Q przewyższa $V\delta$, wtenczas ciało utonie; jeżeli zaś jest $Q < V\delta$, wtenczas wypłynie ono na wierzch. Możemy to samo inaczej wyrazić, wprowadzając średni ciężar właściwy ciała. Napiszmy mianowicie: $Q = V\delta'$, rozumiejąc przez δ' ciężar przypadający średnio na jednostkę objętości ciała; natenczas ciało utonie, jeżeli $\delta' > \delta$ t. j. jeżeli, średnio biorąc, jest gęstsze aniżeli ciecz; gdy $\delta' = \delta$ wówczas na ciało nie działa żadna siła wypadkowa ani na dół ani do góry; unosi się ono w cieczy nie tonąc ani nie wypływając; gdy nakoniec $\delta' < \delta$ t. j. gdy ciało waży mniej, aniżeli równa objętość cieczy, wtenczas parcie cieczy przewyższa ciężar ciała i wypiera je do góry.

W pierwszym przypadku możemy zabezpieczyć ciało od utonięcia uwiązawszy je n. p. na sznurze, przytwierdzonym do jakiejkolwiek zewnętrznej podpory (ryc. 128 A). Napięcie sznura równoważy wówczas tylko nadwyżkę ciężaru ciała nad parciem cieczy: *ciężar ciała wydaje się zmniejszonym, o ciężar wypartej przez nie cieczy.*

W drugim przypadku ciało mogłoby unosić się w równowadze, w jakimkolwiek poziomie we wnętrzu cieczy. [W praktyce przypadek ten nie daje się jednak ściśle urzeczywistnić; widocznem jest bowiem, że najmniejsza nierówność ciężarów właściwych δ i δ' sprawiłaby już utonięcie albo wypływanie ciała. Na tym przypadku opiera się dogodny sposób określania ciężaru właściwego drobnych okruszyn ciał stałych, polegający na spławieniu ich w cieczach o rozmaitej a znanej gęstości. Dobiera się dwie ciecze o gęstości bardzo nieznacznie różnej, takie, iż w jednej z nich ciało tonie, w drugiej wypływa. Można wtedy przyjąć, że gęstość ciała jest równa średniej z gęstości tych dwóch cieczy].

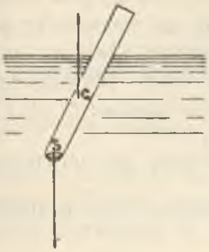
W trzecim przypadku, gdy parcie cieczy jest większe niż ciężar ciała, wypływa ono na wierzch i wynurza się częściowo z cieczy (ryc. 128, B). W miarę wynurzania się ciała, zmniejsza się parcie, jakie ciecz na nie wywiera — gdy ciężar ciała pozostaje niezmieniony. Nastąpi przeto równowaga, skoro parcie cieczy zrówna się z ciężarem ciała. Powiadamy wówczas, że ciało pływa na cieczy. *Ciężar ciała pływającego*[1]) *jest więc równy ciężarowi cieczy przez nie wypartej.* Prawo to stanowi pierwszy warunek równowagi ciała pływającego na cieczy (równowaga sił). Nadto należy uwzględnić warunek drugi, żeby wypadkowy moment sił działających na ciało był równy zeru (równowaga momentów). Warunek ten, zastosowany do ciała pływającego swobodnie na cieczy, wymaga, żeby środek ciężkości ciała S i środek ciśnienia C znajdowały się na tej samej linii pionowej.

Równowaga ciała pływającego swobodnie (n. p. okrętu) będzie trwałą, jeżeli ciało odchylone nieco z położenia równowagi, a następnie oswobodzone, wróci napowrót do tego położenia. Zdarza się to zawsze, gdy środek ciężkości leży poniżej środka ciśnień (patrz n. p. ryc. 129, gdzie rurka szklana jest u spodu obciążona rtęcią, a wskutek tego siły S i C zawsze ją prostują, w którąkolwiek by stronę się pochyliła). Wszelako stała równowaga jest pod pewnymi warunkami możliwa i wtenczas, gdy S leży powyżej C. Ryc. 130a wyobraża ciało pływające w położeniu równowagi, zaś ryc. 130b tosamo ciało przechylone na prawo; prawa strona zanurza się więcej aniżeli lewa, wskutek czego środek ciśnienia C przesuwa się również na prawo. Jeżeli się zdarzy, że punkt C przekroczy, w kierunku pochylenia, pion przechodzący przez środek cięż-

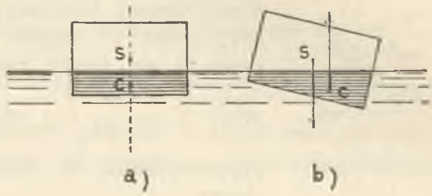
---

[1]) Wyraz pływanie ma tu znaczenie cokolwiek odmienne od zwyczajnego, odnosi się bowiem do równowagi. Przy pomocy ruchów, jakie przy pływaniu wykonywają ludzie i zwierzęta, mogą się one utrzymać na wodzie jakkolwiek ważą nieco więcej aniżeli równa objętość wody.

kości S — a to zależy od postaci ciała — wtenczas równowaga będzie stałą, jak to widzimy na rysunku, pomimo, że środek ciężkości ciała leży wyżej, aniżeli środek ciśnienia.

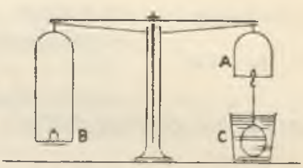


Ryc 129.



Ryc 130.

W a g a h i d r o s t a t y c z n a jest to przyrząd służący do mierzenia gęstości względnych, przez zastosowanie prawa A r c h i m e d e s a; pośrednio używa się jej także do mierzenia objętości ciał stałych dowolnej postaci. Zawieszamy ciało na cienkiej nici, na haczyku umieszczonym pod jedną z szalek A (ryc. 131) zwyczajnej wagi (można również używać wagi sprężynowej) i równoważymy je tarą na szalce przeciwnej B. Usuwamy następnie ciało i równoważymy znowu wagę, kładąc na A stosowne ciężarki; one wskazują ciężar ciała $= Q$. Zdjąwszy ciężarki zawieszamy ciało powtórnie, zanurzając je jednocześnie w cieczy znajdującej się w naczyniu C. Ciężar P, który wypada umieścić teraz na szalce A, celem zrównoważenia wagi, wskazuje pozorną stratę ciężaru ciała zanurzonego w cieczy; według prawa A r c h i m e d e s a jest on miarą parcia, które ciecz wywiera na ciało.



Ryc. 131.

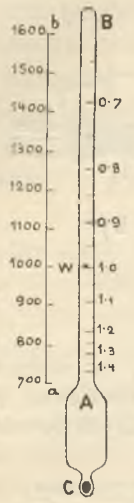
Oznaczmy ciężary właściwe cieczy i ciała przez δ i δ', objętość ciała przez V, wtenczas będzie: $Q = V\delta'$; $P = V\delta$, zatem:

$$\frac{Q}{P} = \frac{\delta'}{\delta} = \varrho,$$

ϱ oznacza tu gęstość względną ciała w porównaniu z gęstością cieczy (ust. 93). Jeżeli δ jest znane, natenczas możemy obliczyć objętość ciała z równania $V = \frac{P}{\delta}$.

Ważąc to samo ciało stałe po kolei w dwu cieczach możemy za pomocą wagi hidrostatycznej porównać gęstości tych cieczy.

Areometr (gr. araios = cienki, rozrzedzony). Do szybkiego wyznaczania gęstości cieczy używa się najczęściej areometru o stałym ciężarze. Przyrząd ten jest zastosowaniem twierdzenia o pływaniu ciał; to samo ciało, zanurzane po kolei w różnych cieczach, zanurzać się będzie tem głębiej, im rzadszą jest ciecz. Głębokość zanurzenia się służy tedy za wskazówkę gęstości cieczy. Oznaczmy przez δ ciężar właściwy cieczy, przez V objętość zanurzoną ciała pływającego, przez Q jego ciężar, natenczas będzie zawsze: $Q = V\delta$, albo: $V = \frac{Q}{\delta}$, t. j. objętość zanurzona jest odwrotnie proporcyonalna do ciężaru właściwego (albo gęstości) cieczy.



Ryc. 132.

Areometr (ryc. 132) jest to naczyńko szklane BC, mające długą walcowatą szyjkę AB, zamkniętą u góry; u dołu jest ono obciążone pewną ilością śrutu lub rtęci, celem zapewnienia stałej równowagi w pływaniu. Przypuśćmy, że pływając na wodzie (gęstość = 1) zanurza się ono do kreski w, oznaczonej liczbą »1«. Przyjmijmy, że objętość zewnętrzna naczynia wraz z częścią szyjki, aż do punktu w, wynosi 1000 jakichkolwiek jednostek; natenczas w innej cieczy, mającej n. p. gęstość 2, objętość zanurzonej części areometru wynosić będzie tylko 500; w cieczy o gęstości $\frac{1}{2}$ zanurzy się objętość 2000 i t. d. Ogólnie mówiąc, objętość zanurzająca się w cieczy o gęstości d wynosić będzie $V = \frac{1000}{d}$. Następująca tabliczka zawiera kilka takich wartości d i V należących do siebie:

gęstość d: . . .	0·6	0·8	1·0	1·2	1·4	1·6	i t. d.
objętość V: . . .	1667,	1250,	1000,	833,	714,	625,	i t. d.

Dajmy na to, że w jakikolwiek sposób wymierzyliśmy objętości przyrządu począwszy od spodu C, aż do rozmaitych punktów na szyjce; na podziałce tymczasowej ab wykazane są te objętości: 700, 800 i t. d. przyczem objętość Cw oznaczona jest liczbą 1000. Gdy posiłkując się tą podziałką i przytoczoną wyżej tabliczką, nakreślimy na szyjce kreski oznaczone liczbami 1·6, 1·4, 1·2, 1·0 i t. d., odpowiadające objętościom 625, 714, 833, 1000 i t. d, wówczas uzyskamy nową podziałkę, o nierównych odstępach kresek, wskazującą bezpośrednio gęstości cieczy. Jeżeli n. p. przyrząd zanurza się do kreski 1·1, wtenczas gęstość cieczy wynosi 1·1 i t. p.

Sprawdzenie podziałki na gotowym przyrządzie uskutecznia się w sposób następujący: Nasuwamy na szyjkę areometru, przy B, mały znany ciężarek q i zanurzamy areometr w wodzie. Przyrząd waży obecnie $Q+q$ i zanurza się objętością V; bez ciężarka q zanurzyłby się objętością 1000. Otóż $1000 : V = Q : Q+q$, skąd:

$$d = \frac{1000}{V} = \frac{Q}{Q+q},$$

t. j. areometr obciążony ciężarkiem q powinien zanurzać się do kreski oznaczonej liczbą $\frac{Q}{Q+q}$. Podobnie można postąpić także dla gęstości większych niż 1; w tym celu należy przyrząd uczynić lżejszym o q, co można uzyskać przez zawieszenie na wadze i obciążenie przeciwnej szalki ciężarkiem q.

Zadania.

305) Obliczyć parcie, jakie rtęć wywiera do góry na kulę o objętości 100 cm^3, całkowicie zanurzoną, w głębokości z pod powierzchnią. *Odp.* W każdej głębokości 1359 *Gr.*

306) Jaka część objętości bryły lodu (ciężar właściwy $= 0{\cdot}9167$), pływającej na wodzie, znajduje się nad powierzchnią wody.

Odp. $^1/_{12}$.

307) Ile cm^3 korka ($\delta = 0{\cdot}24$) należy przyczepić pod wodą do kuli ołowianej ($\delta = 11{\cdot}37$), ważącej 30 *gr*, aby mogła podnieść się do góry? *Odp.* Co najmniej 36 cm^3.

308) Ciało o gęstości 0·9 pływa na powierzchni oddzielającej wodę (gęst. 1), od oliwy (gęst. 0·8); część objętości ciała zanurzona jest w wodzie, reszta w oliwie. Znaleźć stosunek tych objętości.

Odp. 1 : 1.

309) Ciecz o gęstości 2 pokryta jest warstwą wody o grubości 8 *cm*. Walec o długości 16 *cm* i gęstości $\frac{3}{4}$ pływa w położeniu pionowem. Znaleźć długość tej części walca, która znajduje się nad wodą. *Odp.* 6 *cm*.

310) W cieczy o gęstości d umieszczamy kulę wydrążoną współśrodkowo, mającą promień zewnętrzny $= r$, wewnętrzny $= r'$; gęstość materyału ściany $= d'$. Jaki powinien być stosunek d i d', aby kula pływała, zanurzając się do połowy.

Odp. $d : d' = 2\,(r^3 - r'^3) : r^3$.

311) Dowieść, że naczynie napełnione cieczą, w której zawiesiliśmy ciało stałe, staje się wskutek tego o tyle cięższem o ile ciało traci na pozór na wadze.

Odp. Strata ciężaru ciała równa się parciu cieczy na ciało; zwiększenie ciężaru naczynia jest wynikiem oddziaływania cieczy na naczynie. (Podać drugi dowód, przez szczegółowy rozbiór ciśnień przed i po zanurzeniu, przyjmując naczynie walcowe o pionowej osi).

312) Kawałek szkła (gęstość 2·5), którego masa wynosi 150 *gr*, zawieszony na drucie, zanurza się całkowicie w kwasie siarczanym o gęstości 1·8. Obliczyć napięcie drutu.

Odp. 41200 *dyn.*

313) Obliczyć napięcie drutu w poprzedzającym przykładzie, przyjąwszy, że naczynie razem z wieszadłem, do którego górny koniec drutu jest przywiązany, poruszają się pionowo do góry z przyśpieszeniem 100 cm/sek^2.

Odp. $41200 \dfrac{981 + 100}{981}$ *dyn.*

314) Kawałek soli kamiennej, ważący 9·675 *gr*, zważono w nafcie i znaleziono pozorny ciężar 6·007 *gr*; kawałek szkła, ważący 15·18 *gr*, zważono po kolei w wodzie i w nafcie i znaleziono pozorne ciężary 9·18 i 10·29 *gr*. Obliczyć ciężary właściwe soli i nafty.

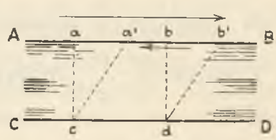
Odp. 2·15; 0·815.

315) 10 metrów drutu miedzianego ważą 1·5763 *gr*; tenże sam drut waży w wodzie 1·3995 *gr*. Obliczyć średnicę drutu.

Odp. 0·15 *mm.*

164. Tarcie wewnętrzne w cieczach. Ciecze wprowadzone w ruch wracają rychło do spoczynku, o ile niema sił zewnętrznych, któreby nieustannie ruch podtrzymywały; energia ruchu znika i zamienia się na ciepło. Przykładem tego jest zanikanie ruchu wody zamieszanej w naczyniu, uspakajanie się fal na jeziorach, na morzu, po ustaniu wiatru i t. p. Powodem tego zjawiska jest t. zw. tarcie wewnętrzne, zwane także lepkością cieczy. Lepkość objawia się i w tem, że skoro jedna część cieczy zostanie poruszoną, natenczas działaniem tarcia pociąga ona za sobą części sąsiednie. Wszystkie ciecze są lepkie, jedne w większym, inne w mniejszym stopniu. W teoryi tylko tworzymy sobie niekiedy pojęcie cieczy zupełnie wolnej od lepkości i taką ciecz nazywamy d o s k o n a ł ą.

Ruchy cieczy bywają dwojakiego rodzaju: niekiedy poruszają się one całą masą, na podobieństwo ciała stałego (dajmy na to jak krople deszczu) — wtenczas cząstki cieczy zajmują niezmienne względem siebie położenia, przeto niema tarcia między niemi. Częściej jednak ciecze poruszają się w taki sposób, że wszystkie, albo niektóre części zmieniają podczas ruchu postać i wzajemne położenie. W tym drugim przypadku tarcie wewnętrzne objawia się, podobnie jak między ciałami stałemi, mającemi ruch względny; ono działa zawsze w takim kierunku, iż usiłuje zniszczyć, albo zmniejszyć prędkość względną cząstek cieczy. Zważywszy, że objętość cieczy całej i każdej jej części z osobna możemy uważać jako niezmienne, zrozumiemy łatwo, że ruch cieczy w tym przypadku polega na ciągłem odkształcaniu się postaci cząstek, przyczem one zmieniają także położenie w przestrzeni, t. j. płyną. Aby więc objaśnić istotę tarcia wewnętrznego na przykładzie najprostszym weźmy pod uwagę ciecz, której części ulegają ciągle prostemu odkształcaniu się postaci. Wyobraźmy sobie w tym celu dwie płyty *AB* i *CD* (ryc. 133), między któremi znajduje się warstwa cieczy, przylegającej do nich, jak n. p. woda do szkła, albo guma do papieru. Gdy przesuniemy *AB* w kierunku strzałki, wtenczas część *abcd* cieczy uzyska postać *a'b'cd*. Przypuszczamy tu, że wszystkie warstwy cieczy między płytami przesuwają się w kierunku ruchu płyty górnej, o długości proporcyonalne do odległości od płyty dolnej. Wiemy, że w celu utrzymania cieczy odkształconej w ten sposób w równowadze, nie byłoby potrzeba wcale siły zewnętrznej, albowiem ciecze nie posiadają sprężystości postaci. Wszelako podczas ruchu, t. j. podczas odkształcania się cieczy, poruszanie płyty *AB* wymaga pewnej siły, albowiem warstwy cieczy przesuwają się jedne na drugich, a następstwem względnego ich ruchu jest opór utrudniający ten ruch. Opór ten nazywamy właśnie lepkością, albo tarciem wewnętrznem. Na płycie *AB* objawia się on jako ciśnienie równoległe do niej, działające w kierunku przeciwnym ruchowi. Doświadczenie okazało, że opór wynikający z lepkości jest *proporcyonalny do prędkości względnego ruchu warstw, t. j. do szybkości odkształcania się cieczy*; *nadto zależy on od rodzaju cieczy.* Oznaczmy grubość warstwy *ac* (ryc. 133) przez z; przez v prędkość płaszczyzny górnej względem dolnej; pole płaszczyzny przez S. Jeżeli *ab* przesuwa się do *a'b'*, w ciągu czasu t, wtenczas prędkość górnej płaszczyzny względem dolnej nieruchomej wynosi $v = \frac{aa'}{t}$. Miarą odkształcenia powstającego w tymże czasie jest stosunek $\alpha = \frac{aa'}{z}$ (ust. 130); prędkość z jaką ciecz się odkształca t. j. odkształcenie przypadające na jednostkę czasu, będzie wskutek tego:



Ryc. 133.

$$\alpha' = \frac{\alpha}{t} = \frac{aa'}{zt}, \text{ czyli: } \alpha' = \frac{v}{z}.$$

Siła zewnętrzna P, która powinna działać na górną płaszczyznę, w kierunku strzałki, celem pokonania lepkości i utrzymania płaszczyzny tej w ruchu jednostajnym z prędkością v, jest widocznie proporcyonalna także do wielkości jej pola S; wskutek tego możemy napisać:

$$P = \mu \,.\, S \frac{v}{z},$$

μ oznacza tu stały spółczynnik proporcyonalności, zależny od rodzaju cieczy. Oznaczywszy przez p wartość ciśnienia stycznego na jednostkę powierzchni S (lub którejkolwiek płaszczyzny we wnętrzu cieczy, równoległej do S— stosunek $\frac{v}{z}$ jest bowiem dla wszystkich płaszczyzn jednakowy), przez α' prędkość odkształcania się t. j. stosunek $\frac{v}{z}$, możemy powyższe równanie napisać krócej:

$$p = \mu \alpha'.$$

μ oznacza w tych równaniach t. z. spółczynnik lepkości; wartość jego zależy tylko od rodzaju i własności cieczy. Im bardziej lepki jest płyn, im większe jest tarcie wewnętrzne, tem większa jest wartość spółczynnika μ. Równanie powyższe okazuje, iż w cieczach poruszających się działają także ciśnienia styczne, czyli równoległe do powierzchni uciskanej, zależne od ruchu odkształcającego sąsiednie cząstki cieczy (obok ciśnienia prostopadłego, zależnego od sił zewnętrznych). W stanie równowagi ta składowa ciśnienia, równoległa do powierzchni, jest zerem. Prawa hidrostatyki stosują się przeto jednakowo do cieczy ruchliwych, jak i najbardziej lepkich. Różnica objawia się tylko w zjawiskach ruchu.

Spółczynnik lepkości μ wyraża się w »dynach na centymetr kwadratowy, pomnożonych przez sekundę« (albo w $Gr/cm^2.\ sek$). Okazuje to wzór $\mu = \frac{p}{\alpha'}$, w którym miarą wielkości $\frac{1}{\alpha'} = \frac{z}{v}$ jest widocznie jednostka czasu.

Prosty sposób mierzenia spółczynnika lepkości poznamy w ust. 167 (wzór 3). Jego wartości dla kilku cieczy podaje następująca tablica:

Tablica spółczynników lepkości.

	$dyn/cm^2 \times sek$		$dyn/cm^2 \times sek$
Smoła 6° . . .	2200×10^6	Woda 20°	0·0102
Smoła 12° . . .	250×10^6	Rtęć 17°	0·0160
Gliceryna 3° . .	40	Alkohol etyl. 10° .	0·0153
Gliceryna 26° . .	5	Eter etyl. 10° . .	0·0019
Woda 0° . . .	0·0181	Powietrze 15° . .	0·000189

Różnym płynom właściwe są rozmaite stopnie ruchliwości. Gliceryna, wstrząśniona w naczyniu, uspakaja się niemal natychmiast; woda porusza się dłużej; większa jeszcze jest ruchliwość eteru. Wszelako ruchliwość zależy nie tylko od wartości tarcia wewnętrznego, czyli lepkości, ale nadto od bezwładności, t. j. od masy, lub co na jedno wychodzi, od gęstości płynu. Jeżeli dwie ciecze poruszają się zupełnie jednakowo, t. j. jeżeli mają jednakowe prędkości, wtenczas gęstsza mieć będzie większy pęd i większą energię kinetyczną; do uspokojenia gęstszego płynu potrzebna jest wskutek tego większa dzielność tarcia. Przy równych lepkościach gęstsza z tych cieczy uspokoiłaby się po upływie dłuższego czasu, aniżeli rzadsza. Za miarę ruchliwości przyjmuje się więc stosunek gęstości do lepkości $\frac{d}{\mu}$; wartość tego stosunku dla kilku cieczy zawiera następująca tablica:

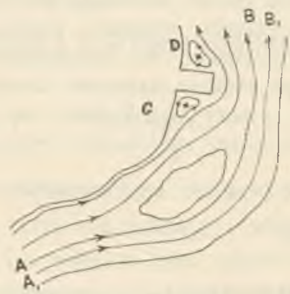
Ruchliwość w sek/cm^2

Rtęć 17° ($d = 13·554$) . .	847	Alkohol ($d = 0·798$ . . .	52·3
Eter 10° ($d = 0·724$) . .	380	Powietrze 15° ($d = {}^1/_{815}$) .	6·5
Woda 20° ($d = 0·998$) . .	98·8	Gliceryna 26° ($d = 1·26$) .	0·25
Woda 0° ($d = 1·00$) . . .	55·3	Gliceryna 3°	0·03

Porządek płynów pod względem ruchliwości jest, jak tu widzimy, zupełnie inny, aniżeli pod względem tarcia. Tak n. p. lepkość powietrza, mniejsza wprawdzie od lepkości wody, działając na małą jego masę, czyni je mniej ruchliwem od wody. Przeciwstawieniem ruchliwości jest zawiesistość; miarą jej jest odwrotność ruchliwości, t. j. stosunek $\frac{\mu}{d}$.

165. Prądy i wiry. Ruchy płynów możemy podzielić na postępowe i obrotowe — podobnie jak dzielimy ruchy ciał stałych. Jeżeli rzucimy słomkę na wodę płynącą, i dostrzeżemy, że słomka, płynąc, zachowuje kierunek niezmienny względem stron świata, wtenczas ruch cząstek płynu, którym ona towarzyszy, będzie wyłącznie postępowy. Ruch taki nazywamy prądem albo strumieniem. Jeżeli w każdej części koryta albo przewodu panuje ustawicznie jeden i ten sam rodzaj ruchu, wtenczas powiadamy, że prąd jest stały; takim jest ruch rzeki w równem korycie, gdy woda nie przybiera ani opada; w przeciwnym razie prąd jest zmienny.

Ruch płynu w prądzie stałym można uzmysłowić zapomocą t. z. linii prądu i strug. Jeżeli n. p. na planie rzeki, w której prąd jest stały (ryc. 134), nakreślimy linię AB, po której poruszała się pewna cząstka wody, natenczas wszystkie cząstki, idące w ślad za pierwszą, będą postępowały po tej samej drodze. Za pomocą takich linii prądu możemy podzielić cały prąd na wązkie pasma AB,



Ryc. 134.

A_1B_1, stanowiące jakoby oddzielne przewody, w których ruch odbywa się tak, jak gdyby one były otoczone ścianami stałemi. Pasma te nazywają się strugami. Linie prądu i strugi można uwidocznić za pomocą farby wprowadzonej w ciecz poruszającą się.

Jeżeli krótka słomka rzucona na wodę płynąc obraca się, wtenczas w sąsiedztwie jej znajduje się wir. Wiry tworzą się z łatwością w takich miejscach, gdzie cząstki płynące obok siebie mają prędkości różniące się znacznie, n. p. na załomach prądu, przy nagłych zwężeniach, albo rozszerzeniach przewodu lub koryta (ryc. 134, C i D). Ruch obrotowy powstaje wówczas wskutek wzajemnego tarcia cząstek. W płynie doskonałym, nie mającym lepkości, wiry nie mogłyby się tworzyć, albowiem na każdą cząstkę płynu takiego działałyby wyłącznie ciśnienia prostopadłe do powierzchni; ciśnienia zaś prostopadłe do powierzchni, ani ciężkość, nie mogą wywołać obrotu. Nawzajem, jeżeli z jakichbądź powodów utworzył się wir w płynie doskonałym, to znowu, dla braku tarcia, nie mógłby sam przez się ustać.

Wirujące cząstki odcinają się wyraźnie od reszty cieczy; w płynie doskonałym zachowywałyby, jak wspomniano, nieograniczenie swój obrót. Łącząc się tworzą one t. zw. linie wirowe, około których obracają się, jak paciorki nanizane na nić. Linie wirowe są albo zamknięte w sobie albo też mają swe końce na powierzchni cieczy. Mogą przytem poruszać się, albo wyginać rozmaicie, pozostając zawsze liniami wirowemi, złożonemi z tych samych cząstek. Przykładem znane obrączki dymu, puszczane z ust przez palaczy tytoniu; one tworzą się wskutek tarcia powietrza o brzegi otworu ust. — Musnąwszy powierzchnię cieczy końcem łyżki wywołujemy podobnie półobrączkę wirową, której końce zaznaczają się na powierzchni małemi wgłębieniami. — Cząstki wirujące wprowadzają otaczającą ciecz w krążenie. Stąd pochodzi, że dwie linie wirowe wprowadzają siebie wzajemnie w ruch; z tej samej przyczyny obrączka wirowa biegnie zawsze naprzód, prostopadle do swej płaszczyzny, w tym kierunku, w którym porusza się (jej działaniem) ciecz znajdująca się w jej objęciu.

166. Zależność prędkości od przekroju przewodu. Wydatek. W różnych częściach koryta albo przewodu, przewodzącego prąd stały, prędkości są w ogóle różne. Gdzie przekrój koryta się zwęża, tam prąd jest bystrzejszy t. j. szybszy; można to często dostrzedz w rzekach, wodociągach i t. p. Poszczególne strugi składające prąd nie mają również prędkości jednakowych: cząstki, przechodzące przez pewien przekrój koryta, poruszają się jedne wolniej inne prędzej. Biorąc jednak pod uwagę prędkość przeciętną, czyli średnią, możemy łatwo wykazać zależność jej od pola przekroju. Jest bowiem rzeczą oczywistą, że w prądzie stałym, nie mającym bocznych upustów, przepływają w tym samym czasie, przez wszystkie przekroje przewodu, jednakowe objętości cieczy; w przeciwnym razie płyn nagromadzałby się w niektórych jego częściach, co jest niemożliwe, gdy przewód jest zamknięty (rura) a płyn nieściśliwy. Weźmy pod uwagę którykolwiek przekrój poprzeczny przewodu i oznaczmy pole jego przez S. Średnią prędkość cząstek przepływających przez ten przekrój niechaj oznacza v. Natenczas objętość płynu, przepływająca przez ten przewód w ciągu jednostki czasu, równać się będzie widocznie objętości walca, mającego S za podstawę, a wysokość v; równa się więc: $Sv = W$. W innym przekroju, o polu S', w którym prąd posiada średnią prędkość v', znajdziemy podobnie: $S'v' = W$; zatem:

$$Sv = S'v' = W, \text{ albo: } v : v' = S' : S.$$

Objętość W, przepływająca w jednostce czasu przez wszystkie przekroje, nazywa się wydatkiem prądu. Zważywszy na powyższą proporcyę możemy powiedzieć, że *średnie prędkości w różnych przekrojach mają się do siebie odwrotnie jak pola tych przekrojów; wydatek prądu stałego równa się iloczynowi pola któregokolwiek przekroju przez panującą w tymże przekroju prędkość średnią.*

167. Ruch pod wpływem ciśnień zewnętrznych. Ogólne zasady dynamiki stosują się zarówno do ruchu ciał stałych jak i płynnych. Każda cząstka masy płynnej porusza się tak, jak ją prowadzą siły działające na nią. Do sił działających na którąkolwiek cząstkę płynu należą przedewszystkiem ciśnienia, jakie wywierają na nią cząstki otaczające; dalej należy uwzględnić siły działające na masę cząstek n. p. ciężkość; nakoniec tarcie o cząstki sąsiednie, tudzież o ściany przewodów.

Masy płynne mogą być zbiornikami energii kinetycznej, podobnie jak ciała stałe. Płyn będący w ruchu posiada energię kinetyczną, która tylko wtenczas i o tyle się zmienia, o ile siły zewnętrzne pracują nad jej zwiększeniem, albo. o ile płyn pracuje, przezwyciężając działające nań siły lub opory. Opory takie, pochodzące od tarcia wewnętrznego i zewnętrznego, istnieją we wszystkich znanych płynach; to też, jeżeli chodzi o uzyskanie stałego prądu, zmuszeni jesteśmy używać sił zewnętrznych, któreby pokonywały ciągle opory ruchu i uzupełniały straconą wskutek tych oporów energię. W tym celu używa się pomp, sikawek, poruszanych siłą zewnętrzną i t. p., albo utrzymuje się ruch działaniem ciężkości na części samego płynu, jak to bywa w wodociągach. Zadaniem takich urządzeń jest zwiększenie ciśnienia w jednej części przewodu, wskutek czego płyn porusza się w stronę ciśnienia mniejszego, z prędkością zależną od różnicy ciśnień.

Ażeby rozważyć dokładniej zależność ruchu od ciśnień, przypuśćmy naprzód, że ciecz jest doskonała i porusza się (bez tarcia) pod wpływem ciśnienia zewnętrznego. Jako przykład takiego ruchu weźmy pod uwagę przewód poziomy, w kształcie rury, napełniony cieczą (ryc. 135) i połączony ze sikawką, w której posuwamy tłok AB. Ciśnienie tłoka jest w tym razie jedyną siłą zewnętrzną, poruszającą ciecz, albowiem ciężkość nie wchodzi w rachubę, z powodu, że ruch odbywa się w ogólności poziomo.

Jeżeli tłok przesuwać będziemy w sikawce ruchem jednostajnym, wówczas prąd cieczy w przewodzie będzie oczywiście stały. Energia kinetyczna, jaką posiada ciecz wytryskająca z ujścia przewodu, jest skutkiem pracy wykonanej przez siłę P, działającą na tłok. Pracę tę oblicza się w następujący sposób. Oznaczmy przez S pole przekroju, przez v prędkość tłoka, przez p ciśnienie wywierane przezeń na ciecz w przekroju AB, obliczone na jednostkę powierzchni. Praca wykonana przez tłok w ciągu jednostki czasu będzie wtenczas Pv. Ponieważ jednak $P = pS$, przeto możemy wyra-

Ryc. 135.

zić tę pracę przez: pSv, a zważywszy, że $Sv = W$ oznacza wydatek, mamy ostatecznie: praca tłoka na sekundę $= pW$.

W ciągu jednostki czasu wytryska atoli z ujścia przewodu objętość W, a więc masa Wd cieczy, w czem d oznacza jej gęstość. W walcu sikawki ubywa jednocześnie masa Wd, równa poprzedzającej, wskutek wyparcia przez tłok. W innych częściach przewodu ruch cieczy nie doznaje żadnej zmiany. Jako wynik pracy tłoka mamy tedy naprzód ubytek masy Wd, która porusza się z prędkością v, a jednocześnie pojawia się taka sama masa u ujścia, z prędkością wytrysku, którą oznaczymy przez V. Ujście sikawki bywa zwyczajnie tak wązkie, w porównaniu z przekrojem tłoka, że prędkość wytrysku cieczy przewyższa nieporównanie prędkość posuwania się tłoka. Pomijając tedy stosunkowo bardzo małą energię kinetyczną masy wypartej z walca sikawki, możemy powiedzieć, iż energia kinetyczna masy wytryskającej z ujścia, jest jedynym skutkiem pracy tłoka. Uwaga ta prowadzi bezpośrednio do równania (ust. 107): $\frac{1}{2}\, Wd. V^2 = pW$, czyli $p = \frac{1}{2}\, d. V^2$, które orzeka, iż ciśnienie na tłok, potrzebne do wywołania pewnej prędkości wytrysku, wzrasta proporcyonalnie do kwadratu tej prędkości. Zależność tę wyrazimy jeszcze inaczej. Niechaj z oznacza miarę manometryczną, czyli »wysokość« ciśnienia p, wywieranego na ciecz za pośrednictwem tłoka; z oznacza zatem wysokość słupa cieczy uważanej, równoważącą swym ciężarem ciśnienie p. Wtenczas będzie (ust. 160):

$$p = zdg = \tfrac{1}{2}\, d.\, V^2, \text{ albo: } z = \frac{V^2}{2g}.$$

Zważywszy, że $\frac{V^2}{2g}$ oznacza t. zw. »wysokość prędkości« V (ust. 59) t. j. wysokość, z której jakiekolwiek ciało powinno spadać swobodnie, aby uzyskało prędkość równą prędkości wytrysku V, możemy powiedzieć, że *wysokość prędkości wypływu równa się wysokości ciśnienia wywieranego na ciecz.* [Gdybyśmy ujście przewodu zatkali, wówczas u ujścia jak i w całym przewodzie panowałoby ciśnienie hidrostatyczne p. W chwili otworzenia wylotu ciśnienie tamże spada do zera (mowa tu oczywiście o zwyżce, ponad ciśnieniem atmosfery), natomiast pojawia się jednocześnie prędkość wytrysku. Z tego powodu można się też wyrazić, że przy wypływie cieczy doskonałej, wysokość ciśnienia zamienia się całkowicie na wysokość prędkości].

Za pomocą podobnego rozumowania można obliczyć wartość ciśnienia panującego w różnych przekrojach przewodu, przyczem się okaże, że jeżeli rura połączona ze sikawką nie ma szerokości jednostajnej, wtenczas w różnych jej częściach ciecz płynąca wywiera ciśnienia różne. Oznaczmy ciśnienie panujące w cieczy w dowolnym przekroju A_1 (ryc. 135) przez p_1, w innym A_2 przez p_2; prędkości prądu tamże przez v_1 i v_2. Ciecz znajdującą się między tłokiem a przekrojem A_1 możemy uważać jako tłok, wywierający ciśnienie p_1 na przekrój A_1; podobnie ciecz między A_1 i A_2 stanowi jakoby tłok, cisnący dalsze części cieczy i nawzajem doznaje od nich ciśnienia p_2.

Jeżeli w przeciągu bardzo krótkiego czasu τ, ciecz, która znajdowała się między A_1 i A_2, przesunie się w sąsiednie położenie, między przekrojami A'_1 i A'_2, natenczas praca ciśnień p_1 i p_2, z których pierwsze pomaga ruchowi, a drugie mu przeszkadza, objawi się jako zwiększona energia kinetyczna uważanej części cieczy. Otóż łączna praca obu ciśnień (obliczona tak samo jak pierwej dla tłoka) posiada wartość: $p_1 W\tau - p_2 W\tau$. Celem obliczenia, o ile wskutek tej pracy zmieni się energia kinetyczna tej części cieczy, na którą działają ciśnienia p_1 i p_2, zważmy, że pomiędzy przekrojami A'_1 i A'_2 ruch cieczy nie uległ żadnej zmianie; ruch uważanej części cieczy zmienił się tylko o tyle, że cząstki, które znajdowały się między A_1 i A'_1 i miały tam prędkość v_1, ustąpiły stamtąd, a natomiast cząstki znajdujące się na przedzie weszły między A_2 i A'_2 i nabyły prędkości v_2, jaka panuje w tej części przewodu. Objętości wspomniane dopiero, mianowicie objętości $A_1\,A'_1$ i $A_2\,A'_2$ są sobie równe, wspólną ich wartością jest $W\tau$, albowiem na sekundę przepływa objętość W, przeto w czasie τ objętość $W\tau$. Masy cieczy mieszczącej się w nich będą więc obie: $W\tau d$, jeżeli d oznacza gęstość cieczy. Przyrost energii kinetycznej cieczy, znajdującej się pierwotnie między A_1 i A_2, wskutek przesunięcia do $A'_1\,A'_2$, oblicza się zatem tak:

$$\tfrac{1}{2}\,W\tau d.\,v_2^2 - \tfrac{1}{2}\,W\tau d.\,v_1^2.$$

Jeżeli, jak założyliśmy, prąd nie spotyka oporów w przewodzie, a więc jeśli niema tarcia, wtenczas przyrost ten energii kinetycznej będzie równoważny pracy ciśnień $(p_1 - p_2)\,W\tau$, skąd wynika równanie:

$$\tfrac{1}{2}\,d.\,v_2^2 - \tfrac{1}{2}\,d.\,v_1^2 = p_1 - p_2,$$

albo:

$$\tfrac{1}{2}\,d.\,v_1^2 + p_1 = \tfrac{1}{2}\,d.\,v_2^2 + p_2.$$

Równanie to okazuje, że wskutek różnic prędkości istnieć będą także różnice ciśnień w różnych przekrojach. Wyraziwszy ciśnienia p_1 i p_2 przez równoważne wysokości $z_1 = \frac{p_1}{dg}$ i $z_2 = \frac{p_2}{dg}$, podobnie jak to uczyniliśmy wyżej, możemy poprzedzające równanie napisać w następujący sposób:

$$\tfrac{1}{2}\,dv_1^2 + z_1 dg = \tfrac{1}{2}\,dv_2^2 + z_2 dg,$$

albo:

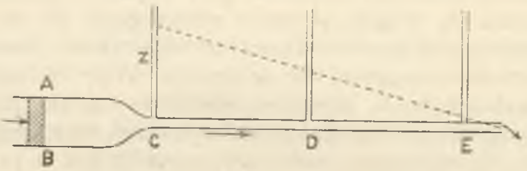
$$\frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + z_2.$$

Ono orzeka, że *suma wysokości prędkości i wysokości ciśnienia posiada tę samą wartość we wszystkich przekrojach przewodu poziomego, przewodzącego stały prąd cieczy doskonałej. [Prędkość wytwarza się zawsze kosztem ciśnienia i naodwrót]*. Z tego wynika, że *w częściach zwężonych przewodu, w których prędkość jest większa, panuje mniejsze ciśnienie, aniżeli w częściach rozszerzonych*. Może się nawet zdarzyć, że w częściach znacznie zwężonych ciśnienie będzie mniejsze, aniżeli w otaczającem powietrzu; gdybyśmy w takiem miejscu przebili ścianę przewodu, to nietylko płyn nie wyciekałby na zewnątrz, lecz na odwrót, zewnętrzne powietrze byłoby wessane przez prąd przebiegający. Ciśnienie atmosferyczne nie przyczynia się zresztą do poruszania cieczy, albowiem działa ono jednakowo na tłok i na ujście przewodu. Z tej przyczyny możemy na nie wcale nie zważać; jako p działające na tłok należy uważać nadwyżkę rzeczywistego ciśnienia nad atmosferycznem. Ciśnienie u ujścia przewodu można wówczas, jak to czyniliśmy wyżej, przyjąć jako równe zeru.

Opory w rurach. W poprzedzającej teoryi pominęliśmy zupełnie tarcie cieczy, wskutek tego nie stosuje się ona do ruchu w rurach nieco dłuższych a wązkich, w których opór tarcia jest bardzo wydatny. Weźmy n. p. pod uwagę przewód CE (ryc. 136) o przekroju j e d n o s t a j n y m, prosty, albo z lekka zakrzywiony. W rurze takiej prędkość prądu jest we wszystkich przekrojach jednakowa; z poprzedzającej teoryi wynikałoby więc, że ciśnienie powinno być wszędzie jednakowe, a mianowicie takie, jak u ujścia, t. j. równe ciśnieniu zewnętrznemu (w atmosferze). W rzeczywistości jest inaczej. Jeżeli w kilku punktach rury umieścimy pionowe manometry C, D, E (wązkie rurki szklane), a zatkawszy ujście wywierać będziemy na tłok ciśnienie p, wtedy ciecz podniesie się we wszystkich manometrach do tej samej wysokości, wskazującej nadwyżkę ciśnienia wywieranego przez tłok. nad ciśnieniem atmosferycznem. Gdy następnie otworzymy ujście i przepuścimy stały prąd przez rurę, to tylko w ostatnim manometrze, tuż przy ujściu, ciecz spadnie zupełnie, w innych natomiast zatrzyma się tem wyżej, im bardziej one są odległe od ujścia rury. W przewodzie utworzy się więc jednostajny spad ciśnienia, od początku rury aż do ujścia, jak to wskazuje linia kreskowana na rysunku. To dowodzi, że prąd doznaje w rurze oporu i to tem większego, im dłuższą jest rura. W istocie, ciśnienie w C jest większe aniżeli w D, albowiem pierwsze pędzi prąd przez całą długość rury CE, podczas gdy drugie pokonywa opór tylko w części DE. Opór, jaki prąd spotyka w rurze, działa więc jakoby częściowe zatkanie, albo przymknięcie ujścia, t. j. podnosi ciecz w manometrach. Za miarę oporu, jaki cała rura CE przedstawia prądowi stałemu, płynącemu z prędkością v, możemy więc przyjąć ciśnienie p, wskazane przez manometr umieszczony na początku rury. Jest to ciśnienie potrzebne do pędzenia prądu stałego przez całą długość $CE = L$, z prędkością v. Wartość jego wskazaną przez wysokość z, do której ciecz wznosi się w pierwszym manometrze C, nazywamy wysokością oporu; ona mierzy zarazem stratę ciśnienia w rurze, na długości CE.

Wysokość oporu, albo strata ciśnienia, jak widzimy, jest proporcyonalna do długości rury L, albowiem na połowie tej długości jest o połowę mniejsza niż na całej. Doświadczenie uczy, ze od wysokości tej zależy nadto prędkość prądu; gdy bowiem zwiększymy ciśnienie na tłok, wtenczas ciecz poruszać się będzie prędzej, ale zarazem podniesie się ona wyżej w manometrze na początku rury.

Istotę oporu, jaki prąd cieczy spotyka w rurach zdołano do pewnego stopnia wytłumaczyć. Zjawisko to jest szczególnie proste w rurach bardzo wązkich, włoskowatych. W takich jedynie rurkach ruch cieczy odbywa się zupełnie prawidłowo, każda cząstka posuwa się po linii równoległej do osi rurki. W przewodach szerokich natomiast, zwłaszcza



Ryc. 136.

w szybkim prądzie, drogi cząstek bywają częstokroć rozmaicie zakrzywione, a obok ruchu postępowego tworzą się wiry, zależne od przypadkowych nierówności ścian, których nie możemy ściśle określić. W rurkach włoskowatych ciecz porusza się w taki sposób, iż zewnętrzna jej warstwa przylega nieruchomo do ścian rurki, podczas gdy głębsze części cieczy poruszają się tem prędzej, im bliżej osi się znajdują. Jeżeli więc podzielimy ciecz, w myśli, na warstwy współosiowe z rurą, wówczas zrozumiemy łatwo, że każda z tych warstw ślizga się na poprzedzającej; ruch tego rodzaju wywołuje, jak wiadomo, opór wskutek tarcia wewnętrznego, czyli lepkości cieczy (ust. 164). Opór, jaki prąd spotyka w takich przewodach, zależy wyłącznie od lepkości cieczy i jest proporcyonalny do średniej prędkości v. Według Poiseuilla i Helmholtza, nadwyżka ciśnienia $= p$, która powinna działać na początku rurki włoskowatej o przekroju kolistym, celem utrzymania prądu stałego o średniej prędkości v, oblicza się według następującego wzoru:

$$(1) \qquad p = 8 \mu \frac{L}{R^2} \cdot v,$$

μ oznacza tu spółczynnik tarcia wewnętrznego, R promień kolistego przekroju rury. Z uwagi na wzór $p = \delta z$, w którym δ oznacza ciężar właściwy cieczy, znajdziemy, na podstawie (1), następujące wyrażenie wysokości oporu rury:

$$z = \frac{8\mu}{\delta} \cdot \frac{L}{R^2} \cdot v. \tag{2}$$

Wydatek prądu wynosi: $W = v \times R^2\pi$, czyli podług (1):

$$W = \frac{p R^4 \pi}{8 \mu L}. \tag{3}$$

Na ostatniem równaniu opiera się najprostszy sposób porównywania lepkości μ różnych cieczy. *Lepkości różnych cieczy mają się odwrotnie jak wydatki, t. j. jak objętości cieczy porównywanych, przepływające w jednakowych czasach, przez tę samą rurkę włoskowatą, pod jednakowemi ciśnieniami.*

W rurach szerszych, zwłaszcza przy większych prędkościach prądu, płyn nie porusza się w ogóle strugami równoległemi do osi; wzór (3) nie może być wówczas stosowany. Opór rury stosunkowo szerokiej pochodzi głównie od wirów tworzących się w prądzie. Wiry te zużywają energię kinetyczną wskutek tarcia wewnętrznego cieczy, a nie przyczyniają się do ruchu postępowego. Doświadczenia wykonane, zwłaszcza na wodociągach, okazały, że wysokość oporu rury szerokiej jest w przybliżeniu proporcyonalna do drugiej potęgi średniej prędkości prądu i do długości rury, zaś odwrotnie proporcyonalna do jej średnicy. Wysokość oporu możemy w tym razie przedstawić, z pewnem przybliżeniem, za pomocą wzoru wyprowadzonego z doświadczeń (empirycznego):

$$z = \alpha \cdot \frac{L}{D} v^2 \text{*)}. \tag{4}$$

Tu oznacza α spółczynnik niezależny od v i L, którego wartość jednak, jak doświadczenie okazało, jest nieco mniejsza dla rur o dużej średnicy D, aniżeli dla węższych. Jeżeli długości z, L i D wyrazimy w centymetrach, zaś prędkość v w *cm/sek*, wtenczas zgodnie z pomiarami, należy przyjąć, dla ruchu wody, następującą wartość tego spółczynnika:

$$\alpha = 0{\cdot}000\,005\,12 + \frac{0{\cdot}00003847}{\sqrt{D}}.$$

Który z wzorów (2) albo (4) stosować mamy do obliczania wysokości z oporu przewodu, to zależy od rodzaju cieczy i od prędkości

*) Dokładniejsze wyniki daje wzór kształtu: $z = mv + nv^2$, w którym m i n są dwa stałe spółczynniki, zależne od rodzaju rury i od rodzaju cieczy.

prądu. Dla wody, rurka o średnicy $\frac{1}{2}$ *mm*, o długości 300 razy większej zachowuje się już jako włoskowata. Dla innej cieczy bardziej ruchliwej, rurka powinnaby być węższą, aby zapobiedz powstawaniu wirów; ciecze bardzo lepkie płyną nawet w rurach szerokich równie prawidłowo, jak woda w włoskowatych.

Strata pracy wskutek oporu w rurach. Jeżeli przez rurę przepływa w ciągu sekundy objętość W cieczy, prądem stałym, natenczas ciśnienia na początku i na końcu rury, wykonywają razem pracę $= Wp$, (ust. 167) gdzie $p = \delta z$ oznacza nadwyżkę ciśnienia na początku rury. Praca ta zostaje w całości straconą, a raczej zamienia się przez tarcie na ciepło; prędkość bowiem w rurze jest wszędzie jednakowa, przeto praca ciśnień nie sprawia wcale przyrostu energii kinetycznej, lecz zużywa się całkowicie na pokonanie oporu rury. Wartość tej pracy straconej na sekundę wynosi podług (4):

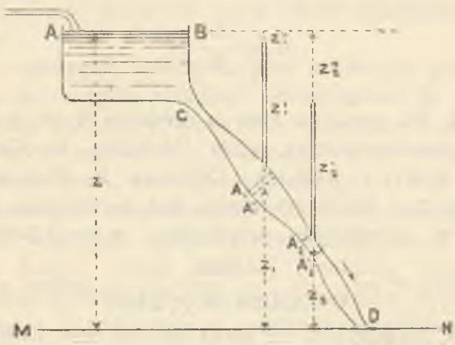
$$W\delta\alpha \frac{L}{D} v^2. \tag{5}$$

Przykład. Na początku rury o średnicy 4 *cm*, a długości 100 *m*, wywieramy, za pomocą pompy, stałe ciśnienie: 5 Kgr/cm^2; obliczyć prędkość prądu wody i wydatek. Ciśnienie 5 Kgr/cm^2 jest równoważne (ust. 160): $z = 5000$ *cm* wody; jest to zarazem wysokość oporu rury. Ponieważ w uważanym przypadku: $\alpha = 0{\cdot}00002436$, tudzież $\frac{L}{D} = 2500$, przeto $v^2 = \frac{5000}{0{\cdot}000\,024\,36 \times 2500}$, zatem $v = 287$ *cm/sek*, tudzież $W = 4 \times 3{\cdot}14 \times 287 = 3600$ $cm^3/sek = 13000$ *litrów/godzin*. Opór tego przewodu zużywa dzielność $= 5$ $Kg/cm^2 \times 3600$ $cm^3/sek =$ $= 2{\cdot}4$ koni.

168. Ruch cieczy pod wpływem ciężkości. Ruch cieczy może odbywać się wskutek własnego ciężaru cieczy, bez pomocy ciśnień zewnętrznych, wywieranych za pomocą tłoków. Ruch taki zdarza się najczęściej, albowiem wskutek ciężkości poruszają się rzeki, strumienie, woda w wodociągach miejskich i t. d. Wyłożymy tutaj ogólne prawa odnoszące się do prądów stałych, płynących w przewodach rurowych pod działaniem ciężkości. Weźmy pod uwagę przewód CD (ryc. 137), wychodzący z obszerniejszego zbiornika, w którym utrzymujemy, przez dolewanie, dostatecznie wzniesiony a stały poziom cieczy AB. Zastanowimy się nad rozmieszczeniem ciśnień w prądzie i nad wydatkiem takiego przewodu.

Zwróćmy uwagę na część cieczy, zawartą w pewnej chwili między przekrojami A_1 i A_2. Ciśnienia panujące w tych przekrojach oznaczymy przez p_1 i p_2; średnie prędkości prądu tamże przez

v_1 i v_2. Skoro po upływie krótkiego czasu τ ciecz uważana zajmie położenie sąsiednie między A'_1 i A'_2, natenczas, jak widzieliśmy w ust. poprz., jej energia kinetyczna powiększy się o $(\frac{1}{2} W\tau d) . (v_2{}^2 - v_1{}^2)$. W oznacza wydatek przewodu, $W\tau d$ jest masą cieczy między przekrojami A_1 i A'_1, albo A_2 i A'_2. Przyrost ten energii jest skutkiem pracy sił zewnętrznych, działających na uważaną część cieczy. Dotychczas uwzględnialiśmy tylko ciśnienia sąsiednich części cieczy; w uważanym przypadku, gdy przewód nie jest poziomy, uwzględnić należy nadto działanie ciążkości. Ciśnienia p_1 i p_2 przyczyniają się do powiększenia energii kinetycznej pracą $W\tau (p_1 - p_2)$ (ust. 167). Pracę ciężkości znajdziemy, zważywszy, że przy uważa-



Ryc. 137.

żanym przesunięciu się, ciecz ustępuje z przestrzeni między A_1 i A'_1, a jednocześnie zapełnia przestrzeń między A_2 i A'_2; praca ciężkości jest więc taka, jak gdyby masa $W\tau d$ spadała bezpośrednio z pierwszego miejsca do drugiego. Oznaczmy wysokości przekrojów A_1 i A_2, nad poziomem MN, wybranym dowolnie jako poziom porównawczy, przez z_1 i z_2, natenczas wyrażeniem pracy ciężkości będzie: $W\tau dg\ (z_1 - z_2)$ (ust. 109). Jeżeli przyjmiemy, że tarcie cieczy jest tak nieznaczne, iż można pominąć stratę energii, wynikającą z działania tej siły rozpraszającej, wtenczas na podstawie praw stosujących się do energii kinetycznej, uzyskamy równanie:

$$(1) \qquad \tfrac{1}{2} W\tau d\, (v_2{}^2 - v_1{}^2) = W\tau\, (p_1 - p_2) + W\tau dg\, (z_1 - z_2).$$

Możemy napisać je w następującej postaci:

$$z_1 + \frac{p_1}{dg} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{dg} + \frac{v_2^2}{2g}. \tag{2}$$

Wyrazy: $\frac{p_1}{dg}$ i $\frac{p_2}{dg}$, które dla skrócenia oznaczymy przez z_1' i z_2' są to wysokości ciśnienień (ust. 160) w przekrojach A_1 i A_2, t. j. wysokości, do których ciecz wzniosłaby się w rurkach manometrycznych (ryc. 137) połączonych z przewodem. Wyrazy zaś: $\frac{v_1^2}{2g}$ i $\frac{v_2^2}{2g}$, które oznaczymy przez z_1'' i z_2'', przedstawiają wysokości prędkości prądu w przekrojach A_1 i A_2. Prawo wyrażone równaniem (2) możemy wypowiedzieć w sposób następujący: *jeżeli stały prąd cieczy porusza się pod wpływem ciężkości, w przewodzie, w którym można pominąć wpływ tarcia, natenczas suma trzech wysokości, mianowicie: wysokości przekroju nad stałym poziomem porównawczym, wysokości ciśnienia i wysokości prędkości, posiada we wszystkich przekrojach tę samą wartość.* (Twierdzenie Bernoulliego).

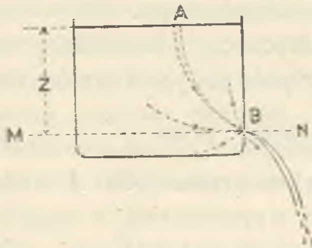
Jeżeli przez p rozumieć będziemy nadwyżkę ciśnienia w pewnym przekroju nad ciśnieniem otaczającego powietrza, (które działa zarówno nad AB jak i na ujście przewodu D i nie ma wpływu na prędkość przepływu), wtenczas suma wymienionych trzech wysokości będzie równa wysokości Z poziomu AB nad poziomem MN. Jeżeli bowiem zbiornik jest dość szeroki, wtenczas prędkość w przekroju AB możemy opuścić, jako bardzo małą; z trzech wyrazów z, z' i z'' odnoszących się do AB pozostanie wówczas tylko pierwszy. Równanie (2) możemy w tym razie napisać:

$$z + z' + z'' = Z \tag{3}$$

z, z' z'' odnoszą się do któregokolwiek przekroju przewodu.

Prawo Toricellego. Równania (1), (2), albo (3) dają ogólne wyobrażenie o rozmieszczeniu ciśnień i prędkości w cieczy płynącej pod wpływem własnego ciężaru. Nie są one zupełnie ścisłe, albowiem wyprowadzając je założyliśmy, że opór przewodu można zaniedbać. W rzeczywistości zaś wpływ oporu może być bardzo znaczny. Stosuje się tu wszystko, co powiedzieliśmy o oporze przewodów poziomych.

Jeżeli jednak przewodu wcale niema, a ciecz wypływa z obszernego zbiornika wprost na zewnątrz, przez mały otwór zrobiony w dnie, albo w bocznej ścianie (ryc. 138), wtenczas równanie (3) zgadza się dość dokładnie z rzeczywistością, zwłaszcza, gdy zastosujemy je do cieczy ruchliwych. Prowadzi ono wówczas do nader



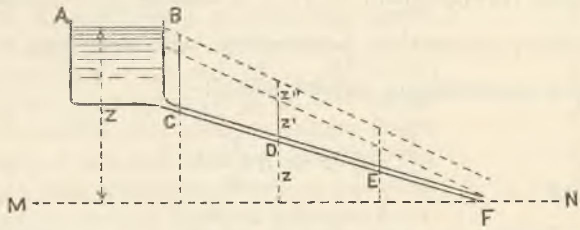
Ryc. 138.

prostego prawa wypływu, odkrytego przez Toricellego w roku 1644. Poprowadźmy poziom porównawczy MN przez środek otworu i przyjmijmy, że poziom A w zbiorniku utrzymujemy w stałej wysokości nad otworem, n. p. przez dolewanie cieczy. Będzie to wysokość, którą oznaczyliśmy wyżej przez Z. Stosując równanie (3) do przekroju otworu napiszemy $z' = 0$, ponieważ ciśnienie u ujścia równa się ciśnieniu zewnętrznemu; zostanie więc:

$$Z = z''.$$

Równanie to wyraża prawo Toricellego. Gdybyśmy otwór zatkali, wtenczas Z byłoby miarą ciśnienia hidrostatycznego, w poziomie otworu. Po otworzeniu otworu wytryska zeń prąd, z prędkością odpowiadającą wysokości $z'' = Z$, t. j. wysokość ciśnienia zamienia się całkowicie na wysokość prędkości. Ponieważ $z'' = \frac{v^2}{2g}$, gdzie v oznacza prędkość wypływu, przeto: $Z = \frac{v^2}{2g}$, skąd $v = \sqrt{2gZ} = 44\sqrt{Z}$ *cm/sek*; *ciecz ruchliwa wypływa przez mały otwór, w ścianie albo w dnie zbiornika, z taką prędkością, jakiejby nabyło ciało spadające swobodnie z poziomu powierzchni cieczy w zbiorniku na poziom otworu.* Prędkość wypływu nie zależy od tego, czy ciecz wytryska na bok, ze ściany, czy też pionowo na dół, z dna; ona nie zależy również od gęstości cieczy, tak n. p. rtęć wypływa równie prędko jak woda, byle Z było w obu przypadkach jednakowe.

Ciecz uchodząca z otworu tworzy żyłę jednolitą, która dopiero w pewnej odległości od otworu rozpada się na krople. Przy otworze schodzą się zbieżnie wszystkie strugi, któremi cząstki cieczy zdążają od powierzchni do otworu; z tego powodu żyła minąwszy otwór, jeszcze się cokolwiek zwęża. W miejscu najwięcej zwężonem przekrój jej wynosi około 0·62 przekroju otworu. W tym dopiero przekroju ciśnienie cieczy wyrównywa się z ciśnieniem otaczającego powietrza; ten przekrój należy więc uwzględniać przy



Ryc. 139.

obliczeniu wydatku. Jeżeli S oznacza pole otworu, natenczas wydatek będzie:

$$W = 0{\cdot}62\, S\sqrt{2gZ}, \text{ t. j. około } 27\, S\sqrt{Z}\, cm/sek.$$

Prawa Bernoulliego i Toricellego nie mają ścisłego zastosowania, gdy przewód jest długi a wązki. Dajmy na to, że ze zbiornika uchodzi ciecz rurą CF (ryc. 139) o jednostajnym przekroju. Prędkość v cieczy w rurze będzie we wszystkich przekrojach jednakowa (ust. 166). Umieściwszy wzdłuż rury kilka manometrów C, D, E przekonamy się (podobnie jak w ust. 167), że ciśnienie, przy ujściu F równe ciśnieniu zewnętrznemu, rośnie ku początkowi rury. Przyczyną tej zmienności ciśnienia w uważanym przypadku, jest atoli nietylko opór przewodu, lecz i pochylenie względem poziomu. Celem obliczenia ciśnienia n. p. w przekroju D, zastosujemy równanie (1) do przekrojów D i F; aby jednak uwzględnić wpływ oporu, należy odjąć po prawej stronie tego równania, od pracy ciśnień i ciężkości, pracę zużytą przez tarcie. Praca ta, w ciągu czasu τ, wyraża się przez (ust. 167, wzór (5)) $W\tau d g \alpha \frac{l}{D} v^2$, w czem l oznacza długość rury między D i F. Zważywszy jeszcze, że prędkości v_1 i v_2 w C i F są jednakowe, t. j. że praca ciśnień i ciężkości zostaje całkowicie zużyta przez opory, albowiem nie zmienia wcale energii kinetycznej, otrzymamy:

$$o = W\tau(p_1 - p_2) + W\tau dg(z_1 - z_2) - W\tau dg\alpha \frac{l}{D} v^2,$$

skąd:

$$z_1 - z_2 + \frac{p_1 - p_2}{dg} = \alpha \frac{l}{D} v^2.$$

Połóżmy poziom porównawczy MN przez ujście F przewodu i napiszmy dla skrócenia $z_1 - z_2 = z$; oznaczmy nadwyżkę ciśnienia w D nad ciśnieniem (zewnętrznem) w F, t. j. różnicę $p_1 - p_2$, przez p, nakoniec oznaczmy przez $z' = \frac{p}{dg}$ wysokość manometryczną w D natenczas równanie poprzedzające uzyska postać:

$$z + z' = \alpha \frac{l}{D} v^2,$$

albo, jeżeli dodamy do tych dwu wysokości z i z' jeszcze wysokość prędkości prądu, $z'' = \frac{v^2}{2g}$, postać:

$$z + z' + z'' = \frac{v^2}{2g} + \alpha \frac{l}{D} v^2.$$

Wnosimy stąd, że suma trzech wysokości, która według twierdzenia B e r n o u l l i e g o byłaby stałą gdyby przewód nie przedstawiał oporu, zmniejsza się w rzeczywistości od początku ku ujściu rury. U ujścia rury (w F) jest $z = o$ i $z' = o$ tudzież $l = o$; z trzech wysokości zostaje tylko z'', t. j. wysokość prędkości. Na początku rury (w C) suma wspomnianych trzech wysokości dorównywa wysokości Z, t. j. wysokości poziomu AB nad ujściem F. Jeżeli więc oznaczymy długość całego przewodu przez L wówczas otrzymamy, stosując ostatnie równanie do punktu C:

$$Z = \frac{v^2}{2g} + \alpha \frac{L}{D} v^2.$$

Stąd znajdziemy prędkość wypływu:

$$v = \sqrt{\frac{2gZ}{1 + 2g\alpha \frac{L}{D}}},$$

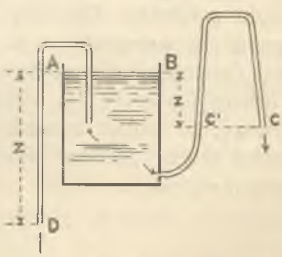
tudzież wydatek:

$$W = \frac{D^2\pi}{4} \cdot v.$$

Aspirator. Prawo Bernoulliego, jakkolwiek nie zupełnie ścisłe i nie liczące się z oporem przewodów, objaśnia jednak w ogólnych zarysach działanie niektórych przyrządów polegających na ruchu cieczy. Do takich należą aspiratory, służące do ssania albo pompowania powietrza. Prąd cieczy, uchodzący ze zbiornika, przepływa z góry na dół przez rurkę pionową AB (ryc. 140); ciśnienienie u ujścia (w B) równa się ciśnieniu zewnętrznego powietrza $= p_0$. W przekroju A, znajdującym się w wysokości $AB = \frac{p_0}{dg}$ nad ujściem B, znajdziemy na podstawie prawa Bernoulliego ciśnienie równe zeru. Jeżeli bowiem podstawimy w równaniu (2) $z_1 - z_2 = AB$, $v_1 = v_2$, $p_2 = p_0$, otrzymamy $p_1 = o$. Powyżej przekroju A znaleźlibyśmy ciśnienia ujemne. Ciągły prąd powyżej A nie jest możliwy; ciecz rozrywa się na krople. Tam właśnie umieszczona jest rurka boczna, bądź to otwarta, bądź też połączona z naczyniem zawierającem powietrze lub inny gaz. Gaz ten bywa porywany przez spadające krople i zostaje wyrzucony na zewnątrz przez ujście B; w naczyniu tworzy się stopniowo próżnia. Na tej zasadzie polega aspirator wodny Bunsena, pompa pneumatyczna rtęciowa Sprengla i t. d.

Ryc. 140.

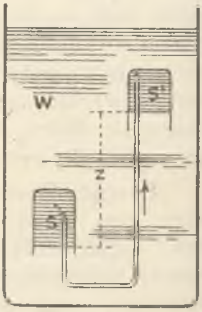
Lewar. Rura wyprowadzająca ciecz ze zbiornika nie zawsze bywa prosta, albo pochylona jednostajnie na dół, jak na ryc. 137 lub 139. Prawa ruchu cieczy, wyłożone poprzednio, stosują się niemniej, jeżeli przewód jest jakkolwiek zakrzywiony lub pochylony. Jeżeli część rury odpływowej wznosi się ponad poziom AB cieczy w zbiorniku (ryc. 141, CC, albo AD), wówczas przewód taki nazywamy lewarem. Celem wdrożenia wypływu trzeba naprzód wypełnić rurę cieczą, n. p. przez ssanie u otwartego końca C lub D, poczem ciecz wypływać będzie pod wpływem ciężkości, podobnie jak wypływa przez przewód pochylony i wychodzący z dna zbiornika. Koniecznym jednak warunkiem ciągłego odpływu jest to, żeby ujście lewara znajdowało się w poziomie niższym, aniżeli powierzchnia AB cieczy w zbiorniku. Gdy bowiem cząstka cieczy opada z poziomu AB do ujścia C lub D, położonego niżej, ciężkość wykonywa pracę dodatnią, a skutkiem tej pracy jest prędkość nabyta przez cząstkę. Gdyby ujście przewodu leżało powyżej poziomu AB, ciecz wypływająca podnosiłaby się do wyższego poziomu — co widocznie niemożliwe. Według prawa Toricellego, które stosuje się w przybliżeniu i do lewara, o ile opory ruchu są nieznaczne, prędkość odpływu wynosi:



Ryc. 141.

$\sqrt{2gZ}$, w czem Z oznacza głębokość ujścia pod powierzchnią. Ciśnienie w punkcie najwyższym lewara jest zawsze mniejsze niż ciśnienie (powietrza) panujące na powierzchni AB cieczy w zbiorniku; różnica ciśnień jest tem znaczniejsza, im wyżej lewar wznosi się nad poziom AB. Widocznem jest przeto, że wzniesienie lewara nad poziom AB nie powinno przewyższać wysokości ciśnienia powietrza otaczającego, wyrażonej słupem danej cieczy. W przeciwnym razie nietylko wypływ nie byłby możliwy, lecz ciecz nie mogłaby nawet wznieść się do kolana. Do przelewania cieczy z jednego naczynia do drugiego używa się zwykle lewarów utworzonych z rury zgiętej w kształcie odwróconego U (ryc. 141; D), zanurzonej jednym końcem w cieczy.

Lewar odwrócony. Jeżeli umieścimy lewar nie w powietrzu, lecz w cieczy jakiej, dostatecznie gęstej, wtenczas zdołamy przelewać za pomocą niego inną ciecz, lżejszą, do góry. Dajmy na to, że w dużym słoju W (ryc. 142) znajduje się woda, w szklankach zaś S i S' odwróconych dnem do góry, nafta. Krótsze ramię lewara zanurzone jest w szklance niższej, dłuższe sięga do szklanki wyższej. Skoro wdrożymy ruch przez napełnienie całego lewara naftą, natenczas, wskutek działania ciężkości, ciecz ta będzie przelewać się do szklanki wyższej. W tym przypadku bowiem ciężkość wykonywa pracę dodatnią, gdy ruch w lewarze odbywa się ku górze. Na miejsce lekkiej cieczy, wypływającej z S, wstępuje ciecz cięższa, a jednocześnie lżejsza wypiera cięższą ze szklanki S'. Przy spadaniu cieczy gęstszej ciężkość wykonywa pracę dodatnią, przy podnoszeniu się lżejszej, ujemną, ale mniejszą; różnica tych prac zamienia się na energię kinetyczną prądu w lewarze. Gdy n. p. jednostka objętości cieczy gęstszej (gęstość $= d$) spadnie z wysokości z, t. j. z S' do S, a jednocześnie tyleż cieczy rzadszej (gęstość $= d'$) pójdzie w górę, praca ciężkości będzie: $(d - d')\,gz$, a energia kinetyczna, udzielona cieczy rzadszej w lewarze: $\frac{1}{2} d'v^2$. Zważywszy, że wobec znacznej szerokości słoja W możemy opuścić prędkość ruchu cieczy gęstszej, spadającej na dół, znajdziemy równanie $(d - d')\,gz = \frac{1}{2} d'v^2$, skąd:



Ryc. 142.

$$v = \sqrt{2gz\,\frac{d - d'}{d'}}.$$

Równanie to znajduje ważne zastosowanie w teoryi kominów (ust. 185), które w istocie też są takimi lewarami odwróconymi; zamiast nafty trzeba pomyśleć powietrze ciepłe, a więc rzadsze, zamiast wody powietrze atmosferyczne, chłodne i gęstsze od tamtego.

169. Fale. Do ruchów wywołanych przez ciężkość należą jakże fale, tworzące się na swobodnej powierzchni cieczy, gdy jakiekolwiek wstrząśnienie wyprowadzi ją z położenia równowagi. Większe masy płynne, zostające pod działaniem ciężkości, usiłują zachować stan równowagi stałej, w którym powierzchnia cieczy jest płaszczyzną poziomą. Jeżeli tę równowagę zwichniemy jakimkolwiek sposobem — n. p. rzucając kamień do wody — wówczas zaburzenie, sprawione w jednem miejscu, przenosi się z biegiem czasu do dalszych części cieczy, jako fala, mająca kształt rozszerzającego się kręgu. Fala składa się z wzniesienia pewnej części cieczy nad poziom równowagi (grzbiet fali), tudzież z pogłębienia, zwanego doliną. Grzbiet i dolina stanowią jedną falę. Rzuciwszy słomkę na powierzchnię wody, po której przebiegają fale, przekonamy się, że podczas przejścia fali słomka waha się na dół i w górę, naprzód i wstecz, lecz wogóle nie odpływa z tego miejsca, gdzie ją pierwotnie umieściliśmy. To dowodzi, że podczas falowania cieczy, cząstki jej doznają tylko małych przesunięć i nie oddalają się wiele z położeń, jakie zajmują w stanie równowagi. Ruch postępowy, jednostajny, właściwy falom, wynika z tego, że pewna forma odkształcenia przenosi się po kolei do różnych części cieczy; lecz temu ruchowi formy nie towarzyszy prąd cieczy. Prawdę tę uzmysłowia dobrze łan zboża, falujący pod wpływem wiatru; jest to również ruch, w którym kłosy pochylają się nieco naprzód i wstecz, a kołysanie się ich udziela się z biegiem czasu coraz dalszym kłosom.

W każdej fali mieści się pewien zapas energii. Energia ta jest po części kinetyczną, zależną od mas i prędkości tych części, które w uważanej chwili są w ruchu; po części zaś jest to energia odkształcenia, potencyalna, a siedzibą jej są te części cieczy, które w uważanej chwili są wyprowadzone z położenia równowagi, a więc podniesione lub zniżone. Ruch falowy możemy przeto uważać jako przenoszenie się energii z jednego miejsca w ciele do drugiego, z pewną stałą prędkością. Części ciała nie towarzyszą jednakowoż ruchowi tej energii, lecz podają ją sobie po kolei.

Wahanie się cząstek wody falującej można uwidocznić przez domieszanie do wody lekkich, unoszących się w niej ciałek, n. p. trocin lub t. p. Okazało się, że podczas przebiegu fal poszczególne cząstki wody krążą w płaszczyznach pionowych, prostopadłych do długości grzbietów i dolin, po obwodach kolistych albo (w płytkiej wodzie) eliptycznych. Wahania te, największe na powierzchni, ogarniają także cząstki położone w głębi; przenikają w głąb tem większą, im większe są rozmiary falowania. Każda cząstka wody zajmuje punkt najwyższy swego kolistego toru w chwili, gdy przez nią przebiega grzbiet fali; następnie opada w dolinę; poczem, w chwili, gdy nadejdzie grzbiet następny, powraca znowu na szczyt koła. Okres T jednego wahania się cząstki trwa widocznie tak długo, jak długiego potrzeba czasu, żeby fale posunęły się naprzód o odległość jednego grzbietu od następnego, zwaną długością fali $= \lambda$. Jeżeli tedy c oznacza prędkość postępu fal (formy falistej) będzie, jak w każdem zresztą falowaniu, $\lambda = cT$.

Prędkość postępu fal, na wodzie bardzo głębokiej, w stosunku do długości fali λ, oblicza się według wzoru:

$$c = \sqrt{\frac{\lambda g}{2\pi}},$$

w którym g oznacza natężenie ciężkości. Na wodzie płytkiej nie zależy ona od długości fali, zależy natomiast od głębokości, czyli grubości warstwy wodnej $= z$; jest mianowicie w tym przypadku $c = \sqrt{gz}$. Fale na oceanie miewają nierzadko długość $\lambda = 100$ m, cząstki wody krążą po kołach o średnicy 6 m i więcej; pierwszy z powyższych wzorów daje jako prędkość postępu takiej fali $c = 12$ m/sek. Przyczyną ich powstawania bywa zwykle wiatr, czasem wybuchy wulkaniczne podmorskie.

170. Ruch ciał stałych w płynach. Jeżeli jakikolwiek przedmiot, zanurzony całkowicie, albo częściowo w cieczy — dajmy na to okręt lub ryba — zostaje wprowadzony w ruch, wówczas z konieczności poruszają się również cząstki cieczy otaczającej. Z jednej strony ustępują one z drogi przedmiotowi poruszającemu się, z przeciwnej strony łączą się napowrót. Ruch cieczy jest najwydatniejszy w pobliżu ciała, w odległości większej, nieznaczny. Jeżeli zważymy, że siła, która porusza ciało, utrzymuje także w ciągłym ruchu części cieczy, zrozumiemy, że trudniej będzie poruszać ciała w cieczy, aniżeli w przestrzeni próżnej. Powiadamy więc, że ciecz stawia opór ruchowi ciała. Opór ten trwa jednak tylko dopóty, dopóki ciało się porusza, a znika gdy ruch ustaje. Ciała znajdujące się w próżni mogą poruszać się jednostajnie bez pomocy sił zewnętrznych; natomiast utrzymanie ruchu ciała w cieczy wymaga ciągłego wydatku pracy, nawet wówczas, gdy ruch jest jednostajny (motory na statkach parowych, ciśnienie wiatru na żagle i t. p.). W przypadku ruchu jednostajnego ciała zanurzonego, przyczyny oporu należy szukać w tem, że rozsuwanie się części cieczy wzbudza w tejże tarcie wewnętrzne, które zużywa pracę i zamienia ją na ciepło. Im większa jest prędkość ciała, tem większy opór ciecz stawia ruchowi t. j. opór rośnie razem z prędkością. Gdy prędkość jest bardzo mała, wtenczas opór zależy niemal wyłącznie od lepkości cieczy, a wskutek tego jest proporcyalny do prędkości (ust. 164). Przy szybkim ruchu ciała ruch cieczy otaczającej staje się burzliwym; w sąsiedztwie ciała tworzą się wiry, których energia zużywa się ciągle przez tarcie wewnętrzne cieczy. Praca siły poruszającej ciało zużywa się na nieustanne odnawianie i podtrzymywanie tych wirów. Nadto, jeżeli ciało płynie na powierzchni cieczy, jak n. p. okręty lub łodzie, tworzą się około niego fale, które, oddalając się, zabierają znaczną ilość energii użytej na poruszanie ciała. W tych przypadkach, jak okazało doświadczenie, opór rośnie w wyższym stosunku aniżeli prędkość; w przybliżeniu jest on proporcyonalny do kwadratu prędkości.

Opór cieczy zależy nadto od postaci ciała poruszającego się. Szerokie płaszczyzny doznają większego oporu, aniżeli ciała poruszające się naprzód częścią zwężoną lub zaostrzoną. Z tego powodu statki, pociski działowe i t. p. bywają ku przodowi zwężane, wogóle są walcowate i wydłużone, słowem podobne kształtem do ryby.

Opór cieczy jest wzajemnem oddziaływaniem ciała poruszającego się i samejże cieczy; ciało poruszające się doznaje od cieczy oporu w kierunku przeciwnym ruchowi, ale nawzajem ciągnie ono ciecz w kierunku ruchu. Jeżeli przeto umieścimy ciało nieruchome w prądzie cieczy, to tož samo działanie, które przedtem nazwaliśmy oporem, stanowić tu będzie ciśnienie, czyli parcie prądu na ciało. Zastosowaniem tego parcia są motory wodne, koła i turbiny.

Ciało kształtu kulistego, poruszające się w płynie z małą prędkością, spotyka, podług obliczenia Stoke'sa, opór P proporcyonalny do lepkości płynu μ, do prędkości v i do średnicy kuli $2r$. Jest mianowicie $P = 6\pi\mu r v$. Ważnem jest zastosowanie tego wzoru do obliczenia spadania ciał kulistych w powietrzu, wodzie i t. p. W miarę tego, jak ciało takie, spadając, nabywa coraz większej prędkości, rośnie także opór płynu. W końcu staje się równy ciężarowi kuli i równoważy jego działanie. Od tej chwili kula spada bez przyśpieszenia, ruchem jednostajnym, z nabytą poprzednio prędkością v. Jeżeli d oznacza gęstość ciała, ciężar jego będzie $Q = \frac{4}{3} r^3 \pi d g$. Równanie $P = Q$ daje[1]) $v = \frac{2r^2 dg}{9\mu}$ jako prędkość jedno-

[1]) Ściśle biorąc należałoby uwzględnić jeszcze pozorne zmniejszenie ciężaru wskutek parcia cieczy do góry. W gazach jest ono nieznaczne.

stajnego spadania takiej kuli. Jak widzimy, spadanie będzie tem powolniejsze, im mniejsza średnica kuli i im mniejsza jej gęstość. Prawo to tłumaczy, dlaczego drobne pyły w powietrzu, albo kropelki wody stanowiące mgłę i chmury, albo miałkie proszki w wodzie i t. p. spadają tak wolno, iż wydaje się niemal jak gdyby unosiły się nieruchomo w łonie płynu. Jeżeli bowiem zmniejszymy o połowę średnicę jakiegokolwiek przedmiotu, wtenczas objętość, masa i ciężar, t. j. siła poruszająca, zmniejszają się do jednej ósmej części; opór zaś jaki płyn stawia ruchowi takiej kuli, zmniejszy się tylko do połowy: z tego wynika, zgodnie z poprzednim wzorem, że wpływ oporu na spadanie ciał jest tem wydatniejszy, im mniejsze są ich rozmiary.

Zadania.

316) Rura wodociągowa, o średnicy 50 *cm* w świetle, ma dostarczać wody w ilości 20000 m^3 na dobę. Ile powinna wynosić średnia prędkość wody w rurze? *Odp.* 1·18 *m/sek.*

317) Jakie ciśnienie powinna mieć woda na początku poziomej, prostej rury, o średnicy 4 *cm* i długości 20 *m*, jeżeli wydatek ma wynosić 700 cm^3/sek?

Odp. Prędkość $v = \frac{700}{4\pi} = 55{\cdot}7$ *cm/sek*, stąd (podług 4, ust. 167) ciśnienie $= 37{\cdot}8$ Gr/cm^2.

318) Jaką dzielność powinien mieć motor pędzący wodę w powyższej rurze?

Odp. $37{\cdot}8 \times 700 = 26460$ *Gr. cm/sek.*

319) O ile większa powinnaby być ta dzielność, gdyby rura była pionowa, a woda wznosiła się do góry?

Odp. Na sekundę podnosiłoby się 700 *gr* wody na wysokość 20 *m*; zatem praca na sekundę powiększa się o 700×2000 *Gr. cm/sek.*

320) Przez pewną rurkę włoskowatą 1 cm^3 wody przepływa w przeciągu 625 *sek*; przez tę samą rurkę i pod wpływem takiego samego ciśnienia 1 cm^3 chloroformu przepływa w przeciągu 225 *sek.* Obliczyć spółczynnik lepkości chloroformu, przyjmując dla wody $\mu = 0{\cdot}013$.

Odp. $\frac{225 \times 0{\cdot}013}{625} = 0{\cdot}0047$.

321) W dnie naczynia walcowatego, leżącego poziomo, znajduje się mały otworek. Na płyn znajdujący się w walcu wywieramy ciśnienie za pośrednictwem tłoka. Znaleźć związek pomiędzy prędkością wypływu (v) a wysokością ciśnienia (z) wywieranego przez tłok (pomijając tarcie).

Odp. S i s pola tłoka i otworka; p i P ciśnienie i siła wywierane przez tłok; V prędkość tłoka; wydatek $W = VS = vs$. Praca tłoka na sekundę $= pW =$ energii kinetycznej wypływu, t. j. $\frac{1}{2}\, Wdv^2$. Stąd $v^2 = \frac{2p}{d}$; ponieważ $p = zdg$, przeto $v = \sqrt{2gz}$.

322) W dnie walca stojącego pionowo znajduje się mały otworek. Głębokość otworka pod powierzchnią płynu wynosi 1·5 *m*. Znaleźć prędkość wypływu.

Odp. $v = \sqrt{2 \times 981 \times 150} = 542{\cdot}5$ *cm/sek.*

323) Na powierzchni płynu w tymże walcu umieszczono tłok, poruszający się szczelnie, lecz bez tarcia i obciążono go ciężarem 10 *Kg*. Znaleźć prędkość wypływu, wiedząc, że przekrój tłoka wynosi 2000 cm^2, a płynem jest alkohol o gęstości 0·8.

Odp. Ciśnienie pod tłokiem $= \frac{10000}{2000} = 5$ Gr/cm^2. Wysokość tego ciśnienia jest: $\frac{5}{0{\cdot}8} = 6{\cdot}25$ *cm* alkoholu. Całkowita wysokość ciśnienia wynosi więc: $150 + 6{\cdot}25$, skąd $v = \sqrt{2 \times 981 \times 156{\cdot}25} = 553{\cdot}7$ *cm/sek.*

ROZDZIAŁ XII.

Własności gazów.

171. Rodzaje gazów. Powietrze i para wodna są najbardziej rozpowszechnionymi na ziemi i najdawniej znanymi przedstawicielami gazów. Jako ciała przeźroczyste, najczęściej bezbarwne, a nadto zwyczajnie bardzo lekkie i stawiające mały opór ruchowi ciał, gazy mało zwracały na siebie uwagę. Dopiero od drugiej połowy XVIII wieku, dzięki rozwojowi chemii, poznano znaczną ich liczbę. W r. 1774 Priestley i Scheele odkryli tlen; Cavendish i Watt okazali w r. 1781, że przy spaleniu wodoru, znanego już przedtem, powstaje para wodna. Około tego czasu odkryto azot, a Scheele i Lavoisier dowiedli, że powietrze jest mieszaniną kilku gazów, której głównymi składnikami są tlen i azot. Obok wymienionych znamy obecnie nader wielką ilość rozmaitych gazów, jak n. p. tlenek i dwutlenek węgla, chlor, amoniak, metan, etylen, gaz oświetlający (mieszanina), pary eteru, alkoholu, rtęci i wiele innych.

Wiele gazów można zamienić na ciecze, t. j. skroplić, w temperaturze zwyczajnej, przez zmniejszenie objętości, czyli zgęszczenie. Gazy takie nazywamy zwyczajnie parami tych cieczy. Inne nie dają się skroplić w temperaturze zwyczajnej, przez samo zgęszczenie, lecz wymagają nadto znacznego oziębienia; te nazywamy krótko gazami (wodor, tlen, azot, powietrze i inne).

172. Kierunek ciśnienia. Gazy posiadają wiele własności wspólnych z cieczami. Podobnie jak ciecze nie posiadają one zupełnie sprężystości postaci. Możemy bowiem zmieniać kształt naczynia zawierającego gaz, (nie zmieniając pojemności), a nie dostrzeżemy przytem żadnego oporu sprężystego ze strony gazu. Jeżeli jakikolwiek przedmiot, znajdujący się w powietrzu, przeniesiemy na inne miejsce, to również nie objawi się dążność do odskoczenia do miejsca pierwotnego. W gazach działa tylko sprężystość objętości, wtenczas gdy je zgęszczamy.

Skutkiem tej własności, ciśnienie w gazach nieruchomych, podobnie jak w cieczach, jest prostopadłe do powierzchni uciskanej. Podczas ruchu objawia się jednak tarcie wewnętrzne, albowiem gazy, podobnie jak ciecze, są ciałami lepkiemi, jakkolwiek w mniejszym stopniu; ciśnienie gazu może mieć wówczas składową równoległą do powierzchni. Prawo Pascala (ust. 154) stosuje się zatem także do gązów, zostających pod wpływem li tylko ciśnień zewnętrznych, działających na powierzchnię. W tym razie w całej masie gazu ciśnienie jest jednakowe i równa się ciśnieniu działajacemu na powierzchnię. Jeżeli zaś uwzględnimy ciężkość, t. j. siłę działającą na wszystkie części masy, a nie tylko na powierzchnię gazu, ciśnienie będzie w dolnych warstwach większe niż w górnych. Różnice te w cieczach są znaczne, w gazach pospolicie nader małe, gdyż ciężar własciwy gazów jest mały. Różnice ciśnienia w różnych poziomach, wynikające z ciężaru własnego gazów, uwzględniać będziemy tylko w atmosferze ziemi; w małych naczyniach, napełnionych gazami, można zawsze przyjąć, że ciśnienie jest wszędzie jednostajne.

173. Prężność gazów. Gazy, podobnie jak ciecze, są ciałami ściśliwemi i doskonale sprężystemi, t. j. objętość ich zmniejsza się, gdy zwiększamy ciśnienie zewnętrzne, działające na powierzchnię a powiększa się znowu, gdy ciśnienie zmniejszymy. Co do stopnia ściśliwości zachodzi jednak pomiędzy gazami a cieczami pospolitemi znaczna różnica. Gdy bowiem gęstość n. p. wody, przy użyciu zwyczajnych ciśnień, tak mało się zmienia, że można uważać ją jako stałą, to natomiast gęstość powietrza jest do tego stopnia zmienna, że miernem ciśnieniem można ją podwoić (ryc. 143, kropkowanie oznacza przestrzeń zajętą przez gaz). Różnica ta nie jest jednak istotną; znamy bowiem ciecze, jak n. p. skroplony dwutlenek węgla, których ściśliwość dorównywa niemal ściśliwości gazów.

Różnica zasadnicza pomiędzy cieczami a gazami polega na tem, że ciecze posiadają objętość zupełnie określoną, zależną wprawdzie cokolwiek od ciśnienia zewnętrznego, któremu są poddane (i od temperatury), ale niezależną od pojemności naczyń, w których są zawarte. Z tego powodu ciecze — zwłaszcza wolno parujące, jak rtęć — można przechowywać w naczyniach otwartych; wówczas zajmują one część naczynia, odpowiednią do swej objętości i oddzielają się od reszty wyraźną powierzchnią swobodną. Gazy natomiast *nie posiadają ani powierzchni swobodnej, ani objętości niezależnej od pojemności naczynia.* Ta sama masa gazu, wprowadzona do małego naczynia, zajmować będzie małą objętość; wprowadzona do obszernego, przyjmie objętość większą, albowiem rozejdzie się w obu razach w całej pojemności naczynia. Z tego powodu musimy przechowywać gazy w naczyniach zamkniętych, gdyż z naczyń niezamkniętych uchodzą i rozpraszają się w otaczającej przestrzeni. Jeżeli do naczynia zamkniętego, a próżnego, wprowadzimy choćby najmniejszą ilość gazu, wtenczas rozszerzy się on i zajmie jednostajnie całą przestrzeń naczynia. Własność tę zasadniczą gazów i par nazywamy rozprężliwością. Objawia się ona jako dążność do nieograniczonego rozszerzania się; wszystkie części masy gazowej, choćby najbardziej rozrzedzonej, zachowują się tak, jak gdyby się wzajemnie odpychały. Ciśnienie, które gaz zamknięty w naczyniu, usiłując się rozszerzyć, wywiera na jego ściany, nazywa się także prężnością gazu.

Ciśnienie wewnętrzne w gazach musi być wskutek tego zawsze dodatnie, a jakkolwiek maleje, gdy objętość gazu zwiększamy, to jednak dopiero przy nieskończenie wielkiem rozrzedzeniu gazu stałoby się równem zeru. W cieczach natomiast, zwłaszcza w cieczach wolno parujących (rtęć, gliceryna), możemy z łatwością zmniejszyć ciśnienie do zera, umieszczając je w próżni; objętość ich ledwie cokolwiek przytem się zwiększy; ciśnienie wewnętrzne w cieczach możemy nawet uczynić ujemnem, t. j. poddać je małemu napięciu. Słowem, przy zmniejszającem się ciśnieniu zewnętrznem rozszerzanie się cieczy dąży do pewnej stałej granicy; w gazach takiej granicy nie znamy; przy zmniejszającem się ciśnieniu zewnętrznem, rozszerzają się one, o ile dotąd wiadomo, nieograniczenie.

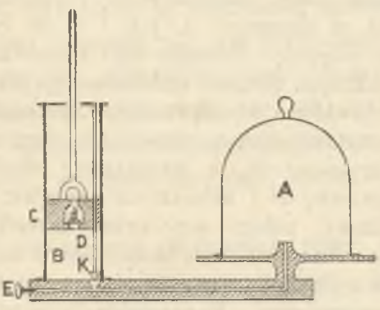
Ryc. 143.

Prężność gazów w stanie równowagi miarkują ciśnienia i siły zewnętrzne. Ryc. 143 wyobraża gaz, którego prężność jest zrównoważona ciśnieniem tłoka obciążonego, tudzież ciśnieniem otaczających go ścian naczynia. Prężność atmosfery ziemskiej jest znowu zrównoważona działaniem ciężkości na samo powietrze.

Pompa pneumatyczna. Dzięki rozprężliwości możemy wydalać czyli wypompowywać powietrze, i inne gazy, z naczyń zamkniętych. Przyrządy używane w tym celu nazywają się pompami pneumatycznemi (gr. pneuma = powietrze, dech). Ryc. 144 objaśnia zasadę takiej pompy. Naczynie A, zawierające gaz mający się wypompować, łączy się za pośrednictwem wązkiej szyjki z walcem B, w którym umieszczony jest tłok C, przystający szczelnie do ścian walca, i dający się przesuwać tam i napowrót. Za pomocą kurka K można wnętrze naczynia łączyć z przestrzenią B w walcu pod tłokiem, albo też oddzielić je od walca i zamknąć zawarty w niem gaz. Tłok jest przewiercony równolegle do osi walca, a otwór przykryty jest zastawką (wentylem), otwierającą się na zewnątrz. Słaba sprężyna przyciska zwyczajnie zastawkę D do otworu. Połączywszy przez stosowne ustawienie kurka, naczynie A z walcem B, wyciągamy tłok ku otwartemu końcowi walca; gaz, znajdujący się w naczyniu A, rozszerza się wskutek swej rozprężliwości i rozchodzi się jednostajnie zarówno w naczyniu A, jak i w tej części B walca, z której tłok ustępuje. Podczas tego ruchu zastawka D jest szczelnie zamknięta, poczęści działaniem sprężyny, lecz głównie ciśnieniem powietrza zewnętrznego. Zamknąwszy następnie kurek K zesuwamy tłok na dno walca. Gaz, zebrany poprzednio w B zgęszcza się, a uzyskawszy dostateczną prężność otwiera zastawkę D i uchodzi na zewnątrz. Działanie pompy, jak widzimy, polega więc przedewszystkiem na rozprężliwości gazów. Pierwszy ruch tłoka, tam i napowrót, nie wypróżnia jeszcze bynajmniej naczynia A, lecz wyprowadza zeń tylko ułamek masy gazu. Powtarzając opisane ruchy tłoka rozrzedzać będziemy zawartość zbiornika A stopniowo coraz więcej. Zastanowiwszy się jednak nad sposobem działania pompy przekonamy się, że nie zdołamy nigdy wypróżnić naczynia A całkowicie. Oznaczmy bowiem przez m masę gazu zawartą z początku w zbiorniku A, przez d jej gęstość; V niechaj oznacza pojemność zbiornika, v pojemność walca, którą odsłania tłok przesunięty do zewnętrznego końca. Po pierwszym ruchu tłoka masa m zajmie objętość $V+v$, wskutek czego gęstość jej, równa pierwotnie: $d=\frac{m}{V}$ stanie się: $d_1=\frac{m}{V+v}$. W zbiorniku A pozostaje więc masa $m_1=Vd_1$ $=m\,.\,\frac{V}{V+v}$. Po drugim ruchu tłoka pozostała masa m_1 zapełni znowu objętość $V+v$. Gęstość jej zmniejszy się do wartości: $d_2=\frac{m_1}{V+v}=$ $=\frac{mV}{(V+v)^2}$; w zbiorniku A pozostanie więc teraz masa: $m_2=Vd_2=$ $=m\left(\frac{V}{V+v}\right)^2$ i t. d. Widoczne tedy, że po wykonaniu n ruchów tłoka

Ryc. 144.

zmniejszy się gęstość gazu w zbiorniku do wartości: $d_n = \frac{m}{V}\left(\frac{V}{V+v}\right)^n = d\left(\frac{V}{V+v}\right)^n$, a masa pozostała w zbiorniku wynosić będzie; $m_n = m\left(\frac{V}{V+v}\right)^n$. Masa i gęstość, przy kolejnych ruchach tłoka, maleją zatem według postępu geometrycznego; wartość $= o$ uzyskałyby dopiero dla $n = \infty$. W rzeczywistości masa i gęstość w zbiorniku zdążają do granicy różnej od zera, ale tem mniejszej, im staranniej przyrząd jest wykonany. Przyczyną tego jest niezupełna szczelność kurków, zastawek i t. p., tudzież to, iż przy najniższem położeniu tłoka nie wszystek gaz zostaje wyparty z przestrzeni B; tłok nie dochodzi bowiem dokładnie do



Ryc. 145.

kurka, wskutek czego z pozostałej t. zw. »martwej pojemności« gaz nie może być nigdy wydalony (por. zad. 324).

Ryc. 145 wyobraża najważniejsze szczegóły pompy pneumatycznej, w postaci używanej w pracowniach. Do łączenia zbiornika A z walcem B służy (zamiast kurka) zatyczka stożkowa K, osadzona na dolnym końcu pręta, przechodzącego szczelnie przez osobny otwór w tłoku, a przystająca dokładnie do stożkowego ujścia przewodu, prowadzącego z A do B. Podczas ruchu tłoka zatyczka podnosi się i zniża, wskutek tarcia pręta o tłok, a tym sposobem naprzemian otwiera i zamyka przewód we właściwych porach. Zastawka D, umieszczona jest w małej komorze, we wnętrzu tłoka. Celem ułatwienia różnych doświadczeń w przestrzeni zawierającej powietrze rozrzedzone, przewód AB ma ujście swoje w płaskim i równym talerzu, przykrytym dzwonem szklanym; brzeg dzwonu, płasko szlifowany, uszczelnia się na talerzu za pomocą tłuszczu. E jest zatyczka o małym przekroju, służąca do wpuszczania powietrza z powrotem pod dzwon. Za pomocą pomp urządzonych w opisany tu sposób można z łatwością rozrzedzić powietrze o tyle, że reszta pozostająca w zbiorniku nie przewyższa $^1/_{500}$ lub $^1/_{1000}$ pierwotnej ilości. Jeżeli chodzi o wyższe stopnie rozrzedzenia, używa się pomp pneumatycznych rtęciowych, n. p. pompy Spregla, urządzonej na podobieństwo aspiratora ryc. 140. Rozrzedzenie możliwe przy użyciu tych pomp przenosi $^1/_{1000000}$. [Znakomite polepszenie działania pomp tłokowych uzyskano w t. zw. pompach olejnych, przez zalanie tłoka olejem, który wciskając się w pojemności martwe czyni ich wpływ nieszkodliwym. W szczegóły urządzenia tych pomp, jakoteż znakomitych pomp wirujących Gaedego, działających przez wyczerpywanie powietrza wirującymi czerpakami, jako należące do fizyki praktycznej, nie możemy tu wchodzić. O najnowszej t. zw. molekularnej pompie Gaedego będzie mowa w t. II w rozdziale o fizyce molekularnej].

Na wzmiankę zasługują także pompy służące do zgęszczania gazów. Ryc. 144 może również posłużyć do objaśnienia zasady tych przyrządów, jeżeli wyobrazimy sobie, że zastawka nie otwiera się na zewnątrz, lecz do wnętrza przestrzeni B. Gdy wyciągamy tłok do góry, natenczas zastawka czerpie powietrze zewnętrzne; kurek K jest wtenczas zamknięty. Gdy tłok powraca, wtenczas powietrze, poprzednio zaczerpnięte, zostaje wtłoczone przez otwarty wówczas kurek do zbiornika.

Zadania.

324) Obliczyć granicę, do której można rozrzedzić powietrze, za pomocą pompy pneumatycznej, uwzględniając wpływ pojemności martwej. *Odp.* $V =$ pojemność zbiornika; $v =$ pojemność walca, przy najwyższem, u przy najniższem położeniu tłoka. Masa gazu w zbiorniku pierwotnie $= m$; masa gazu w pojemności martwej $(u) = \mu$. Ilekroć tłok wraca do najniższego położenia, w pojemności martwej zostaje zawsze masa μ. Oznaczywszy przez k stosunek $\frac{V}{V+v}$, znajdziemy w zbiorniku, po 1, 2, 3,... ruchach tłoka, masy: $m_1 = k(m + \mu)$, $m_2 = k(m_1 + \mu)$, $m_3 = k(m_2 + \mu)$ i t. d. Rugując po kolei, znajdziemy po n tym ruchu: $m_n = mk^n + \mu k(1 + k + k^2 + \ldots + k^{n-1})$. Zważywszy, że suma szeregu w nawiasie wynosi: $\frac{1-k^n}{1-k}$, znajdziemy: $m_n = mk^n + \mu \frac{V}{v}(1 - k^n)$, zatem: $m_\infty = \mu \frac{V}{v}$. Jeżeli gęstości w pojemnościach u i V były pierwotnie jednakowe, to: $\frac{\mu}{m} = \frac{u}{V}$, zatem $m_\infty = m\frac{u}{v}$.

174. Ważenie gazów. Za pomocą wagi można okazać, że gazy, podobnie jak wszelkie inne rodzaje materyi, podlegają działaniu ciężkości. Do ważenia gazów używa się bań szklanych o pojemności kilku litrów (ryc. 146), dających się szczelnie zamykać za pomocą kurka umieszczonego w szyi. Naprzód waży się banię próżną, t. j. po dokładnem, ile możności, wypompowaniu powietrza;

wprowadziwszy następnie gaz jakikolwiek, waży się ją powtórnie. Przy drugiem ważeniu znajdziemy ciężar większy. Ciężarki równoważące banię na wadze, przy pierwszem i drugiem ważeniu, nie dają wprawdzie prawdziwych jej ciężarów, gdyż na zewnętrzną powierzchnię bani działa ciśnienie powietrza atmosferycznego, które, według prawa Archimedesa, zmienia pozornie jej ciężar. Gdy jednak ciśnienia te są też same podczas obu ważeń, przeto rożnica ciężarów znalezionych daje istotnie szukany ciężar gazu. Jeżeli chodzi o wielką dokładność ważenia, wtenczas należy uwzględnić ciężar resztki powietrza zostawionego w bani po jej wypróżnieniu, tudzież to, że ciężar ciężarków używanych do ważenia jest pozornie cokolwiek inny, aniżeli był w prożni.

Ryc. 146.

175. Gęstość gazów. Ważenie opisane poprzednio daje masę gazu zawartą w bani; podzieliwszy tę masę przez pojemność bani, znajdziemy gęstość gazu. Pomnąc atoli na znaczną ściśliwość gazów, zrozumiemy, że do bani można wtłoczyć większą lub mniejszą masę gazu, zależnie od ciśnienia użytego. Gęstość gazu jest przeto wielkością zmienną w nader obszernych granicach. Zwyczajnie określa się tę gęstość, którą gazy posiadają zostając pod ciśnieniem równem ciśnieniu powietrza atmosferycznego, albo ściślej mówiąc, pod ciśnieniem jednej atmosfery (76 *cm* rtęci $= 1013200$ dyn/cm^2). Nadto należy zważać na temperaturę gazu. Dowiemy się bowiem, że gazy rozszerzają się przy ogrzaniu, wskutek czego gęstość ich maleje. *Gęstość jaką posiada gaz zostający pod ciśnieniem jednej atmosfery i oziębiony do temperatury topniejącego lodu* (0^0) *nazywa się jego gęstością normalną.*

Mając znaleźć gęstość gazu w określonym tu stanie normalnym wstawia się banię (ryc. 145), po wypompowaniu z niej powietrza, do topniejącego lodu, potłuczonego na małe kawałki, a połączywszy ją ze zbiornikiem zawierającym gaz, zamyka się kurek dopiero wtenczas, gdy gaz wprowadzony do bani oziębi się do temperatury lodu, a manometr wskaże ciśnienie jednej atmosfery. Gęstości kilku gazów, wyznaczone w ten sposób podaje następująca tablica:

	Gęstości normalne gazów ($p = 76$ *cm rt*, $t = 0^0$)	Gęstości względne	
		względem powietrza	względem wodoru
Wodór	0·000089873 gr/cm^3	0·06949	1·000
Azot	0·0012507 »	0·9671	13·92
Powietrze (suche) .	0·00129327 »	1·0000	14·39
Tlen	0·00142940 »	1·1052	15·91
Dwutlenek węgla .	0·001965 »	1·5194	21·86
Gaz oświetlający .	—	0·5—0·7	7—10

Gęstości względne oblicza się, dzieląc gęstość pewnego gazu przez gęstość bądź to powietrza, bądź wodoru. Użycie wodoru do porównania gęstości różnych gazów jest stosowniejsze, albowiem powietrze jest mieszaniną gazów, o składzie niezupełnie stałym. Z tablicy powyższej wynika, że *powietrze suche t. j. wolne od pary wodnej, w stanie normalnym, jest 773·2 razy rzadsze od wody.* Zwyczajne powietrze atmosferyczne zawiera nieco pary wodnej, posiada zwykle temperaturę wyższą niż 0^0, a ciśnienie jego nie dosięga pospolicie jednej atmosfery. Gęstość jego bywa z tych powodów mniejsza od normalnej; średnio biorąc jest ono około 850 razy rzadsze aniżeli woda, t. j. metr sześcienny powietrza atmosferycznego waży około $\frac{1000}{850} = 1{\cdot}2$ kilogr.

Zadania.

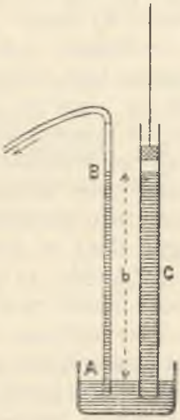
325) Przyjąwszy, że powietrze suche składa się tylko z tlenu i azotu, obliczyć ile jednostek objętości tych gazów, wziętych w stanie normalnym, należałoby zmieszać, aby uzyskać 100 jednostek objętości mieszaniny, takiego składu jak powietrze.

Odp. Tlenu: $v_1 = 100 \times \frac{1293{\cdot}27 - 1250{\cdot}7}{1429{\cdot}41 - 1250{\cdot}7} = 22$; azotu 78.

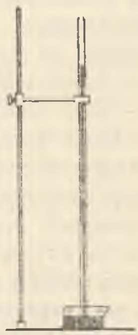
176. Ciśnienie atmosfery. Ziemia jest ze wszech stron otoczona powietrzem, stanowiącem t. zw. atmosferę (gr. atmos = para, sfaira = kula). Jest to warstwa gazu, nie wielkiej stosunkowo grubości, przylegająca do powierzchni ziemi (mimo właściwej gazom rozprężliwości), dzięki przyciąganiu, które ziemia na nią wywiera, a więc wskutek własnego ciężaru powietrza. Grubość tej warstwy, czyli wysokość atmosfery, jest wprawdzie mała w porównaniu z promieniem ziemi, sięga ona jednak tak wysoko, że i na szczytach gór najwyższych znajdujemy powietrze, aczkolwiek znacznie rozrzedzone. Atmosferę można więc porównać z oceanem gazowym, mającym za dno powierzchnię ziemi. Wskutek ciężaru swego powietrze wywiera ciśnienie na powierzchnię ziemi; podobnież uciskaną jest każda warstwa atmosfery przez ciężar warstw nad nią leżących. Następstwem tego jest, że w powietrzu istnieje wszędzie ciśnienie wewnętrzne i że ciśnienie to jest największe w warstwach najniższych, t. j. przy samej ziemi. Podobnie n. p. w morzu istnieją ciśnienia wewnętrzne, największe w pobliżu dna. Ciśnienie powietrza działa również na powierzchnię wszystkich ciał otoczonych powietrzem. Pospolicie nie dostrzegamy tego ciśnienia, gdyż na przedmioty małe działa ono równomiernie we wszystkich kierunkach. Skoro jednak jakimkolwiek sposobem oddalimy powietrze od pewnej części powierzchni ciała, wtenczas równomierność działania ustaje, a skutki ciśnienia powietrza stają się odrazu widoczne. Skutki te bywają nieraz potężne, gdyż pionowy słup powietrza, o podstawie 1 m^2, sięgający do granicy atmosfery, waży, jak obaczymy, około 10000 kilogramów.

Celem uwidocznienia i objaśnienia ciśnienia atmosfery, przytoczymy następujące doświadczenia: 1) Z bani szklanej, używanej do ważenia gazów (ryc. 146), wydalamy powietrze za pomocą pompy i zamykamy kurek. Jeżeli następnie, odjąwszy banię od pompy, otworzymy kurek, powietrze otaczające wpada bystrym prądem do wnętrza; przytem jest rzeczą obojętną, czy szyja będzie zwrócona do góry, czy na dół, lub na bok. Po upływie pewnego czasu prąd ten ustaje; ciśnienie atmosfery wtłacza do bani tyle powietrza, że ciśnienie wewnętrzne w bani wyrównywa się z ciśnieniem zewnętrznem. Gdy po całkowitem napełnieniu bani zamkniemy kurek, powietrze uwięzione będzie miało nadal takie ciśnienie, jakie panowało w otoczeniu w chwili zamknięcia kurka (byle temperatura bani nie podlegała zmianom). To doświadczenie objaśnia obecność i przyczynę ciśnienia powietrza w pokojach, w naczyniach i t. p. wogóle w przestrzeniach, na które atmosfera ziemi nie ciśnie bezpośrednio ciężarem swym z góry na dół. 2) Jeżeli kurek bani wypróżnionej otworzymy pod wodą, wtenczas woda wciśnie się do wnętrza, znowu skutkiem ciśnienia powietrza działającego na powierzchnię wody. 3) Dzwon pompy pneumatycznej (ryc. 145) daje się z łatwością zdejmować z talerza, dopóki jest napełniony powietrzem; po wypompowaniu powietrza potrzeba bardzo znacznej siły do oderwania go od talerza. W chwili oderwania dzwonu powietrze wpada do wnętrza tak nagle, że sprawia huk podobny do wystrzału. Można się łatwo przekonać, że do oderwania dzwonu od talerza potrzeba siły tem większej, im większe jest pole poprzecznego przekroju dzwonu. Na każdy centymetr kwadratowy przekroju przypada przeszło 1 *Kgr.* (To samo doświadczenie, w innej postaci, wykonywa się za pomocą t. zw. półkul magdeburskich). Gdyby dzwon pompy nie był dość wytrzymały, to wskutek wypompowania powietrza z wnętrza, zostałby z zewnątrz zgnieciony. Można to sprawdzić doświadczeniem, umieściwszy na talerzu pompy pneumatycznej, zamiast dzwonu, walec szklany, zawiązany pęcherzem; po wympompowaniu powietrza pęcherz zostaje rozdarty ciśnieniem atmosfery. 4) Przedmioty umieszczone w powietrzu są do pewnego stopnia ściśnięte; umieszczone w próżni rozszerzają się. Balon kauczukowy, zawierający nieco powietrza, wzdyma się pod dzwonem pompy, skoro rozrzedzimy otaczające go powietrze. Ciała stałe i ciecze rozszerzają się również, ale tylko do pewnej stałej granicy; gazy — wskutek rozprężliwości — nieograniczenie. 5) Jeżeli jeden koniec rurki, otwartej z obu końców, zanurzymy w wodzie, a z drugiego wyciągniemy powietrze, bądź to przez ssanie ustami, bądź też za pomocą pompy pneumatycznej, wtenczas woda podniesie się i napełni rurkę. Ciśnienie powietrza na powierzchnię wody w naczyniu przewyższa ciśnienie działające na powierzchnię wody w rurce, zmniejszone wskutek wyssania powietrza — stąd ruch wody. Tak samo tłumaczy się wessanie wody do sikawki, które uskutecznia się w ten sposób, że otwarty koniec sikawki zanurzamy w wodzie, a z walca wyciągamy tłok; w ślad za tłokiem postępuje woda parta ciśnieniem powietrza. Zjawisko to bywa stosowane w pompach ssących, używanych do podnoszenia wody ze studzien. Warto tu zwrócić uwagę na rożnicę pomiędzy pompami służącemi do podnoszenia wody, a pompami pneumatycznemi. Woda w pompie podnosi się pod wpływem zewnętrznej siły, mianowicie pod wpływem ciśnienia atmosfery; powietrze natomiast, rozrzedzane za pomocą pompy pneumatycznej, uchodzi ze zbiorników jedynie wskutek własnej rozprężliwości.

177. Doświadczenia Toricellego i Pascala. Zjawiska ssania, opisane przy końcu poprzedzającego ustępu, wiodą bezpośrednio do sławnych doświadczeń Toricellego (1643) i Pascala (1648), któremi uczeni ci stwierdzili po raz pierwszy i utrwalili teoryę ciśnienia atmosferycznego. Wyobraźmy sobie rurę *AB* (ryc. 147), jakiejkolwiek postaci, zanurzoną dolnym końcem w cieczy, n. p. w rtęci. Górny koniec rury połączony jest z pompą pneumatyczną, za pośrednictwem rurki kauczukowej, albo metalowej. Skoro za pomocą pompy zaczniemy ssać powietrze z rury, ciecz podniesie się w rurze (ust. 176). Wiadomo, że wysokość słupka podniesionego, t. j. odstęp pionowy powierzchni cieczy w rurze, od powierzchni cieczy w naczyniu, jest miarą różnicy tych ciśnień — i to bez względu na kształt i objętość rury (ust. 160). W miarę rozrzedzenia powietrza w rurze, ciecz podnosi się coraz wyżej, wkrótce jednak zbliża się do pewnego kresu, powyżej którego nie zdołamy jej podnieść, nawet gdybyśmy powietrze całkowicie wypompowali. Największa wysokość, do której ciecz mogłaby być wessana w rurę, gdybyśmy wypompowali powietrze całkowicie z jej wnętrza, jest miarą manometryczną ciśnienia atmosfery, działającego na powierzchnię cieczy w naczyniu. W istocie, ciśnienie powietrza otaczającego posiada pewną określoną wartość; skoro więc wypompujemy powietrze, a wskutek tego usuniemy całkowicie ciśnienie,



Ryc. 147.



Ryc. 148.

działające na powierzchnię cieczy wewnątrz rury, wówczas ciecz podniesie się do największej wysokości jaką ciśnienie atmosfery zdolne jest zrównoważyć. Wysokość słupa cieczy podniesionego w rurze, mierząca różnicę ciśnień na wewnętrznej i zewnętrznej powierzchni cieczy, będzie w tym razie miarą całego ciśnienia atmosfery.

Wysokość słupa równoważącego ciśnienie powietrza zależy od ciężaru właściwego cieczy w manometrze. Jeżeli tą cieczą jest rtęć, znajdziemy wysokość około 76 *cm*; woda, mająca ciężar właściwy 13·6 razy mniejszy aniżeli rtęć, podniosłaby się do wysokości $76 \times 13{\cdot}6 = 1033$ *cm*, t. j. przeszło 10 *m*. Wiadomo istotnie, że za pomocą pomp ssących nie można podnieść wody wyżej, aniżeli na wysokość około 10 *m* nad poziom wody w studni (ryc. 147 *C*). Fakt ten znany był Toricellemu; on pierwszy wyjaśnił przyczynę tego zjawiska działaniem ciśnienia atmosfery. Na stwierdzenie swej teoryi Toricelli wykonał (1643 r.) następujące doświadczenie. Rurkę szklaną, o długości około 80 *cm*, zamkniętą u jednego końca (ryc. 148), obracamy zamkniętym końcem na dół i napełniamy ją po brzegi rtęcią; następnie zatykamy koniec otwarty palcem, przyciśniętym silnie do brzegu otworu, a odwróciwszy rurkę, zanurzamy koniec zatkany pod powierzchnię rtęci w stosownem naczyniu, poczem odejmujemy palec. Rtęć oddziela się wówczas od zamkniętego końca rurki i opada cokolwiek; wszelako słup rtęci o wysokości siedmdziesięciu kilku centymetrów pozostaje jakby zawieszony w rurce. We wnętrzu rury, nad powierzchnią rtęci, zostaje przestrzeń niemal zupełnie prożna (pominąwszy nader małą ilość pary rtęciowej); jest to t. zw. próżnia Toricellego. Doświadczenie to dowodzi, podobnie jak poprzednie, że ciśnienie atmosfery, działające na powierzchnię rtęci w naczyniu, zdoła zrównoważyć ciężar słupa rtęci, mającego wysokość około 76 *cm*.

Można się nadto przekonać, że mała ilość powietrza, wprowadzona do próżni Toricellego, sprawia zniżenie słupa rtęci; gdybyśmy otworzyli górny koniec rurki, słup ten opadłby zupełnie, gdyż rtęć doznawałaby zewnątrz i wewnątrz rurki jednakowego ciśnienia.

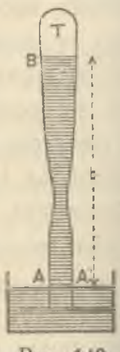
Teoryę ciśnienia atmosferycznego, podaną przez Toricellego potwierdził Pascal w sposób przekonywający następującem doświadczeniem. Zważywszy, że słup rtęci w rurze Toricellego równoważy ciężar atmosfery, cisnący na powierzchnię rtęci w naczyniu należało spodziewać się, że wykonawszy doświadczenie Toricellego w znacznej wysokości nad ziemią otrzyma się krótszy słup rtęci w rurze, a to z tej przyczyny, że warstwy powietrza znajdujące się poniżej przyrządu zostały wykluczone i nie przyczyniają się ciężarem swym do zrównoważenia ciężaru rtęci. Doświadczenie sprawdziło to przewidywanie w zupełności. W r. 1648 zmierzono jednocześnie wysokość słupa rtęci w przyrządzie Toricellego w dwu miejscach: w mieście Clermont we Francyi i na sąsiedniej górze Puy de Dôme, w wysokości przeszło 900 *m*. Na szczycie góry słup rtęci był istotnie około 7 *cm* krótszy, aniżeli w przyrządzie ustawionym na dole.

Ciśnienie powietrza zmniejsza się więc, gdy postępujemy w kierunku pionowym do góry; powietrze zachowuje się w tym względzie podobnie jak ciecze. Z powodu jednak mniejszej gęstości powietrza, ubytek ciśnienia w atmosferze jest mniej znaczny niż w cieczach. Tak n. p. w rtęci, w dwu poziomach różniących się co do wysokości o 1 *mm*, ciśnienie różni się o 1 *mm rt*; w wodzie ten sam ubytek ciśnienia przypada na wysokość 13·6 *mm*. Powietrze w pobliżu ziemi posiada gęstość około 850 razy mniejszą aniżeli woda; w powietrzu przeto potrzeba wznieść się na wysokość $13·6 \times 850 = 11560$ *mm*, t. j. około 11 metrów, aby ciśnienie zmiejszyło się o 1 *mm* rtęci; w tej wysokości słup rtęci w rurze Toricellego zniży się o 1 *mm*. Rachunek ten stosuje się jednak tylko do najniższych warstw powietrza, mających gęstość około $\frac{1}{850}$; wyższe warstwy, zostające pod ciśnieniem mniejszem, są rzadsze, a spadek rtęci o 1 *mm* przypada na odstępy coraz bardziej rosnące.

Swedenborg, nastepnie Mille, Geissler i inni zastosowali próżnię Toricellego, powstającą w rurce po ustąpieniu rtęci, do urządzenia pompy pneumatycznej rtęciowej, która rozrzedza powietrze o wiele dokładniej, aniżeli zwykłe pompy tłokowe.

Gdyby rurka użyta do doświadczenia Toricellego była krótsza, niż wysokość słupa cieczy, mierząca ciśnienie atmosfery, wówczas po odwróceniu jej, ciecz zawisłaby oczywiście w całej rurze i nie spadłaby wcale. Tak n. p. szklankę napełnioną wodą i przykrytą kartką papieru można odwrócić, a woda nie wyleje się. Wanny pneumatyczne (ryc. 153).

178. Pomiar ciśnienia atmosfery. Barometry. Przyrząd Toricellego bywa po dziś dzień używany, nie tylko do objaśnienia teoryi ciśnienia atmosferycznego, lecz także do dokładnego mierzenia jego wartości. Przyrząd ten jest istotnie manometrem przystosowanym do pomiaru ciśnienia atmosfery w centymetrach rtęci. Jak w manometrach wogóle (ust. 160), tak i w przyrządzie Toricellego (ryc. 149), wysokość słupa cieczy mierząca ciśnienie, nie zależy ani od postaci rurki, ani od objętości rtęci, która w rurce się mieści. Weźmy bowiem pod uwagę przyrząd Toricellego (ryc. 149), w którym T wyobraża próżnię Toricellego, B wyższą, A dolną powierzchnię rtęci i oznaczmy wysokość powierzchni B nad powierzchnią A przez b. Poprowadźmy w myśli, we wnętrzu rurki, płaszczyznę AA', w przedłużeniu powierzchni rtęci w naczyniu. Według praw równowagi cieczy



Ryc. 149.

zostających pod wpływem ciężkości, ciśnienie na płaszczyznę AA', skierowane z dołu do góry, jest równe ciśnieniu na zewnętrzną powierzchnię rtęci w naczyniu, równa się więc ciśnieniu atmosfery. Pomyślmy na chwilę, że przekrój AA' stanowi stałe dno rurki AB i oznaczmy pole jego przez S; natenczas całkowite parcie, które ciecz znajdująca się w rurce AB wywiera z góry na dół na przekrój AA' (ust. 161) równać się będzie iloczynowi: $bdgS$; siła ta nie zależy ani od kształtu rurki, ani od ilości rtęci (ust. 161); d oznacza tu gęstość rtęci, g natężenie ciężkości. Ciśnienie to jest zrównoważone ciśnieniem atmosfery, działającem na AA' z dołu do góry, za pośrednictwem rtęci w naczyniu. Jeżeli oznaczymy wartość ciśnienia atmosfery (na jednostkę powierzchni) przez p_0, natenczas całkowite parcie atmosfery na AA' będzie: $p_0 S$; zważywszy, że siła ta jest zrównoważona siłą $bdgS$, otrzymamy $p_0 S = bdgS$, a stąd:

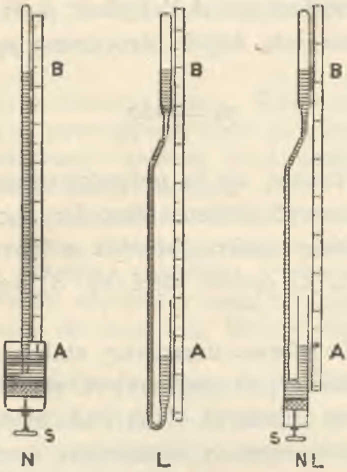
$$p_0 = bdg.$$

Równanie to okazuje, że za pośrednictwem przyrządu Toricellego możemy mierzyć ciśnienie atmosfery p_0; w tym celu należy zmierzyć: 1) *wzniesienie powierzchni rtęci w rurce nad powierzchnią rtęci w naczyniu* (b), 2) *gęstość rtęci* (d), 3) *natężenie ciężkości* (g) w miejscu pomiaru.

Przyrząd Toricellego urządzony stale do wykonywania pomiarów ciśnienia atmosferycznego, nazywa się barometrem (gr. baros = ciężki, metron = miara). Z najważniejszych form w jakich przyrząd ten bywa wykonywany wymienimy następujące: W barometrze naczyniowym Fortin'a (ryc. 150 N) rurka napełniona rtęcią zanurza się dolnym końcem w naczyniu, którego dno jest ruchome; śruba S służy do podnoszenia lub zniżania dna a temsamem i rtęci znajdującej się w naczyniu. Rurka jest stale przymocowana do wierzchniej (nie zupełnie szczelnej) pokrywy naczynia; podziałka, umieszczona stale obok rurki, służy do mierzenia wysokości b. Początek tej podziałki zaznaczony jest ostrzem stalowego albo kościanego kolca, przytwierdzonego do pokrywy i zwróconego na dół. Przed odczytaniem stanowiska rtęci w rurce należy ustawić powierzchnię rtęci w naczyniu w wysokości początkowej, czyli zerowej kreski podziałki; poznaje się to po tem, że powierzchnia rtęci dotyka się ostrza kolca. (Ostrze schodzi się wtedy ze swym obrazem odbitym w zwierciadle rtęci).

W barometrze lewarowym (ryc. 150, L) nie ma naczynia oddzielonego od rurki; dolny koniec rurki, zagięty do góry, zastępuje tu miejsce naczynia. Podziałka, umieszczona obok rurki, bywa bądź to stale złączona z rurką, bądź też jest nieruchoma. Położenie kreski zerowej jest dowolne; celem znalezienia wysokości barometrycznej *b* należy odczytać na podziałce stanowisko górnej i dolnej powierzchni rtęci.

Barometr naczyniowo-lewarowy (ryc. 150, NL), jest połączeniem obu form poprzedzających. Za pomocą śruby *S*, działającej na ruchome dno, jak w barometrze naczyniowym, podnosi się powierzchnię rtęci w dolnej rurce aż do kreski zerowej na podziałce,



Ryc. 150.

poczem stanowisko rtęci w rurce wyższej wskaże na podziałce wysokość barometryczną.

Jedyną cieczą przydatną do napełniania barometru jest rtęć; naprzód z powodu znacznej gęstości, wskutek czego barometr jest stosunkowo krótki. Nadto rtęć paruje mało, tak że przestrzeń nad rtęcią, w rurce barometrycznej, jest niemal zupełnie próżna. Przy wykonaniu barometru ogrzewa się rtęć wewnątrz rurki do wrzenia, aby wypędzić z rurki powietrze i wszelkie ślady wilgoci.

Wysokość barometru *b* nie jest bynajmniej stała. W tem samem miejscu zmienia się ona nieustannie, zależnie od stanu atmosfery, od ilości i gęstości powietrza znajdującego się nad okolicą;

w zimie bywa pospolicie większa, aniżeli w lecie. Wysokości barometru, mierzone jednocześnie, w różnych miejscach, są zwyczajnie różne; przyczyną tych różnic bywa, obok właściwości klimatycznych i meteorologicznych, różne wzniesienie nad poziomem morza.

W miejscach nie leżących na wydatniejszych wyżynach lub górach, wahania barometru zawarte są mniej więcej w granicach od 72 do 77 *cm*; to odpowiada zmianom ciśnienia atmosferycznego od $72 \times 13{\cdot}6 = 980$ Gr/cm^2, do $77 \times 13{\cdot}6 = 1050$ Gr/cm^2. W poziomie morza średni stan barometru wynosi blizko 76 *cm*. Z tego powodu określono ciśnienie jednej atmosfery jako równoważne 76 *cm rt.* (ust. 160); nie należy jednak zapominać, że rzeczywiste ciśnienie powietrza bywa rzadko dokładnie równe jednej atmosferze.

Ciśnienie powietrza określa się zwyczajnie sposobem manometrycznym, jako wysokość b równoważnego słupa rtęci w barometrze. Określenie to będzie jednak tylko wtenczas ścisłe, gdy obok stanu barometru b znaną jest gęstość rtęci d i natężenie ciężkości g. Na podstawie tych danych możemy wyrazić ciśnienie atmosfery w miarach bezwzględnych lub ciężarowych — w dynach, albo w gramach na centymetr kwadratowy — za pomocą wzoru $p_0 = bdg$. Gęstość rtęci d zmienia się z temperaturą; z tego powodu niezbędną składową częścią barometru jest termometr, wskazujący temperaturę rtęci. Podając tylko stan barometru, bez dalszych wskazówek, rozumiemy zwykle, że rtęć posiada temperaturę 0^0, a zatem gęstość 13·5956.

Poprawki. Na barometrze odczytujemy bezpośrednio wysokość b słupa rtęci i temperaturę t, która bywa najczęściej wspólną temperaturą rtęci, podziałki i całego przyrządu. Mając znaleźć, na podstawie tych danych, wysokość barometru b_0, któraby była dokładną i powszechnie rozumianą miarą ciśnienia atmosfery (zredukowany stan barometru) powinniśmy uwzględnić i obliczyć następujące poprawki.

1) Gęstość rtęci w jakiejkolwiek temperaturze t wynosi: $d = d_0 (1 - 0{\cdot}0001815\, t)$, w czem d_0 oznacza gęstość rtęci w temperaturze 0^0. Zwykle mierzymy stan barometru w temperaturze wyższej od 0^0, wskutek czego gęstość rtęci d bywa mniejsza od d_0. Odczytana wysokość barometru b jest więc większa od b_0. Dajmy nato, że barometr oziębiony do 0^0 wskazywałby tylko: $b - a$. Wtenczas mamy: $\frac{b-a}{b} = \frac{d}{d_0} = 1 - 0{\cdot}0001815\, t$. Stąd wynika pierwsza poprawka (ze względu na temperaturę rtęci): $a = 0{\cdot}0001815\, bt$. Tę poprawkę należy odejmować od zmierzonej wysokości barometru.

2) Podziałka barometru bywa zwykle mosiężna, podział jej jest rzetelny w temperaturze 0^0. W temperaturze t^0 odstęp dwu kresek sąsiednich nie wynosi 1 *cm*, lecz $(1+0{\cdot}0000201\ t)$ centymetrów — wskutek rozszerzania się mosiądzu. Mierzymy miarą za długą, przeto znajdujemy za małą liczbę centymetrów. Wysokość barometru, zmierzona rzetelną podziałką, wynosiłaby nie b, lecz dajmy na to $b+\beta$ centymetrów. Mamy więc: $b+\beta=b\,(1+0{\cdot}0000201\ t)$; a stąd $\beta=0{\cdot}0000201\ bt$.

Poprawkę tę należy dodawać do zmierzonej wysokości barometru. Obie poprawki, zależne od temperatury, zawarte są we wzorze: $\beta-\alpha=-0{\cdot}0001614\ bt$.

3) W rurkach nie dość szerokich powierzchnia rtęci tworzy wypukłą kopułę (menisk). Wysokość barometru mierzy się zawsze do szczytu tej kopuły. Wskutek działania sił włoskowatości kopuła ta wywiera małe ciśnienie na rtęć i zniża nieco wysokość barometru. Błąd ten, który oznaczymy przez γ, wyznacza się raz na zawsze, przez porównanie danego barometru z t. zw. barometrem normalnym, znajdującym się w każdej znaczniejszej stacyi meteorologicznej i w zakładach naukowych. Barometr normalny, dzięki znacznej szerokości rurki, wolny jest od tego błędu, posiada nadto bardzo dokładną podziałkę, wskutek czego poprawka γ obejmuje zarazem możebne błędy podziałki w barometrze porównywanym.

4) Surowy stan barometru b z dodaniem wymienionych wyżej poprawek, t. j. suma $b-\alpha+\beta+\gamma$, przedstawia prawdziwą wysokość słupa rtęci, mającego temperaturę 0^0, który równoważy w danem miejscu ciśnienie atmosfery. Pozostaje jeszcze uwzględnić wpływ położenia geograficznego, t. j. zależność stanu barometru od natężenia ciężkości. Gdyby to natężenie było mniejsze, natenczas jasną jest rzeczą, że ciśnienie powietrza tej samej wartości podniosłoby słup rtęci w barometrze wyżej; w przeciwnym razie podniosłoby go mniej wysoko. Można uniknąć określenia ciśnienia atmosfery przez dwie liczby b i g, redukując spostrzeżenia robione w różnych miejscach, do ciężkości normalnej, t. j. do ciężkości g_{45}, panującej na ziemi w poziomie morza, w szerokości geograficznej 45^0. Wysokość barometru b, w szerokości φ i w wysokości z metrów nad morzem, gdzie (ust. 124) jest:

$$g=g_{45}\,(1-0{\cdot}002648\cos 2\varphi-0{\cdot}0000002\ z),$$

równoważy takie ciśnienie, jak wysokość, dajmy na to $b+\delta$, w miejscu o ciężkości normalnej; δ oznacza tu poprawkę z powodu ciężkości Z proporcyi $\frac{b+\delta}{b}=\frac{g}{g_{45}}$ znajdziemy:

$$\delta=-b\,(0{\cdot}002648\cos 2\varphi+0{\cdot}0000002\ z).$$

Stan barometru b_0, zredukowany do temperatury normalnej 0^0 i do normalnej ciężkości oblicza się ostatecznie według wzoru:

$$b_0=b-\alpha+\beta+\gamma+\delta.$$

Zamiast barometrów rtęciowych używa się często t. zw. aneroidów; są to przyrządy wskazujące zmiany ciśnienia powietrza. Najbardziej rozpowszechnione są aneroidy Vidiego; główną ich częścią składową jest płaska puszka metalowa, szczelnie zamknięta, mająca dno podatne, z cienkiej sprężystej blachy. Przed zamknięciem rozrzedza się w niej powietrze. W miarę tego jak ciśnienie atmosfery rośnie lub maleje, dno puszki ugina się ku wnętrzu lub na zewnątrz. Małe ruchy tej blaszki, powiększone za pomocą dźwigni nierównoramiennych, zostają przeniesione pod postacią obrotów na oś, na której osadzona jest wskazówka. Podziałkę rysuje się na gotowym już przyrządzie, przez porównanie z barometrem rtęciowym.

Zadania.

326) Obliczyć wysokość barometru napełnionego wodą, gliceryną, eterem, gdy wysokość barometru rtęciowego wynosi 76 *cm* (gęstości: 1; 1·26; 0·724; 13·5956). *Odp.* 10·33 *m*; 8·2 *m*; 14·3 *m*.

327) Obliczyć ciśnienie atmosfery w Gr/cm^2, gdy wysokość barometru wynosi 72, 75, 78 *cm*. *Odp.* 978·86; 1019·65; 1060·43.

328) Obliczyć ciśnienie we wnętrzu rtęci, w rurce barometru, w głębokości x *cm* pod powierzchnią rtęci w rurce (temp. rtęci $= 0^0$). *Odp.* $x \,.\, 13{\cdot}5956$ Gr/cm^2.

329) Jaki skutek miałoby przebicie małego otworu w rurce dłuższej barometru lewarowego: a) powyżej, b) poniżej poziomu powierzchni rtęci w ramieniu krótszem.

Odp. a) powietrze wejdzie do wnętrza, b) rtęć wypłynie na zewnątrz.

330) Pionowa rura walcowa zanurzona jest dolnym końcem w wodzie (ryc. 145 C); tłok umieszczony w rurze znajduje się z początku przy dolnym jej końcu. Podnosimy tłok do wysokości 5 *m* nad wodę. Obliczyć siłę potrzebną do utrzymania tłoka w tej wysokości, wiedząc, że ciśnienie atmosfery wynosi 9·8 *m* wody, a przekrój tłoka 80 cm^2.

Odp. Ciśnienie na tłok z góry $= 9{\cdot}8$ *m* wody; z dołu $9{\cdot}8 - 5 = 4{\cdot}8$ *m*. Siła $= 80 \times 500$ *gr*.

331) Szklankę napełniamy wodą i zanurzamy ją następnie w naczyniu napełnionem wodą, otworem na dół. Obliczyć całkowite parcie, które woda wywiera na poziome dno szklanki, w kierunku pionowym do góry, wiedząc, że powierzchnia dna wynosi 12 cm^2, wysokość jego nad poziomem wody w naczyniu 8 *cm*, a ciśnienie atmosfery 10 *m* wody.

Odp. Ciśnienie $= 1000 - 8 = 992$ *cm* wody; parcie całkowite $= 12 \times 992$ *Gr*.

332) Jaka siła jest potrzebna do utrzymania tej szklanki w powyższem położeniu.

Odp. Siła $=$ ciężar szklanki $+ 1000 \times 12 - 922 \times 12 =$ ciężar szklanki $+$ ciężar wody podniesionej.

333) Jakiej siły należałoby użyć, celem utrzymania szklanki, gdyby

wysokość jej była większa niż 10 *m*. *Odp.* Tak samo, siła = ciężar szklanki + ciężar wody podniesionej.

334) Rurkę Toricellego, napełnioną rtęcią, zanurzamy końcem otwartym w naczyniu zawierającym rtęć i zawieszamy ją na sznurze. Obliczyć dokładnie napięcie sznura.

Odp. = ciężar rurki + ciężar rtęci podniesionej nad poziom w naczyniu — ciężar rtęci wypartej przez szkło zanurzonej części rurki — ciężar powietrza wypartego przez rurkę.

335) Wysokość słupka rtęci, odczytana bezpośrednio na barometrze, mającym mosiężną podziałkę, wynosiła 748·27 *mm*, w temperaturze przyrządu = 17·6°. Obliczyć stan barometru zredukowany do temperatury 0°. *Odp.* 746·15 *mm*.

336) Wysokość barometru, poprawiona względem temperatury, była ta sama na równiku, jak na biegunie. W którem z tych miejsc było większe ciśnienie atmosfery i w jakim stosunku? *Odp.* Na biegunie większe, w stosunku 983 : 978 (ust. 64).

337) W barometrze naczyniowym przekrój rurki wynosi α cm^2, powierzchnia rtęci w naczyniu β cm^2. O ile podnosi się rtęć w rurze, gdy ciśnienie powietrza zwiększa się o 1 *cm* rtęci? *Odp.* $\frac{\beta}{\alpha + \beta}$ *cm*.

179. Parcie na ciała zanurzone w gazach, zostających pod działaniem ciężkości. (Zastosowanie prawa Archimedesa). Dzięki doświadczeniu Pascala wiemy, że ciśnienie w powietrzu podobnie jak w cieczach, zmniejsza się ku górze. Każde ciało zanurzone w powietrzu doznaje przeto w niższych częściach swej powierzchni ciśnień większych, aniżeli w górnych. Następstwem tego jest parcie wypadkowe, działające na ciało w kierunku pionowym do góry. Uzasadnienie prawa Archimedesa podane w ust. 162 dla cieczy, może być dosłownie zastosowane do statyki gazów. Ciała otoczone powietrzem wydają się więc lżejszemi, aniżeli są w istocie. *Pozorna strata ciężaru, równa parciu powietrza otaczającego, równa się zatem ciężarowi powietrza wypartego przez ciało.*

Ciała, których ciężar rzeczywisty jest mniejszy, aniżeli ciężar powietrza wypartego przez nie, wznoszą się w powietrzu do góry, podobnie jak n. p. korek w wodzie.

Zastosowania. A. **Poprawka przy ważeniu.** Pozorne zmniejszenie ciężaru ciał, spowodowane przez ciśnienie powietrza, jest przyczyną, że ważąc ciała w powietrzu, nie otrzymujemy prawdziwego ich ciężaru, lecz większy albo mniejszy, zależnie od stosunku objętości ciała, do objętości ciężarków, użytych do ważenia. Ciało mające objętość V i ciężar rzeczywisty P nie działa na wagę pełnym swym ciężarem P, lecz ciężarem zmniejszonym: $P - V\delta$, w czem δ oznacza ciężar właściwy powietrza. Celem zrównoważenia ciała kładziemy na przeciwną szalkę wagi pewną ilość ciężarków, dajmy na to p *gr*. Prawdziwy ciężar ich wynosi więc p *gr*; lecz i ciężarki wydają się w powietrzu lżejszemi, działają na szalkę siłą $p - v\delta$, w czem v oznacza ich objętość. Zważywszy, że pozorne ciężary na obu szalkach równoważą się, mamy: $P - V\delta = p - v\delta$. Równanie to daje rzeczywisty ciężar ciała: $P = p + \delta(V - v)$. Ważenie w powietrzu daje więc tylko wtenczas ciężary prawdziwe, a więc i prawdziwe masy ciał, gdy objętość ciał i ciężarków są równe. Jeżeli zaś, co zwykle bywa, ciężarki mają mniejszą objętość (zrobione są z gęstszego materyału) niż ciała ważone, wtenczas ciężar znaleziony przez ważenie w powietrzu będzie za mały i powinien być powiększony o $\delta(V-v)$. Oznaczywszy ciężar właściwy ciała przez D, ciężarków przez d, mamy $V = \frac{P}{D}$, albo w przybliżeniu: $V = \frac{p}{D}$, tudzież $v = \frac{p}{d}$; poprawka wynosi zatem: $\frac{p}{850}\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{d}\right)$.

B. **Balony.** Są to worki, postaci kulistej lub wydłużonej, napełnione gazem lżejszym aniżeli powietrze atmosferyczne: wodorem, gazem oświetlającym, lub powietrzem ogrzanem. Jeżeli gaz zawarty w balonie, razem z powłoką, łódką, podróżnymi i t. p. waży mniej, aniżeli powietrze wyparte przez te ciała, wtenczas balon może wznieść się do góry. Siła unosząca go równa się różnicy wspomnianych ciężarów. [Twierdzenia powyższe stosują się tylko do balonów. Latawce (aeroplany) są cięższe od powietrza i unoszą się tylko dzięki skombinowanemu działaniu śmigi, płaszczyzn skrzydłowych i steru. Lot aeroplanów polega więc na zastosowaniu praw ruchu gazów, podczas gdy balony są zastosowaniem technicznem zasady Archimedesa].

Gazy lżejsze od powietrza unoszą się do góry także wtenczas, gdy nie mają powłoki, n. p. dym, a raczej ciepłe powietrze wychodzące z komina. Wodór można przelewać do góry. Manometr ciężarowy (dasymetr) jest to przyrząd służący do demonstracyi prawa Archimedesa dla gazów, pod dzwonem pompy pneumatycznej.

Zadania.

338) Kawałek drzewa waży w powietrzu tyleż, jak kawałek żelaza. Który ma większą masę? *Odp.* Drzewo.

339) W powietrzu o gęstości $1/_{830}$ odważamy za pomocą ciężarków mosiężnych (gęst. 8·4) 100 *gr* wody. Obliczyć prawdziwy ciężar wody. *Odp.* Objętość wody z dostatecznem przybliżeniem = 100 cm^3; ciężar szukany = 100·106 *gr*.

340) Ile wynosi parcie powietrza, o gęstości normalnej, na ciało mające objętości 1 m^3? *Odp.* 1293 *gr*.

341) Kulisty balon, o średnicy 5 *m*, napełniony jest wodorem. Gęstość powietrza wynosi 0·0012, gęstość wodoru 14 razy mniej; 1 m^2

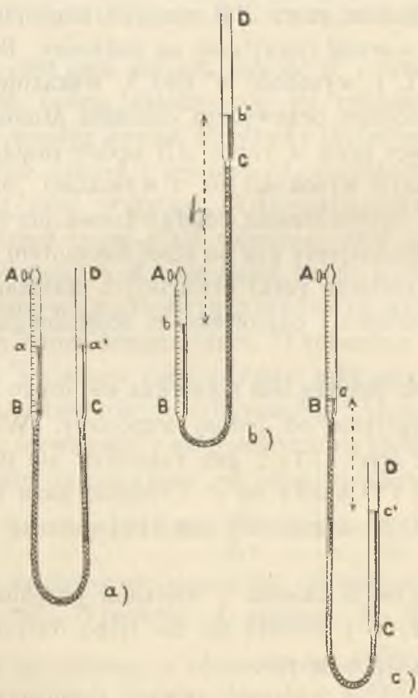
tkaniny balonu waży 200 *gr*. Obliczyć siłę, jaką balon ten ciągnie do góry linę, do której jest uwiązany.

Odp. Objętość = 65·4 m^3; powierzchnia = 78·5 m^2; ciężar balonu = 21·3 *Kg*; parcie powietrza 78·5; siła = 57·2 *Kg*.

342) Oznaczywszy przez δ i δ' ciężary właściwe powietrza i gazu użytego do napełniania balonu, przez σ ciężar jednostki powierzchni tkaniny, obliczyć średnicę d balonu kulistego, któryby obok własnego ciężaru, uniósł jeszcze przedmioty ważące w powietrzu Q, a nadto rozwinął siłę niezrównoważoną, unoszącą go = P. *Odp.* Rozwiązać równanie: $P + Q = \frac{1}{6}\pi d^3(\delta - \delta') - d^2\pi\sigma$.

343) Na wylot pionowego komina, o przekroju s, wysokości z, kładziemy przykrywę; oznaczywszy przez δ i δ' ciężary właściwe powietrza otaczającego i powietrza ciepłego w kominie, obliczyć siłę, którą powietrze ogrzane usiłuje podnieść przykrywę. *Odp.* $zs(\delta - \delta')$.

180. Ściśliwość gazów. (Prawo Boyle'go). Wspominaliśmy kilkakrotnie, że objętość pewnej masy powietrza, lub innego gazu, zmienia się bardzo znacznie, gdy zwiększamy albo zmniejszamy ciśnienie zewnętrzne, pod którem gaz pozostaje. Wyobraźmy sobie n. p., że gaz jest zamknięty w naczyniu walcowatem, za pomocą tłoka ruchomego, obciążonego pewnym ciężarem (ryc. 143). Jeżeli na tłoku umieścimy ciężar, dajmy na to, dwa razy większy, wtenczas objętość gazu zmniejszy się znacznie; zachodzi jednak pytanie, w jakim stosunku objętość się zmniejszy? O ile powiększyłaby się, gdybyśmy ciężar zmniejszyli? Czy dla różnych gazów stosunki te będą różne czy jednakowe? Na pytanie te odpowiada prawo odkryte w r. 1662 przez Boyle'go, za pośrednictwem doświadczeń przedsięwziętych w celu zbadania sprężystości powietrza. Prawo to, znane także pod nazwą prawa Mariotte'a, opiewa tak: *Jeżeli pewną określoną masę gazu poddawać będziemy po kolei rozmaitym ciśnieniom zewnętrznym, zważając jednak, żeby temperatura gazu była zawsze jednakowa, wtenczas objętości gazu, odpowiadające tym ciśnieniom, będą odwrotnie proporcyonalne do wartości ciśnień*; albo krócej: objętość pewnej masy gazu zmniejsza się tyle razy, ile razy ciśnienie się powiększa. Warunek iżby temperatura nie zmieniała się, powinien być ściśle zachowany, albowiem objętość gazu zmienia się i przy stałem ciśnieniu, jeżeli gaz oziębiamy lub ogrzewamy. Jeżeli gaz jest zamknięty w naczyniu za pomocą tłoka obciążonego (ryc. 143), albo za pomocą słupa cieczy (ryc. 151), wtenczas — jak to się rozumie samo przez się — do ciśnienia działającego na gaz liczy się nietylko ciężar spoczywający na tłoku, albo ciężar cieczy, ale także ciśnienie otaczającej atmosfery. Gdybyśmy usunęli zupełnie ciężary cisnące na tłok (ryc. 143), którego ciężar własny można przypuśćmy zaniedbać, wtenczas pozostałoby tylko ciśnienie atmosfery $= p_0$; powiedzmy, że objętość gazu wynosi w tym razie v_0 Jeżeli zwiększymy ciśnienie za pomocą ciężarów po kolei do 2, 3 4... i t. d. atmosfer, natenczas według prawa Boyle'go gaz przyjmie objętości: $\frac{v_0}{2}, \frac{v_0}{3}, \frac{v_0}{4} \ldots$ i t. p. Możemy zatem prawo ściśliwości gazów wypowiedzieć także w następujący sposób: *Iloczyn ciśnienia przez objętość pewnej masy gazu jest stały*, jakkolwiek zmieniać będziemy ciśnienie działające na gaz. Oznaczywszy tedy przez v objętość, jaką gaz zajmuje pod ciśnieniem p, wyrazimy prawo Boyle'go równaniem:



Ryc. 151.

(1) $$pv = p_0 v_0.$$

Do objaśnienia i sprawdzenia tego prawa nadaje się dobrze przyrząd wyobrażony na ryc. 151; jest to rodzaj manometru zamkniętego z jednej strony. W przyrządzie tym ściska się gaz ciężarem słupa rtęci; wysokość tego słupa wskazuje zarazem ciśnienie wywierane na gaz, równoważące jego prężność. Na pionowej rurce szklanej *AB* znajduje się podziałka, wyznaczająca równe objętości a zaczynająca się od kurka, umieszczonego na górnym końcu. Dolny koniec rurki połączony jest wężem gumowym z drugą rurką pionową *CD*, otwartą u góry. W wężu i po części w obu rurkach znajduje się rtęć. Dopóki kurek *A* jest otwarty, powierzchnie rtęci *a* i *a'* znajdują się w tym samym poziomie (ryc. 151 a). Skoro jednak zamkniemy kurek, a podniesiemy rurkę *CD* do góry (ryc. 151 b), powietrze uwięzione w rurce *AB* zostanie ścieśnione n. p. do objętości *Ab*, której wartość odczytamy na podziałce. Różnica wysokości poziomów rtęci, t. j. wysokość *b'* nad *b*, wskazuje, o ile prężność powietrza zgęszczonego przewyższa ciśnienie atmosfery. Miarą rzeczywistej prężności gazu w rurce *AB* będzie przeto wysokość słupa rtęci, równa s u m i e wysokości *bb'* i wysokości jaką wskazuje barometr w chwili doświadczenia. Sprawdzenie prawa B o y l e'go polega na tem, że poddajemy gaz po kolei rozmaitym ciśnieniom (przez podnoszenie lub zniżanie rurki otwartej) i przekonywamy się o ile iloczyny z tych ciśnień i odpowiednich objętości gazu mają wartości jednakowe.

Tym samym przyrządem sprawdza się prawo B o y l e'g o także dla ciśnień mniejszych od jednej atmosfery. W tym celu należy rurkę *CD* zniżyć (ryc. 151 c); gaz rozszerza się n. p. do objętości *Ac*, rtęć w rurce *CD* spada do *c'*. Ciśnienie gazu równa się w tym przypadku wysokości barometru z m n i e j s z o n e j o odległość poziomów *c* i *c'*.

Prawo B o y l e'g o określa z wielkiem przybliżeniem ściśliwość wszystkich gazów, t. j. stosuje się nie tylko do powietrza, ale i do tlenu, wodoru, azotu i innych.

Gdy zmniejszymy objętość pewnej ilości gazu, dajmy na to, do połowy, wtenczas gaz stanie się dwa razy gęstszy, aniżeli był pierwotnie. Gęstość jest odwrotnie proporcyonalna do objętości, jaką gaz zajmuje; prawo B o y l e'g o można zatem wypowiedzieć także jak następuje: *gęstość gazu mającego stałą temperaturę jest proporcyonalna do ciśnienia jakie nań wywieramy*, albo co na jedno wychodzi: ciśnienie jakie gaz wywiera na ciała otaczające (prężność gazu), jest proporcyonalne do jego gęstości. Jeżeli więc gaz pewien, pod ciśnieniem jednej atmosfery (ciśnienie to oznaczamy przez p_0), posiada gęstość d_0, pod innem zaś ciśnieniem p, gęstość d, wtenczas prawo Boyle'go będzie także wyrażone przez proporcyę: $d : d_0 = p : p_0$, albo przez równanie:

$$\frac{p}{d} = \frac{p_0}{d_0}. \tag{2}$$

Równaniu temu damy inną jeszcze postać. Wyobraźmy sobie warstwę, albo słup płynu jednolitego, mającego gęstość jednostajną d i obliczmy wysokość A jaką powinienby mieć ten słup, aby wywierał na podstawę, własnym ciężarem, pewne ciśnienie p. Według praw hidrostatyki (ust. 157) wysokość ta będzie: $A \frac{p}{d \cdot g}$. Jeżeli płynem uważanym jest gaz, mający gęstość d i prężność p, wtenczas wysokość ta nie będzie zależna ani od ciśnienia ani od gęstości gazu, albowiem według prawa Boyle'go (2) stosunek $p : d$ jest ten sam dla wszelkich ciśnień i gęstości. A przedstawia tedy wysokość, jakąby powinna mieć warstwa jednolita uważanego gazu, aby wywierała ciężarem swym takie ciśnienie, jakie gaz wywiera wskutek prężności. Wysokość A nazywamy wysokością atmosfery jednolitej, albo wysokością ciśnienia atmosfery w danym gazie, w danej temperaturze. Wyobraźmy sobie bowiem, że atmosfera ziemi posiada w całej grubości taką gęstość d_0, jak w warstwie najniższej, gdzie panuje ciśnienie p_0. Atmosfera taka, o gęstości jednolitej, wywierałaby na powierzchnię ziemi, ciężarem swym, ciśnienie p_0, jakie rzeczywiście na ziemi panuje, pod warunkiem, żeby wysokość jej wynosiła $A = \frac{p_0}{d_0 g}$, albo $= \frac{p}{dg}$. Wysokość atmosfery jednolitej byłaby więc niezależna od wartości ciśnienia p_0 panującego na ziemi. Wysokość A posiada dla każdego gazu inną wartość; można ją obliczyć z równania $A = \frac{p_0}{d_0 g}$, gdzie p_0 oznacza ciśnienie jednej atmosfery, d_0 gęstość jaką gaz posiada w danej temperaturze pod ciśnieniem atmosfery. Wprowadziwszy do (2) zamiast $\frac{p_0}{d_0}$ wartość Ag, otrzymamy:

$$\frac{p}{d} = Ag. \tag{3}$$

Podzieliwszy przez g i oznaczywszy przez $\delta = gd$ ciężar właściwy gazu, otrzymamy równanie wyrażające prawo Boyle'go w następującej postaci:

$$\frac{p}{\delta} = A. \tag{4}$$

t. j. stosunek ciśnienia, albo prężności gazu, do ciężaru właściwego, jaki gaz posiada pod tem ciśnieniem, równa się wysokości atmosfery jednolitej tegoż gazu.

W nauce o cieple dowiemy się, że gęstość każdego gazu zmniejsza się, wskutek rozszerzania się, gdy przy niezmiennem ciśnieniu temperatura wzrasta. Następstwem tego jest, że wysokość atmosfery jednolitej wzrasta razem z temperaturą gazu. Przy ogrzaniu o 1^0 wysokość ta powiększa się w przybliżeniu o $^1/_{273}$ część wysokości należącej do temperatury 0^0. Jeżeli ostatnią wysokość oznaczymy przez A_0, natenczas wysokość odpowiadająca temperaturze t stopni będzie:

$$A = A_0 + t \cdot \frac{A_0}{273}.$$

Ciśnienie, ciężar właściwy i temperatura gazu są więc związane równaniem:

$$\frac{p}{\delta} = A_0\left(1 + \frac{t}{273}\right). \tag{5}$$

Wysokość atmosfery jednolitej w pewnym gazie, w temperaturze 0^0, możemy obliczyć z gęstości normalnej podanej w ust. 175. Tak n. p. gęstość normalna powietrza suchego (pod ciśnieniem $p_0 = 1$ *atm.* i temp. 0^0) wynosi: 0·001 293 271 gr/cm^3. Zważywszy, że ciśnienie 1 *atm.* odpowiada słupowi rtęci 0^0, o wysokości 76 *cm*, pod działaniem ciężkości normalnej g_{45} (ust. 160) mamy $p_0 = 76 \times 13{\cdot}5956 \times g_{45}$, przeto:

$$A_0 = \frac{p_0}{d_0 g} = \frac{76 \times 13{\cdot}5956 \times g_{45}}{0{\cdot}00129327 \times g}$$

$$= 1033{\cdot}26 \times 773{\cdot}23\,\frac{g_{45}}{g} = 798960\,\frac{g_{45}}{g}\ cm.$$

W podobny sposób obliczono następującą tablicę:

Wysokość atmosfery jednolitej (A_0) w temperaturze 0°

pod ciężkością normalną (w metrach).

Wodór	114970	Dwutlenek węgla . .	5258·3
Azot	8261·5	Powietrze suche . .	7989·6
Tlen	7228·7		

Zboczenia od prawa Boylego. Dokładne pomiary ściśliwości różnych gazów, wykonane w nowszych czasach (Despretz, Regnault, Amagat, Witkowski) okazały, że prawo Boylego wyraża rzeczywiście zachowanie się gazów sposobem tylko przybliżonym, aczkolwiek przybliżenie to, jeżeli ciśnienia są niewielkie, jest nader blizkie prawdy. Natomiast ściśliwość gazów pod ciśnieniami dużemi różni się zazwyczaj znacznie od tej, którą wskazuje prawo Boylego. Można było spodziewać się tego. Wszakże pod ciśnieniem nieskończenie wielkiem objętość jakiejkolwiek masy gazu byłaby równą zeru, gdyby to prawo było nieograniczenie ważnem, co żadną miarą być nie może. Większe zboczenia od prawa Boylego, nawet dla miernych ciśnień, okazują zwłaszcza te gazy, które, bądź to w temperaturze zwyczajnej, bądź przy niewielkiem oziębieniu, dają się przez zgęszczenie skroplić (n. p. dwutlenek węgla).

Najbardziej wyczerpujące pomiary ściśliwości gazów wykonał w ostatnich czasach Amagat. Przyrząd jego był w ogólnym zarysie podobny do pierwotnego przyrządu Boylego, tudzież do przyrządu na ryc. 151. Ponieważ jednak chodziło tu o ciśnienia sięgające do kilkuset atmosfer, przeto ta część przyrządu, w której gazy były zgęszczane, była grubościenną rurką szklaną; inne części wykonane były z metalu. Do mierzenia ciśnień służył manometr rtęciowy, sporządzony z cienkiej, stalowej rurki, o wysokości kilkuset metrów. (Przyrząd ustawiony był na dnie głębokiej studni w kopalni Verpilleux; rurka manometru prowadzona była wzdłuż ścian do góry). Wyniki pomiarów Amagata dają się streścić w następujący sposób. Jeżeli pewna ilość gazu zajmuje objętość v_0, pod ciśnieniem jednej atmosfery ($=p_0$), natenczas pod ciśnieniem p atmosfer gaz przyjmuje, w tej samej temperaturze objętość określoną przez równanie:

$$pv = \eta \cdot p_0 v_0, \text{ a więc } v = \eta \frac{p_0 v_0}{p}.$$

Spółczynnik η nie jest równy jedności, jakby być powinno gdyby prawo Boylego było ściśle ważnem. Nie jest on nawet liczbą stałą, lecz wartość jego jest przy każdem ciśnieniu inna, zależna zresztą od rodzaju gazu. Dla powietrza azotu i wodoru, w temperaturze zwyczajnej (około 16°), wartości tego spółczynnika podaje następująca tablica. W temperaturach znacznie różnych od zwyczajnej wartości te są też inne; o wpływie temperatury na ściśliwość będzie mowa w nauce o cieple.

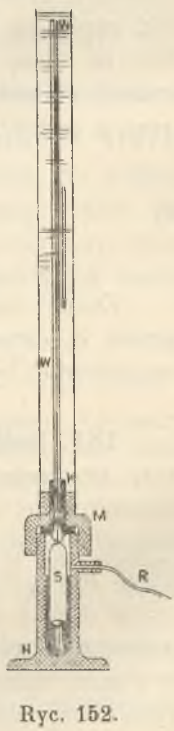
Tablica ściśliwości.

Ciśnienie (p) atmosfer	η dla powietrza	η dla azotu	η dla wodoru
1	1·0000	1·0000	1·000
10	0·9965	0·9974	1·005
20	0·9926	0·9947	1·011
30	0·9887	0·9925	1·017
40	0·9854	0·9907	1·023
50	0·9831	0·9897	1·030
60	0·9814	0·9895	1·036
70	0·9805	0·9899	1·043
80	0·9803	0·9909	1·050
90	0·9806	0·9925	1·059
100	0·9814	0·9946	1·068
150	0·9972	1·0176	—
200	1·0250	1·0496	1·134
400	1·1895	1·2400	1·269

Z tablicy tej czytamy, że gazy (z wyjątkiem wodoru) są w temperaturze zwyczajnej naprzód bardziej ściśliwe, aniżeliby to wynikało z prawa Boylego. Od pewnego ciśnienia poczynając (powietrze wyżej 150 atm.) stają się jednak coraz trudniej ściśliwymi.

Weźmy dla objaśnienia tych zboczeń, 1 m^3 (1000000 cm^3) powietrza pod ciśnieniem 1 atm. Pod ciśnieniem 60 atm. jest $\eta = 0{\cdot}9814$; ta ilość gazu zajmuje zatem objętość: $0{\cdot}9814 \times \frac{1000000}{60} = 16356 cm^3$ (według prawa Boylego wynosiłaby 16666 cm^3). Pod ciśnieniem 400 atm. znajdziemy jednak: $1{\cdot}1895 \times \frac{1000000}{400} = 2974$ (zamiast 2500). Wodór jest już od początku trudniej ściśliwy, aniżeliby to wynikało z prawa Boylego; jednakże w temperaturach bardzo nizkich i on zachowuje się podobnie, jak inne gazy.

Manometr gazowy. Prawa ściśliwości gazów znajdują ważne zastosowanie w przyrządach służących do dokładnego mierzenia wielkich ciśnień. Zwyczajne manometry rtęciowe miałyby w tym przypadku długość niepomiernie wielką. Owóż wartość pewnego ciśnienia możemy ocenić według objętości, jaką znana ilość gazu zajmuje pod ciśnieniem, jeżeli, rozumie się, prawo ściśliwości danego gazu (wartości spółczynnika η) jest skądinąd znane. Ryc. 152 wyobraża manometr gazowy, służący do pomiarów tego rodzaju. Gaz (zwykle azot) znajduje się w naczyniu szklanem S zakończonem u góry wązką, grubościenną rurką, podzieloną na milimetry sześcienne. Rurka jest u góry zamknięta; dolny, otwarty koniec naczynia S, zanurza się w rtęci, w mocnem metalowem naczyniu N. Naczynie to u góry jest szczelnie zatkane, za pomocą ołowianej płytki i silnej mutry. Jedyny dostęp do wnętrza naczynia N stanowi rurka R, przez którą działa ciśnienie mające się zmierzyć. Ciśnienie to wtłacza rtęć do naczynia S, a tem samem zgęszcza gaz. Zmierzywszy objętość v, zajmowaną przez gaz zgęszczony w rurce W, obliczamy ciśnienie według wzoru:



Ryc. 152.

$$p = \eta \cdot \frac{p_0 v_0}{v}.$$

v_0 oznacza tu objętość, jaką gaz zajmuje w tej samej temperaturze pod ciśnieniem 1 atm. $= p_0$.

Redukcya objętości gazów. Dana jest objętość v cm^3 pewnego gazu, zostającego pod ciśnieniem p *cm rt.* Jaką objętość (x) miałby ten sam gaz pod ciśnieniem 76 *cm rt*? Prawo Boylego prowadzi do następującej proporcyi:

$$x : v = p : 76, \text{ skąd: } x = v\,\frac{p}{76}.$$

Wzoru tego używa się przy mierzeniu gazów miarami objętości. Objętość nie jest wogóle dostateczną miarą ilości gazu, albowiem w jednym litrze może pomieścić się zarówno wielka jak i mała masa gazu, zależnie od ciśnienia pod jakiem on zostaje. Mierząc gazy na litry należy więc podać wartość ciśnienia. Zwyczajnie redukuje się objętości gazów do ciśnienia normalnego 1 atmosfery = 76 *cm rt*, a to za pomocą powyższego wzoru redukcyjnego.

Obliczenie masy. Tej nieokreśloności, jaką spotykamy przy mierzeniu gazów miarami objętości, niema wcale, gdy mierzymy ilość gazów na wagę. t. j. gdy określamy ich masę. Przemiana objętości na masę uskutecznia się w następujący sposób. Niechaj v oznacza objętość, p ciśnienie gazu. Oznaczywszy przez m masę, przez d gęstość, mamy: $m = vd$. Ponieważ atoli (wzór 2):

$$(6) \qquad d = d_0\,\frac{p}{p_0}, \text{ przeto: } m = d_0\,\frac{pv}{p_0}.$$

Znając więc ciśnienie i objętość możemy obliczyć masę, byle gęstość d_0 danego gazu pod ciśnieniem 1 atmosfery p_0 (w tej samej temperaturze) była znana.

181. Spółczynniki sprężystości gazów. Gaz ściśnięty odzyska w zupełności objętość, jaką miał przed zgęszczeniem, skoro ciśnienie wróci do pierwotnej wartości. Gazy są więc na ściskanie doskonale sprężyste. Spółczynnik sprężystości σ (ust. 135) nie jest jednak liczbą stałą, lecz zwiększa się w miarę zgęszczania gazu; t. j. im więcej gaz jest zgęszczony, tem trudniej przychodzi zgęścić go jeszcze bardziej, tem większe jest σ. Opierając się na prawie Boylego możemy w następujący sposób obliczyć wartość spółczynnika sprężytości gazów dla zgęszczeń w temperaturze stałej.

Objętość i ciśnienie gazu oznaczymy przez v i p; przez σ spółczynnik sprężystości, *ważny dla bardzo małych zmian* v i p. Dajmy na to, że ciśnienie zostało zwiększone o mały przyrost p', natenczas objętość zmniejszy się o mały ubytek v'. Według prawa Boylego (ust. 180, wzór 1) będzie:

$$pv = (p + p')(v - v') = pv + p'v - pv' - p'v'.$$

Iloczyn $p'v'$ możemy tu opuścić, jako nader mały w porównaniu z $p'v$ i pv', przeto zostaje:

$$p'v - pv' = o, \text{ czyli } \frac{v'}{v} = \frac{p'}{p}$$

Stosunek $\frac{v'}{v}$, zmniejszenia objętości, do objętości pierwotnej, jest to zgęszczenie, wielkość którą oznaczyliśmy w nauce o odkształceniu przez θ (ust. 129). Spółczynnik ściśliwości σ równa się stosunkowi przyrostu ciśnienia p', który sprawił uważane zgęszczenie θ, do tegoż zgęszczenia (ust. 135). Otrzymujemy więc: $\sigma = p' : \frac{v'}{v} = p' : \frac{p'}{p} = p$. Wnosimy stąd, iż miarą sprężystości objętościowej, dla małych zgęszczeń, w temperaturze stałej, jest prężność gazu. Im bardziej gaz jest zgęszczony, im większa jego prężność — tem większy jego spółczynnik sprężystości; gaz zgęszczony jest zatem trudniej ściśliwy, aniżeli rozrzedzony. Gazy nader silnie zgęszczone mają ściśliwość niemal tak małą jak ciecze.

Zadania.

344) Pewna ilość powietrza zajmuje pod ciśnieniem 74 *cm rt*, objętość 1 m^3; obliczyć objętość tej samej masy powietrza pod ciśnieniem 30 *cm rt* i 80 *cm rt*, przyjmując niezmienną temperaturę.
Odp. 2·467 i 0·925 m^3.

345) Obliczyć, jakie zwiększenie ciśnienia jest potrzebne, celem zmniejszenia objętości masy powietrza o 10 litrów: a) gdy ciśnienie, przy którem zaczynamy ściskać, wynosi 30 *cm rt*, b) gdy ono wynosi 80 *cm rt*. *Odp.* 0·122; 0·874 *cm rt*.

346) Gęstość powietrza pod ciśnieniem 1 atm. wynosi: a) w temperaturze 0^0 : 0·001293; b) w temperaturze 20^0 : 0·001205 *gr/cm*^{3}. Obliczyć gęstości, jakie powietrze posiada w tych dwu temperaturach, pod ciśnieniem 10 *m rt*. *Odp.* 0·0170; 0·0158 *gr cm*^{3}.

347) Dowieść, że stosunek gęstości d i d' dwu gazów, podlegających prawu Boylego, a mających stałe temperatury, jest przy wszelkich ciśnieniach tensam.

Odp. Gęstości tych gazów pod ciśnieniem $p_0 = 1$ atm. oznaczymy przez d_0 i d'_0; stosunek tych liczb $d_0 : d'_0$ jest stałą liczbą ϱ. Ponieważ $d = p \cdot \frac{d_0}{p_0}$, $d' = p \cdot \frac{d'_0}{p_0}$, przeto $d : d' = d_0 : d'_0 = \varrho$.

348) W rurce szklanej, zgiętej w kształt litery U, znajduje się rtęć; powierzchnie rtęci znajdują się z początku w tym samym poziomie M; wysokość barometru wynosi: $b = 75$ *cm*. Jedno ramię rurki jest zamknięte i zawiera nad rtęcią powietrze, które zajmuje część rurki o długości 15 *cm*; drugie ramię, dłuższe, jest otwarte. Do ramienia otwartego dolewamy tyle rtęci, żeby powierzchnia jej wzniosła się o $c = 20$ *cm* nad poziom M; o ile (x) podniesie się rtęć nad ten poziom w ramieniu zamkniętem.

Odp. $15\, b = (15 - x)\,(b + c - x)$; stąd $x = \frac{1}{2}\,(15 + b + c) \pm$ $\pm \sqrt{\frac{1}{4}\,(15 + b + c)^2 - 15\, c}$. Warunkom zadania odpowiada znak: $-$, albowiem dla $c = o$ powinno być $x = o$; zatem $x = 2{\cdot}8$ *cm.*

349) O ile zniży się rtęć w ramieniu zamkniętem, pod poziom M, jeżeli zamiast dolewania rtęci połączymy ramię otwarte z pompą pneumatyczną i zmniejszymy ciśnienie atmosfery do połowy? Przekroje obu ramion są jednakowe. *Odp.* 6·92 *cm.*

350) Szklankę walcowatego kształtu, wysokości 20 *cm*, zanurzamy pod wodę, trzymając ją dnem do góry. Do jakiej wysokości wejdzie woda, jeżeli: a) szklanka jest zanurzona do połowy, b) dno zanurzone aż do powierzchni wody, c) dno zanurzone do głębokości 1 *m* pod powierzchnią. Ciśnienie atmosfery należy przyjąć $= 10$ *m* wody.

Odp. a) $20 \times 1000 = (20 - x)\,(1010 - x)$, $x = 0{\cdot}2$ *cm*; b) 0·4 *cm*; c) 2·1 *cm.*

351) Obliczyć parcie, które woda wywiera na szklankę zanurzoną w przypadku ostatnim, przyjmując 30 cm^2 jako przekrój szklanki i opuszczając grubość jej ścian. *Odp.* $30\,(20 - 2{\cdot}1) = 537$ *Gr.*

352) Pewna ilość wodoru zajmuje pod ciśnieniem 5 atmosfer i w temperaturze 0^0, objętość 0·7 m^3. Ile waży ten wodór (wys. atm. jednolitej z tablicy)? *Odp.* $\frac{5 \times 10333 \times 0{\cdot}7}{114970} = 0{\cdot}314$ *kg.*

353) Ile ważyłaby ta sama objętość powietrza suchego w tych samych warunkach. *Odp.* $0{\cdot}314 \times 14{\cdot}4 = 4{\cdot}52$ *kg.*

354) W próżni barometru naczyniowo-lewarowego (fig, 150, NL) znajduje się odrobina suchego powietrza. Barometr wskazuje 75 *cm.* Za pomocą śruby S podnosimy rtęć w obu ramionach, dopóki objętość próżni Toricellego nie zmniejszy się do połowy; barometr wskazuje teraz, 74 *cm.* Obliczyć prawdziwy stan barometru. *Odp.* 76 *cm.*

355) Suche powietrze, mające temperaturę 0^0, pod ciśnieniem 1 atm. (t. j. 76 *cm rt* w szerokości 45^0, w poziomie morza) posiada gęstość 773·2 razy mniejszą, aniżeli woda 4^0. Obliczyć stosunek cięża-

rów równych objętości wody i powietrza suchego (0^0), jeżeli barometr wskazuje ciśnienie 76 *cm rt*: a) na równiku ziemi, b) na biegunach.
Odp. 775·4; 771·1.

182. Praca przy zgęszczaniu gazów. Zgęszczając gaz jaki, pokonywamy wzdłuż pewnej drogi, jego coraz rosnącą prężność, wykonywamy zatem pracę. Obliczymy tu, ile pracy należy wykonać, aby zgęścić pewną ilość gazu, mającego jakąkolwiek objętość początkową v i początkowe ciśnienie p, tak iżby gaz uzyskał mniejszą objętość v'. Wartość pracy tej obliczymy w założeniu, że temperatura gazu nie zmienia się podczas zgęszczania, wskutek czego można zastosować prawo Boylego. Wyobraźmy sobie, że gaz jest zamknięty w walcu (jak na ryc. 143), pod tłokiem ruchomym. Celem uproszczenia rachunku przyjmiemy, że pole przekroju tłoka równa się jednostce. Pomyślmy następnie, że żądane zgęszczenie gazu zostaje w ten sposób otrzymane, iż udzielamy mu po kolei n zgęszczeń bardzo małych, ale jednakowej wielkości θ. Po pierwszem zgęszczeniu gaz uzyska pewną objętość v_1; według określenia mamy: $\frac{v - v_1}{v} = \theta$, skąd $v_1 = v\,(1 - \theta)$. Wskutek pierwszego zgęszczenia prężność gazu powiększyła się i uzyskała wartość p_1; według prawa Boylego będzie: $p_1 = p\,\frac{v}{v_1} = \frac{p}{1 - \theta}$. Drugie zgęszczenie θ zmniejszy widocznie objętość gazu do wartości: $v_2 = v_1\,(1 - \theta) = v\,(1 - \theta)^2$, a powiększy ciśnienie do: $p_2 = \frac{p}{(1 - \theta)^2}$ i t. d. Po wykonaniu n takich zgęszczeń uzyskamy ostatecznie: $v' = v\,(1 - \theta)^n$, $p' = \frac{p}{(1 - \theta)^n}$.

Łatwo przekonać się, że każde z uważanych zgęszczeń częściowych wymaga tej samej pracy. Tak n. p. przy pierwszem zgęszczeniu siła działająca na tłok wynosi p; droga przebyta przez tłok (z uwagi, że pole jego przyjęliśmy $= 1$), wynosi $v - v_1$, czyli $v\,\theta$. Z tego wynika, że praca użyta przy pierwszem zgęszczeniu $= p\,v\,\theta$. Przy drugiem zgęszczeniu siła $= p_1$, droga $= v_1 - v_2 = v_1\theta$, zatem praca $= p_1 v_1 \theta$. Ponieważ jednak według prawa Boylego $p_1 v_1 = pv$, przeto praca mieć będzie wartość poprzednią; podobnie przy dalszych zgęszczeniach. Całkowita praca

L, przy uważanych n zgęszczeniach, które doprowadziły gaz do końcowej objętości v', wynosi zatem:

$$L = npv\theta.$$

Liczba n zgęszczeń kolejnych zależy od początkowej i końcowej objętości gazu, tudzież od wartości θ. Jeżeli te wielkości uważać będziemy jako dane, wtenczas możemy obliczyć n z powyższego równania:

$$v' = v(1 - \theta)^n.$$

Biorąc w tym celu logarytmy naturalne [1]) znajdziemy: $\log v' = \log v + n \log(1 - \theta)$. Pamiętając, że każde ze zgęszczeń częściowych jest bardzo małe, możemy zamiast $\log(1 - \theta)$ napisać $-\theta$. [2]) Równanie: $\log v' = \log v + n \log(1 - \theta)$ przyjmie wskutek tego postać: $\log v' = \log v - n\theta$, czyli $n\theta = \log \frac{v}{v'}$. Wstawiwszy tę wartość iloczynu $n\theta$ w równanie dla pracy L, znajdziemy ostatecznie:

$$L = pv \log \frac{v}{v'}.$$

Iloraz $\frac{v}{v'}$, równy także stosunkowi gęstości końcowej do początkowej: $\frac{d'}{d}$, nazwiemy stosunkiem zgęszczenia. Równanie ostatnie zawiera w sobie następującą regułę: *Praca użyta przy zgęszczeniu pewnej masy gazu, w temperaturze stałej, równa się iloczynowi ciśnienia i objętości gazu* (*który dla danej temperatury jest stały*) *pomno-*

---

[1]) Logarytm naturalny a pewnej liczby A jest to liczba mająca tę własność, że t. zw. zasada logarytmów naturalnych, liczba $e = 2{\cdot}71828\ldots$, podniesiona do potęgi a, daje liczbę A, jak to objaśniają następujące równania: $e^a = A$, $a = \log A$. Logarytm naturalny zasady e równa się 1. Dziesiętny (zwyczajny) logarytm tej zasady wynosi: 0·4342945 i nazywa się modułem logarytmów zwyczajnych. Logarytm naturalny pewnej liczby znajduje się dzieląc zwyczajny jej logarytm przez ten moduł.

[2]) Połóżmy bowiem $\log(1 - \theta) = k$, wtedy będzie $1 - \theta = e^k = 1 + k + \frac{1}{2}k^2 + \ldots$ Zważywszy, że k jest bardzo małą liczbą możemy w tym szeregu opuścić k^2 i wyższe jej potęgi. Zostanie wtedy $1 - \theta = 1 + k$, czyli $k = \log(1 - \theta) = -\theta$.

żonemu przez logarytm naturalny stosunku zgęszczenia. Rozumie się samo przez się, że gdy naodwrót gaz zgęszczony rozszerza się, w stałej temperaturze, przezwyciężając opór zewnętrzny zawsze prawie równy własnej jego prężności, natenczas oddaje on napowrót pracę L. Celem zachowania stałej temperatury przy zgęszczaniu, jak to założyliśmy w poprzedzającym rachunku, należy ściskać gaz bardzo powoli, w przeciwnym razie rozgrzewa sie on przez samo zgęszczenie (jak się to okaże w nauce o cieple), prężność jego staje się większa, a wskutek tego zwiększa się ilość pracy potrzebnej do zgęszczenia. W poprzedzającym rachunku przyjęliśmy, że gaz zawarty jest w naczyniu walcowatem o przekroju $= 1$; czytelnik przekona się łatwo, że wypadek rachunku nie zmieni się, skoro się przyjmie inny przekrój naczynia, albo nawet inną jego postać.

183. Zależność ciśnienia i gęstości powietrza od wysokości nad ziemią. (Pomiar wysokości za pomocą barometru). Doświadczenia Pascala (ust. 177) dowiodły, że ciśnienie atmosfery ubywa stopniowo, w miarę wznoszenia się do góry. Ciśnienie w cieczach zmniejsza się również, gdy wznosimy się od dna do góry; ubywanie ciśnienia w atmosferze podlega jednak innemu prawu niż w cieczy. Gęstość cieczy n. p. wody jest bowiem prawie niezależna od ciśnienia; wskutek tego ubytek ciśnienia w cieczach jest proporcyonalny do wzniesienia. W atmosferze natomiast (dzięki większej ściśliwości gazów) ubytek ciśnienia sprawia, że i gęstość powietrza maleje, w miarę wznoszenia się do warstw wyższych. Jeżeli więc podzielimy w myśli pionowy słup powietrza atmosferycznego na warstwy poziome, w taki sposób, żeby w każdej z nich ciśnienie ubywało o tę samą wielkość (t. j. na warstwy mające jednakowe ciężary), wówczas wysokości tych warstw nie będą jednakowe, lecz górne będą wyższe od dolnych.

Ażeby znaleźć prawo określające zależność ciśnienia, albo gęstości powietrza, od wysokości, weźmy pod uwagę warstwę w pewnej wysokości z nad ziemią; niechaj p oznacza ciśnienie, δ ciężar właściwy powietrza w uważanej warstwie. Przez p' i δ' oznaczymy ciśnienie i ciężar właściwy powietrza na powierzchni ziemi. Przyjmiemy nadto, że atmosfera znajduje się w spoczynku i że od dołu aż do wysokości z temperatura jej jest stała $= t$.

Weźmy pod uwagę pewną objętość v' powietrza na dole; ono waży $v'\delta'$ i posiada prężność p'. Podnieśmy je zwolna na wysokość z.

Wykonamy przytem przeciw ciężkości pracę: $v'\delta'z$. Jednocześnie powietrze to dostanie się pod mniejsze ciśnienie p, jakie panuje w wysokości z, i rozszerzy się wskutek tego do objętości większej v; przytem wykona ono pracę $= p'v' \log \frac{v}{v'}$ (ust. poprz.). Jeżeli równowaga atmosfery ma być zapewniona, wówczas obie uważane tu prace powinny mieć wartości jednakowe. Gdyby bowiem n. p. praca, którą powietrze wydaje przy rozszerzaniu się, przewyższała tamtą, to utworzyłyby się prądy powietrza idące samodzielnie do góry; praca oswobodzona z gazu wystarczałaby nietylko do pokrycia pracy przeciw ciężkości, ale zostałby pewien nadmiar, wytwarzający energię kinetyczną tych prądów. Przeciwnie, gdyby praca przeciw ciężkości przeważała, to powietrze spadałoby z warstw górnych na dół. W przypadku równowagi będzie więc: $v'\delta'z = p'v' \log \frac{v}{v'}$. Ponieważ atoli według prawa Boylego: $\frac{v}{v'} = \frac{p'}{p}$, przeto: $z = \frac{p'}{\delta'} \log \frac{p'}{p}$. Według ust. 180, wzór (5), p' jest proporcyonalne do δ', jest mianowicie: $\frac{p'}{\delta'} = A = A_0 \left(1 + \frac{t}{273}\right)$, w czem A_0 oznacza wysokość atmosfery jednolitej powietrza, w temperaturze 0°. Zależność ciśnienia p od wysokości z wyraża się zatem wzorem następującym:

$$z = A_0 \left(1 + \frac{t}{273}\right) \log \frac{p'}{p}.$$

Połóżmy tu za z po kolei wartości $0, x, 2x, 3x, \ldots$ otrzymamy na p wartości $p', \frac{p'}{\alpha}, \frac{p'}{\alpha^2}, \ldots$ w czem przez α oznaczyliśmy liczbę $e^{\frac{x}{A}}$. *Jeżeli tedy wysokości rosną jak wyrazy szeregu arytmetycznego, odpowiednie ciśnienia w atmosferze (stan barometru) maleją jak wyrazy szeregu geometrycznego*: innemi słowy, jeżeli różnice wysokości są równe, natenczas s t o s u n k i (nie różnice, jakby było w cieczach nieściśliwych) odpowiednich ciśnień będą jednakowe.

Wzór poprzedzający wyraża nietylko szukane prawo ubytku ciśnienia, lecz na odwrót może służyć do obliczenia wysokości z, n. p. do wymierzenia wysokości gór i t. p. na podstawie jednoczesnych pomiarów ciśnień barometrycznych p i p' w tych miejscach, których różnicy wysokości z szukamy. Stała A_0 dla suchego powietrza posiada wartość: 7989·6 *m*.

Dla ułatwienia rachunku wprowadzimy logarytmy zwyczajne (Log) zamiast naturalnych (log). Zważywszy, że $\log = \frac{\mathrm{Log}}{0{\cdot}4342945}$, znajdziemy:

$$z = \frac{7989{\cdot}6}{0{\cdot}4342945}\left(1 + \frac{t}{273}\right)\mathrm{Log}\frac{p'}{p}.$$

Wartość A_0 zmienia się cokolwiek, zależnie od szerokości geograficznej, wskutek zmian ciężkości. Liczba 7989·6 należy do ciężkości normalnej g_{45}, t. j. do tej ciężkości, przy której słup rtęci o wysokości 76 *cm* równoważy dokładnie ciśnienie 1 atmosfery. W szerokości geograficznej φ, w wysokości z' nad morzem, ciężkość wynosi (ust. 124):

$$g = g_{45}\left(1 - 0{\cdot}0026 \cos 2\varphi - \frac{2z'}{10^7}\right),$$

tam należy też przyjąć inną wysokość atmosfery jednolitej $= A_0'$, większą lub mniejszą od A_0, w tym stosunku, w jakim g jest mniejsze lub większe od g_{45}. Proporcya $A_0' : A_0 = g_{45} : g$, daje:

$$A_0' = A_0 \frac{g_{45}}{g} = \frac{A_0}{1 - 0{\cdot}0026 \cos 2\varphi - \frac{2z'}{10^7}},$$

albo w przybliżeniu:

$$A_0\left(1 + 0{\cdot}0026 \cos 2\varphi + \frac{2z'}{10^7}\right).$$

Podstawiwszy to wyrażenie zamiast liczby 7989·6 znajdziemy:

$$z = 18397\left(1 + \frac{t}{273}\right)\left(1 + 0{\cdot}0026 \cos 2\varphi + \frac{2z'}{10^7}\right)\mathrm{Log}\frac{p'}{p}\ \textit{metr.}$$

W rachunku powyższym przyjęliśmy wartość liczebną stałej A_0 dla powietrza zupełnie suchego. Ponieważ w atmosferze ziemi znajduje się zawsze para wodna, której obecność sprawia, iż powietrze zwyczajne bywa nieco lżejsze, aniżeli powietrze suche, przeto w praktyce przyjmuje się, zamiast 18397, liczbę większą, mianowicie około 18430. Wzór powyższy do obliczania wysokości jest i z tego powodu niezupełnie dokładny, że temperatura atmosfery nie jest jednostajna; powietrze w warstwach górnych jest bowiem zimniejsze aniżeli w dolnych. Aby tę różnicę chociaż częściowo uwzględnić, przyjmuje się za t średnią arytmetyczną temperatur panujących na ziemi i w wysokości z; za z' należy wstawić średnie wzniesienie (w metrach) nad morzem okolicy, w której pomiary bywają wykonywane. Pomimo uwzględnienia tych poprawek pomiary wysokości za pomocą barometru nie są tak dokładne, jak pomiary wykonane bezpośrednio, za pomocą przyrządów niwelacyjnych.

Zadania.

356) Ile pracy wymaga wtłoczenie 40 *gr* powietrza do zbiornika, mającego objętość 1 litra, w stałej temperaturze 0°?

Odp. Objętość (v) 40 gramów powietrza, pod ciśnieniem atmosfery, $= 40 \times 0{\cdot}7732 = 30{\cdot}93$ litrów; $v' = 1$ litr; $\log \frac{v}{v'} = 3{\cdot}43205$; $L = 1033{\cdot}3 \times 30930 \times 3{\cdot}43205 = 1097 \times 10^5$ *Gr cm* $= 1097$ *Kgm.*

357) Przyjmując ciśnienie powietrza w poziomie morza $= 76$ *cm rt*, średnią temperaturę powietrza $= 10^0$, obliczyć ciśnienie powietrza w wysokości: 500, 1000, 1500, 2000 *m* nad morzem (dla $\varphi = 45^0$).

Odp. 71·45; 67·17; 63·15; 59·37 *cm rt.*

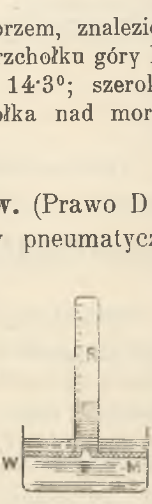
358) Ile waży (w powyższej średniej temperaturze) słup powietrza o przekroju 1 m^2, sięgający od poziomu morza do wysokości 1000 *m* nad morzem?

Odp. $(76-67{\cdot}17) \times 13{\cdot}5956 \times 10000$ *Gr* $= 1200$ *Kg.*

359) Rozdzielić pionowy słup powietrza, sięgający od ziemi aż do granicy atmosfery, płaszczyzną poziomą na dwie części, zawierające jednakowe ilości powietrza (przyjąwszy $t = o$, tudzież opuszczając zależność ciężkości od wysokości). *Odp.* W szukanej wysokości z jest $p = \frac{1}{2} p'$; stąd $z = 18400 \text{ Log } 2 = 5500$ *m.*

360) U stóp góry, na wysokości 350 *m* nad morzem, znaleziono: $p' = 72{\cdot}14$ *cm rt*, temperatura powietrza 16·8°; na wierzchołku góry było jednocześnie: $p = 69{\cdot}68$ *cm rt*, temperatura powietrza 14·3°; szerokość geograficzna góry $= 52^0$. Obliczyć wysokość wierzchołka nad morzem *Odp.* 643 *m.*

184. Prężność i ściśliwość mieszanin gazów. (Prawo Daltona). Na pomoście *M* (ryc. 153), t. zw. wanny pneumatycznej *W*, stawiamy walec szklany *R*, otworem na dół, napełniwszy go poprzednio cieczą znajdującą się w wannie (wodą lub rtęcią). Wiadomo, że ciecz nie wypłynie z walca, byle wysokość jego nie przenosiła wysokości ciśnienia atmosfery, dla danej cieczy. Wprowadźmy następnie przez otwór *S* w pomoście rozmaite gazy do wnętrza walca; one zbiorą się w górnej jego części, a pewna ilość cieczy wypłynie z walca. Za pomocą tego przyrządu można mierzyć dogodnie objętość gazów zebranych w walcu, a zarazem ich ciśnienie.



Ryc. 153.

Owóż doświadczenie okazuje, że gazy mieszają się zawsze ze sobą, w każdym dowolnym stosunku. Zachodzi jednak pytanie, w jakim stopniu przyczyniają się składniki mieszaniny gazów do całkowitego ciśnienia, które mieszanina wywiera. Wprowadźmy, za przykładem Daltona, odmierzone ilości różnych gazów do naczynia urządzonego na sposób ryc. 153; zmierzmy objętość i ciśnienie mieszaniny, a przekonamy się, że *ciśnienie mieszaniny jest równe sumie ciśnień, któreby składniki jej wywierały, gdyby każdy z osobna zajmował tę samą objętość jak mieszanina.* Ciśnienia różnych gazów, wchodzących w skład mieszaniny, obliczone w powyższy sposób, nazywają się ciśnieniami częściowemi. Prawo to, znane jako prawo Daltona, można wypowiedzieć krótko w następujący sposób: *ciśnienie mieszaniny gazów, równa się sumie ciśnień częściowych jej składników*; albo także: w jednolitej mieszaninie kilku gazów każdy gaz wywiera takie ciśnienie, jak gdyby innych nie było.

Przyjąwszy prawo Daltona możemy łatwo okazać, że mieszanina kilku gazów stosuje się do prawa Boylego, byle każdy ze składników do tego prawa się stosował. W istocie, jeżeli ściśniemy mieszaninę n. p. do połowy objętości, wówczas ciśnienie częściowe każdego gazu powiększy się w dwójnasób, przeto, według Daltona, ciśnienie mieszaniny powiększy się również w dwójnasób.

Skład mieszanin gazowych można dwojako określać: a) na wagę, przez stosunki mas składników, zawartych w pewnej masie mieszaniny; b) na objętość; w tym razie należy powiedzieć, ile jednostek objętości każdego gazu wchodzi w skład pewnej objętości (n. p. 100 jednostek objętości) mieszaniny. Rozumie się przytem, że objętości składników były mierzone pod tem ciśnieniem, pod którem znajduje się mieszanina. Weźmy n. p. 100 jednostek objętości powietrza, pod jakiemkolwiek ciśnieniem. Rozbiór chemiczny okazał, że 100 jednostek objętości powietrza zawierają 21 jednostek obj. tlenu i 79 jednostek obj. azotu. Znaczenie tych liczb jest takie: gdybyśmy w naczyniu o objętości 100, zawierającem powietrze, oddzielili tlen od azotu za pomocą ruchomej przegrody i ustawili przegrodę w taki sposób, żeby ciśnienia obu składników były równe pierwotnemu ciśnieniu mieszaniny, wówczas tlen zajmowałby objętość 21, po jednej stronie przegrody, azot 79 jednostek po drugiej. W samej mieszaninie natomiast tlen zajmuje objętość 100; taką samą objętość zajmuje azot. Ciśnienie częściowe tlenu w mieszaninie stanowi przeto, według prawa Boylego $^{21}/_{100}$

ciśnienia mieszaniny; udział azotu w ciśnieniu mieszaniny wynosi $^{79}/_{100}$. Ogólnie mówiąc: *stosunki ciśnień częściowych różnych gazów, stanowiących jednolitą mieszaninę, równają się stosunkom objętości, w jakich one wchodzą w skład mieszaniny.*

Skład powietrza na objętość bywa średnio biorąc następujący: azotu 77·56%; tlenu 20·63%; argonu 0·93%; pary wodnej 0·84%; dwutlenku węgla 0·04%; nadto są ślady innych gazów, tudzież pył.

Równanie Boylego dla mieszanin. Oznaczmy przez v_0', v_0'', v_0''',... objętości jakie zajmują gazy, z których mieszanina ma być utworzona, w zbiornikach oddzielnych, pod ciśnieniem 1 atm. $= p_0$. Gdy wprowadzimy je po kolei do wspólnego zbiornika, mającego objętość v, to uzyskają one tam następujące ciśnienia: $p' = p_0 \frac{v_0'}{v}$; $p'' = p_0 \frac{v_0''}{v}$; i t. d. Ciśnienie p mieszaniny w tym zbiorniku, będzie zatem, według Daltona:

$$p = p' + p'' + \ldots, \text{ albo } pv = p_0 (v_0' + v_0'' + v_0''' + \ldots).$$

Zadania.

361) W naczyniu obejmującem $v = 5$ litrów znajduje się powietrze zawierające parę wodną; ciśnienie (p) wynosi 743 *mm rt.* Za pośrednictwem zgęszczonego kwasu siarczanego usunięto parę, poczem ciśnienie zmniejszyło się do 735 *mm rt* (p'). Jaki był skład na wagę powietrza wilgotnego? (Stosunek gęstości pary do gęstości powietrza suchego, przy równych dla obu ciśnieniach i temperaturach $= 5 : 8$).

Odp. Ciężar powietrza suchego $= \frac{p'v}{A}$ (ust. 180,7); ciężar pary $= \frac{5}{8} \frac{(p - p')v}{A}$; stosunek szukany $= \frac{5}{8}(p - p') : p' = 7 : 1000$. Ciężar pary w jednostce objętości powietrza wilgotnego $= \frac{5}{8} \frac{p - p'}{A} =$ $= \frac{5}{8} \frac{0{\cdot}8 \times 13{\cdot}5956}{799000}$ *Gr/cm*^{3} $= 8{\cdot}5$ *Gr* na metr sześcienny.

362) Do naczynia zamkniętego i próżnego, obejmującego 1 m^3, wprowadzamy, w temperaturze 0°, 400 *gr* suchego powietrza, 60 *gr* wodoru i 500 *gr* tlenu. Obliczyć ciśnienie mieszaniny.

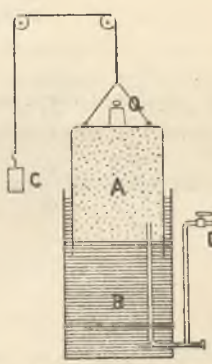
Odp. 101 *cm rt.*

363) Do walca na wannie pneumatycznej (ryc. 153), napełnionego pierwotnie rtęcią, wprowadzamy 10 cm^3 tlenu i 10 cm^3 wodoru (objętości

te były mierzone pod ciśnieniem atmosferycznem). Przekrój poprzeczny walca mierzy 10 cm^2, wysokość dna nad rtęcią w wannie 40 *cm*; powierzchnia rtęci w wannie bardzo wielka w porównaniu z przekrojem walca. O ile zniży się powierzchnia rtęci w walcu, t. j. jaką długość walca zapełnią gazy? (Ciśnienie atmosfery = 75 *cm rt*).

Odp. 5·55 *cm*.

185. Wypływ gazów. Zjawiska ruchu gazów są o wiele zawilsze, aniżeli zjawiska ruchu cieczy, a to z powodu znacznej ich ściśliwości. Jeżeli w jakimkolwiek strumieniu gazu ciśnienie zmienia się od miejsca do miejsca, wtenczas i gęstość mieć będzie różne wartości. Ta zmienność gęstości utrudnia zrozumienie praw ruchu, tem więcej, że łączy się (jak uczy nauka o cieple) ze zmianami temperatury gazu, które znowu oddziaływają na ciśnienie. Zupełny wykład praw ruchu gazów nie może więc obejść się bez uwzględnienia zmian cieplnych, jakie towarzyszą ruchowi. Tu będzie mowa tylko o takich przypadkach ruchu, w których ciśnienie gazu zmienia się tak mało, iż można uważać gęstość w przybliżeniu jako stałą; wtedy też stosować się będą prawa podobne do tych, które rządzą ruchem płynów nieściśliwych t. j. cieczy.



Ryc. 154.

Celem uzyskania jednostajnego wypływu gazów używa się przyrządów zwanych g a z o m e t r a m i; one służą zarazem do zbierania i przechowywania gazów. Metalowy dzwon *A* (ryc. 154) zawieszony jest na sznurze i zrównoważony ciężarem *C*. Wewnątrz dzwonu znajduje się gaz, zamknięty od spodu powierzchnią wody, zapełniającej naczynie *B*, w którem dzwon jest zanurzony otworem na dół. Rura *D* służy do napełnienia gazometru, tudzież do wyprowadzania gazu na zewnątrz. Za pomocą ciężarów *Q*, umieszczonych na dzwonie można ciśnienie gazu zwiększyć. Miarą zwyżki ciśnienia gazu, nad ciśnieniem atmosfery, jest widocznie różnica wysokości poziomów wody w dzwonie i zewnątrz niego.

Jeżeli w ścianie dzwonu zrobimy mały otwór, wówczas utworzy się stały wypływ gazu na zewnątrz. Prędkość wypływu v będzie tem większa, im bardziej ciśnienie p gazu w dzwonie przewyższa zewnętrzne ciśnienie atmosfery, p'. Jeśli gęstość gazu w dzwonie oznaczamy przez d, pole otworu przez S, wówczas masa wypływająca w przeciągu pewnego czasu τ będzie: $m = d \,.\, Sv\tau$ (ust. 166). We wnętrzu dzwonu prędkość jest prawie równa zeru; tylko w pobliżu otworu istnieje szybszy ruch gazu. Z tego wynika, że masa m zyskuje przy wypływie energię kinetyczną: $\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} d\,Sv\tau \,.\, v^2$. Energia ta jest skutkiem pracy ciśnienia wewnętrznego, w przeciągu czasu τ, $(= p\,Sv\tau$, ust. 167), tudzież pracy ciśnienia zewnętrznego $(= p'\,Sv\tau)$, działającego w kierunku przeciwnym ruchowi. Energia kinetyczna równa się więc różnicy tych prac; stąd równanie:

$$\tfrac{1}{2} d\,Sv\tau \,.\, v^2 = Sv\tau\,(p - p'),$$

albo:

$$v = \sqrt{2\,\frac{p-p'}{d}} = \sqrt{2\,\frac{p}{d}\left(1 - \frac{p'}{p}\right)},$$

t. j. *prędkość wypływu jest proporcyonalna do pierwiastka z nadwyżki ciśnienia, a odwrotnie proporcyonalna do pierwiastka z gęstości gazu.* Zważywszy, że $\frac{p}{d} = Ag$ (ust. 180) możemy także napisać:

$$v = \sqrt{2\,Ag\left(1 - \frac{p'}{p}\right)}.$$

Kładąc tu $p' = o$, widzimy, że prędkość wypływu do przestrzeni próżnej równa się prędkości, jakiejby nabyło ciało spadające swobodnie z wysokości równej wysokości atmosfery jednolitej w uważanym gazie (dla powietrza: $\sqrt{2 \times 7990 \times 9{,}806} = 396\ m/sek$).

Oznaczywszy pojemność gazometru przez V, obliczymy czas t w ciągu którego gazometr całkowicie się wypróżni (przyjmujemy, iż ciśnienie gazu w gazometrze pozostaje aż do końca stałe $= p$). Zważywszy, że w ciągu jednostki czasu wypływa masa $d\,Sv$, zajmująca w gazometrze objętość Sv, obliczymy czas wypływu całej objętości V z następującej proporcyi: $t : 1 = V : Sv$, skąd:

$$t = \frac{V}{S}\sqrt{\frac{d}{2\,(p - p')}}.$$

Jeżeli napełnimy gazometr innym gazem, który pod temsamem ciśnieniem p posiada gęstość d', to wypróżnienie gazometru wymagać będzie czasu:

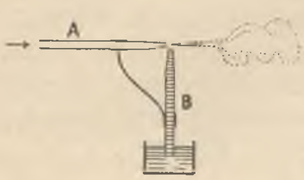
$$t' = \frac{V}{S}\sqrt{\frac{d'}{2(p-p')}}.$$

Porównawszy te dwa wyrażenia, odnoszące się do dwu różnych gazów, a do tego samego gazometru i tej samej zwyżki ciśnienia, znajdziemy:

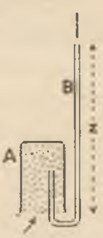
$$d : d' = t^2 : t'^2,$$

t. j. *gęstości dwu gazów mają się do siebie jak kwadraty czasów wypływu jednakowych objętości pod jednakowemi ciśnieniami.* Na tem prawie polega prosty sposób porównywania gęstości gazów, wskazany przez Bunsena.

Jeżeli gaz wypływa z gazometru przez dłuższą rurę (n. p. gaz oświetlający przez przewody gazowe), wtenczas prędkość wypływu v jest



Ryc. 155.



Ryc. 156.

znacznie mniejsza, aniżeli prędkość wypływu przez otwór w ścianie; część energii kinetycznej zużywa się bowiem przez tarcie gazu w rurze. Stratę ciśnienia oblicza się w podobny sposób jak dla cieczy.

Zależność ciśnienia od szerokości przewodu, którym płynie strumień gazu jest podobna jak dla cieczy, przynajmniej w ogólnych zarysach. W zwężonych częściach przewodu ciśnienie jest mniejsze aniżeli w rozszerzonych. Zastosowaniem tego zjawiska są tak zw. rozpylacze (ryc. 155) — używane do rozpylania cieczy na drobne kropelki. Strumień powietrza, wychodzący z otworu zwężonego rurki A tworzy żyłę (można ją uwidocznić za pomocą dymu), która dopiero w znaczniejszej odległości zaciera się i rozwija na wiry. wskutek tarcia o powietrze otaczające. Jeżeli otwór rurki B, zanurzonej w jakiejkolwiek cieczy, zbliżymy do ujścia rurki A, t. j. do zwężonej części żyły, wówczas ciecz wzniesie się w rurce B

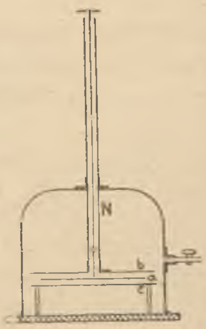
do otworu górnego, poczem porwana prądem powietrza zostaje rozpyloną. Wznoszenie się cieczy w B jest następstwem zmniejszonego ciśnienia w zwężonej części prądu powietrza.

Kominy. Komin jest to lewar odwrócony (ust. 168), prowadzący do góry gaz mający gęstość mniejszą, aniżeli powietrze atmosferyczne. Dajmy na to, że szklanka A (Ryc. 156), odwrócona dnem do góry, zawiera jakikolwiek gaz, lżejszy od powietrza (wodór, gaz oświetlający, ciepłe powietrze). Skoro wdrożymy wypływ, przez napełnienie całej rurki B tym samym gazem (rozgrzewanie się komina), wówczas będzie on trwale wypływał górnym końcem rurki na zewnątrz — podobnie jak n. p. nafta w wodzie wypływa do góry (Ryc. 142). Ponieważ w obec zachodzących tu małych różnic ciśnienia, uważać możemy gęstość gazu jako stałą, przeto prędkość wypływu (przeciągu w kominie) będzie określona, jak w ust. 168, wzorem:

$$v = \sqrt{2\,gz\frac{d - d'}{d'}};$$

tu oznacza: z wysokość komina, d gęstość powietrza otaczającego, d' gęstość gazu w kominie.

186. Tarcie wewnętrzne, czyli lepkość, objawia się w gazach podobnie jak w cieczach. Gazy wprowadzone w ruch uspokajają się same przez się — gdy siła, która była przyczyną ruchu, przestanie działać. Najsilniejsze wzburzenia atmosferyczne, nie mniej jak wiatry zwyczajne, ustają bardzo rychło, skoro ciśnienia w atmosferze wyrównają się. Przepływ gazów przez rurki włoskowate lub przez inne wązkie szczeliny, spotyka znaczny opór, wynikający z tarcia wewnętrznego.



Ryc. 157.

Wartości tego tarcia w różnych gazach można porównywać za pomocą przyrządu, którego główne części wyobraża ryc. 157. Lekki krążek szklanny a zawieszony jest na cienkim drucie N, w położeniu poziomem, między dwoma krążkami stałymi b i c, równoległymi do środkowego. Gdy wprowadzimy krążek a w ruch wahający, około N jako osi, wówczas przekonamy się, że wahania zanikają stopniowo i ustają nakoniec zupełnie. W części przyczynia się do tego tarcie wewnętrzne drutu N, którego sprężystość nadaje krążkowi ruch wahający; głównie jednak energia kinetyczna zużywa się przez tarcie wewnętrzne gazu znajdującego się w dzwonie szklanym, którym cały przyrząd jest nakryty. Skrajne warstwy gazu, po obu stronach krążka *a*, przylegają do niego i biorą udział w jego ruchu. Wskutek tego ślizgają się one na warstwach dalszych i trą o nie. Gaz między krążkami odkształca się podobnie, jak to opisaliśmy w ust. 164 (ryc. 133), mówiąc o tarciu cieczy. Więcej lub mniej szybkie zanikanie wahań krążka daje miarę tarcia wewnętrznego w gazie. Przyrząd jest przykryty szczelnie dzwonem zamkniętym i może służyć do badania różnych gazów, przy rozmaitych ciśnieniach i gęstościach. Doświadczenia okazały, że *tarcie wewnętrzne w różnych gazach posiada rozmaitą wartość*; w tym samym gazie jest ono *niezależne od ciśnienia t. j. od gęstości gazu.* Tak n. p. w powietrzu o zwyczajnej gęstości jest ono równie wielkie jak w powietrzu tysiąckrotnie rozrzedzonem; dopiero przy nader znacznem rozrzedzeniu, za pomocą najlepszych pomp rtęciowych, można dostrzedz zmniejszanie się tarcia (por. tom II, ust. 106).

Tablica lepkości gazów (15°)

(dyn/cm^2 *sek*).

Tlen	0·000212	Dwutlenek węgla .	0·000160
Powietrze	0·000179	Wodór	0·000093

Ogrzanie zwiększa lepkość gazów — w tym względzie zachowują się one przeciwnie jak ciecze. Wogóle lepkość gazów jest mniejsza od lepkości cieczy (w powietrzu około 100 razy mniejsza niż w wodzie). Ruchliwość jednak, t. j. stosunek gęstości do lepkości, jest mimo to w cieczach większa niż w gazach, z powodu małej gęstości gazów. Gazy, zwłaszcza rozrzedzone są nader mało ruchliwe, albowiem rozrzedzenie zmniejsza gęstość, a nie zmniejsza lepkości (ust. 164).

187. Opór gazów. Ciała poruszające się w ośrodku gazowym doznają oporu, na który składają się też same przyczyny, o których była mowa w ust. 170. W ogóle można tu powtórzyć wszystko, co było powiedziane o oporze cieczy, z tym dodatkiem, że opór gazów jest znacznie mniejszy z powodu mniejszej lepkości i gęstości. Na oddzielną wzmiankę zasługuje jednak wpływ ściśliwości gazów. Jeżeli prędkość ciała poruszającego się jest nieznaczna, wtenczas gęstość gazu otaczającego nie zmienia się prawie; gaz, wprowadzony w ruch przez ciało, porusza się niemal tak samo jakby się poruszała ciecz nieściśliwa. Skoro jednak prędkość ruchu ciała przenosi kilkaset metrów na sekundę (kule działowe i t. p.), natenczas tworzy się na przedzie ciała wał zgęszczonego gazu, który posuwa się naprzód razem z ciałem. Wstrząśnienia gazu i zmiany gęstości, sprawione ruchem ciał są przyczyną świstu i huku, jakie towarzyszą zwykle szybkim ruchom ciał.

Gazy poruszające się wywierają na ciała stałe, nieruchome, nacisk czyli parcie, które odpowiada oporowi rozważanemu poprzednio. Parcie wiatru na ciała o wielkiej powierzchni bywa bardzo znaczne; ono stanowi siłę obracającą wiatraki, poruszającą okręty żaglowe.

Zadania.

364) Z jaką prędkością wypływa wodór do próżni? *Odp.* 1500 *m/sek.*

365) Z jaką prędkością wypływa powietrze zgęszczone w zbiorniku pod ciśnieniem 5 atm., jeżeli ciśnienie w otoczeniu równa się 1 atm. *Odp.* 354 *m/sek.*

366) Obliczyć ilość powietrza wypływającego na sekundę w powyższym przypadku, wiedząc, że pole otworu wynosi 1 mm^2, a spółczynnik określający zwężenie żyły $= 0{\cdot}5$. *Odp.* $0{\cdot}5 \times 0{\cdot}01 \times 35400 \times 5 = 885$ cm^3 (mierzone pod ciśnieniem 1 atm.).

367) Gazometr napełniony powietrzem zgęszczonem wypróżnia się przez mały otworek w ścianie w przeciągu 117·6 *sek*; napełniony następnie gazem piorunującym wypróżnia się w przeciągu 75·6 *sek.* Obliczyć gęstość względną gazu piorunującego, w porównaniu z powietrzem. *Odp.* $(75{\cdot}6)^2 : (117{\cdot}6)^2 = 0{\cdot}413$.

368) Obliczyć prędkość przeciągu w kominie, mającym wysokość 20 *m*, przyjąwszy 0·9 jako stosunek gęstości ciepłego powietrza w kominie do gęstości powietrza otaczającego i pomijając opory tarcia. *Odp.* 6·6 *m/sek.*

369) Zbiornik o pojemności 2 litrów połączony jest z pompą pneumatyczną, ciągle działającą, która wyciąga na sekundę $\frac{1}{4}$ zawartości, jaka się w zbiorniku znajduje. Obliczyć granicę, do której zniży się ciśnienie w zbiorniku, jeżeli w ścianie jego znajduje się otworek o polu $^1/_{20}$ mm^2. (Przyjąć ciśnienie zewnętrzne 76 *cm rt*; spółczynnik dla zwężenia żyły $= 0{\cdot}5$).

Odp. Granica będzie osiągnięta, gdy pompa odbiera ze zbiornika tyle powietrza, ile jednocześnie dopływa przez otworek. Ciśnienie w zbiorniku wynosi wówczas stale *p cm rt.* Ciężar powietrza w zbiorniku =

$\frac{1}{A}(p \times 13{\cdot}59 \times 2000)\,gr$; pompa zabiera na sekundę $\frac{1}{5A}(p \times 13{\cdot}59 \times$ $\times\, 2000)\,gr$; otworkiem dopływa:

$$0{\cdot}5 \times {}^1/_{2000} \times \sqrt{2Ag\left(1-\frac{p}{76}\right)} \times \frac{76 \times 13{\cdot}59}{A}\,gr.$$

Z porównania tych wyrażeń wynika: $p = 1{\cdot}88$ *cm rt.*

ROZDZIAŁ XIII.

O ruchu fal w ciałach sprężystych.

188. Fale podłużne, kuliste. Ciało sprężyste, odkształcone w jakikolwiek sposób, pozostaje dopóty w równowadze, dopóki na nie działają siły zewnętrzne, które odkształcenie wywołały. Siły sprężyste, wzbudzone w ciele przez odkształcenie, są wówczas zrównoważone przez siły zewnętrzne. Skoro te ostatnie usuniemy, natenczas siły sprężyste, niezrównoważone, wprowadzą części ciała odkształconego w ruch. Zależnie od kształtu ciała i rodzaju odkształcenia powstają wtenczas ruchy falowe, albo ruchy drgające. W rozdziale niniejszym będziemy mówili o pierwszych.

Ryc. 158.

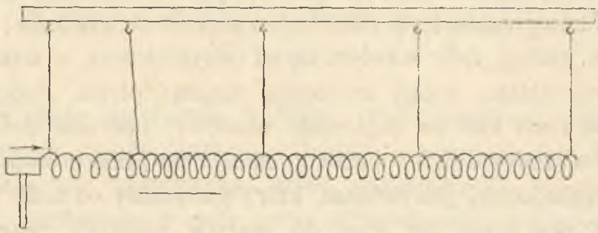
Zajmiemy się naprzód ruchami falowymi w cieczach i w gazach, które jak wiadomo są sprężyste, lecz tylko na odkształcenia objętości, t. j. na zgęszczenia lub rozrzedzenia.

Wyobraźmy sobie rozległą masę ciekłą lub gazową, w której wnętrzu znajduje się kula A (ryc. 158). Przypuśćmy, że kula ta rozszerza się nagle, w taki sposób, iż środek jej pozostaje w pierwotnem miejscu, a promień zwiększa się nagle o pewną nie wielką długość. Nagłe rozszerzenie się kuli działać będzie na otaczający płyn jakgdyby uderzenie, albo wstrząśnienie, wychodzące z całej jej powierzchni. W pierwszej chwili udzieli się ono warstwom przylegającym bezpośrednio do powierzchni. Warstwy te znajdują się podczas uderzenia jakoby między młotem a kowadłem: młotem jest kula rozszerzająca się nagle; znaczenie kowadła mają dalsze, bardziej od kuli odległe warstwy, które wobec nagłości popędu nie ustępują odrazu, lecz wskutek bezwładności swej przeciwstawiają uderzeniu przemijający opór (ust. 46). Dzięki temu objawowi bezwładności cząstki płynu otaczające kulę ulegają dwojakiej zmianie: *a*) zgęszczają się, *b*) zostają potrącone t. j. nabywają prędkości w kierunku promienia kuli.

Jasną jest rzeczą, że zgęszczenie to warstw otaczających kulę nie może utrzymywać się trwale, gdyż od strony zewnętrznej nie są one niczem ogrodzone. Płyn jest sprężysty, zgęszczenie wzbudza w nim oddziaływanie sprężyste, t. j. zwiększenie ciśnienia; warstwy zgęszczone usiłują tedy uwolnić się od odkształcenia, a wskutek tego działają na dalsze, dotąd swobodne cząstki płynu. Podobnie jak z początku ruch kuli na najbliższe warstwy, tak one działają następnie na warstwy dalsze: zarówno ciśnieniem jakie powstało w nich wskutek zgęszczenia, jak ruchem, który otrzymały od kuli. Zgęszczenie i ruch przenoszą się więc do warstw dalszych, warstwy zaś uderzone pierwotnie uwalniają się od odkształcenia, a zarazem tracą ruch, gdyż prędkości ich zostały zniesione przez opór sprężysty warstw dalszych.

Zaburzenie równowagi ciała sprężystego, wywołane wybuchem kuli, przenosi się w ten sposób z biegiem czasu do cząstek coraz bardziej oddalonych od miejsca, w którem powstało. Rozszerza się ono pod postacią kuli *Bb*, o promieniu ciągle rosnącym. Przebieg zjawiska tego jest podobny do rozszerzania się kręgów na powierzchni stawu, gdy do wody wrzucimy kamień; albo do rozszerzania się wstrząśnień ziemi, które również z jednego środka wychodzą, a obejmują stopniowo całe otoczenie. Każda cząstka ciała pozostaje w spoczynku, dopóki wstrząśnienie jej nie dosięgnie; następnie oddaje ona wstrząśnienie cząstkom dalszym i wraca znowu do spoczynku. Zaburzenie równowagi ciała sprężystego, opisane wyżej, polega na tem, iż cząstki, których ono dosięgnie, zostają na czas niejaki odkształcone a jednocześnie otrzymują przemijający ruch. Zaburzenie tego rodzaju nazywa się falą; przenoszenie się jego z cząstki do cząstki zowiemy ruchem fali. Nazwę tę przyjęto z powodu podobieństwa do fal na powierzchni wody; oba zjawiska podlegają rozchodzeniu się wstrząśnień, w taki sposób, iż cząstki ciała, w którem fala się rozprzestrzenia, przewodnika fali, nie oddalają się wiele od miejsc, które zajmują w stanie równowagi. Ruch postępowy, właściwy falom polega na posuwaniu się pewnego stanu materyi, a nie materyi samej. Fale sprężyste różnią się od fal na powierzchni cieczy tem, że postępują we wnętrzu ciał i rozprzestrzeniają się wogóle na wszystkie strony; powstawanie i przewodzenie ich odbywa się za sprawą bezwładności i sprężystości, gdy fale na wodzie powstają wskutek działania bezwładności i ciężkości.

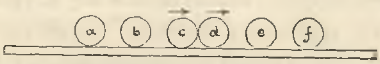
Falę pojedynczą kulistą, możemy wywołać w powietrzu, wydymając bańkę mydlaną gazem piorunującym; skoro zbliżymy gorejącą zapałkę, następuje przy silnym wybuchu nagłe zwiększenie



Ryc. 159.

objętości, bańka działa na otaczające powietrze zupełnie tak, jak to wyżej przedstawiliśmy. Gdy fala wywołana w powietrzu dojdzie do ucha, wtenczas dopiero usłyszymy huk.

Doświadczalne uwidocznienie fali kulistej byłoby trudne; falę natomiast postępującą w jednym kierunku można dobrze objaśnić za pomocą t. zw. machiny falowej. Długa sprężyna spiralna



Ryc. 160.

(ryc. 159) z drutu sprężystego, zawieszona jest swobodnie na sznurkach. Jeżeli jeden jej koniec uderzymy młotkiem, wówczas, wskutek bezwładnego oporu masy całej sprężyny, ściśniemy tylko kilka skrętów sprężyny w pobliżu końca uderzonego. Następnie dostrzeżemy, że zgęszczenie to biegnie wzdłuż całej sprężyny aż do drugiego końca. Skręty, przez które już fala przeszła, wracają do pierwotnego położenia i tracą ruch zupełnie.

Aby objaśnić zjawisko, że cząstki ciała sprężystego oddają po przejściu fali cząstkom sąsiednim nietylko zgęszczenie ale i ruch jaki posiadały, możemy użyć przyrządu przedstawionego na ryc. 160. W gładkiej, poziomej rynience ustawiamy szereg kul sprężystych (z kości słoniowej) jednakowej wielkości i masy, w taki sposób, żeby między kulami zostały niewielkie, równe odstępy. Jeżeli przez potrącenie lub uderzenie, wprowadzimy pierwszą kulę *a* w ruch, wtenczas uderzy ona z pewną prędkością kulę *b*. W ciągu uderzenia prędkość kuli *a* zostaje całkowicie zniesioną, przez sprężysty i bezwładny opór kuli uderzonej (ust. 53); jednocześnie kula *b* nabywa takiej prędkości, jaką miała kula *a* i porusza się naprzód aż do uderzenia o kulę *c* i t. d. W ten sposób ruch przenosi się z kuli na kulę; każda z nich traci po uderzeniu ruch, a dopiero ostatnia, nie spotykając oporu, potoczy się dalej.

Fala w płynie sprężystym, której powstanie i przewodzenie było wyżej opisane, polegała na zgęszczeniu materyi. Zrozumiemy teraz z łatwością, że w podobny sposób może powstawać i rozprzestrzeniać się w płynie fala polegająca na rozrzedzeniu. Dość wyobrazić sobie, że kula *A* (ryc. 158) nagle się kurczy; cząstki płynu, przylegające do niej, poruszą się wskutek tego ku środkowi a materya w najbliższem jej otoczeniu zostanie rozrzedzoną. Wskutek rozrzedzenia zmniejszy się ciśnienie w przyległych do kuli warstwach, a zaburzenie równowagi, polegające tym razem na rozrzedzeniu, rozprzestrzeniać się będzie od środka na zewnątrz, jako fala kulista rozrzedzona. Zjawisko to można również okazać na machinie falowej (ryc. 159), jeżeli jeden z końców sprężyny pociągniemy szybko na zewnątrz; wzdłuż sprężyny przebiegnie wtenczas fala uwidoczniona rozszerzeniem skrętów.

Pomiędzy rodzajem odkształcenia, a kierunkiem prędkości cząstek wstrząśnionych przez falę, istnieje stały, niezmienny związek: *cząstki, przez które przechodzi fala zgęszczenia, nabywają prędkości w kierunku ruchu fali*; *fala natomiast rozrzedzenia potrąca cząstki w kierunku przeciwnym ruchowi fali.*

Fale polegające na przewodzeniu zgęszczeń albo rozrzedzeń nazywają się falami podłużnemi, albowiem cząstki ciała, przewodzącego fale tego rodzaju, poruszają się podłużnie, t. j. w tym samym kierunku jak fala, albo w przeciwnym.

189. Energia fal. Za pośrednictwem fal przewodzoną bywa energia ze źródła, w którem fale powstają, aż do najdalszych krańców przewodnika. Źródło wzbudzające fale wykonywa bowiem zawsze pracę; tak n. p. w przypadku, który rozważaliśmy w poprzedzającym ustępie, kula rozszerzająca się pracuje, albowiem rozszerząjąc się pokonywa bezwładny i sprężysty opór otaczającego płynu. Skutkiem pracy tej jest energia nagromadzona w fali pod postacią zgęszczenia i ruchu cząstek. Gdy fala przejdzie do dalszych cząstek, przechodzi z nią razem także ten zapas energii. Widzimy zatem, że przewodzenie fal jest przewodzeniem energii wśród materyi, która w ogólności nie zmienia przytem położenia swego w przestrzeni. Zważywszy, że zaburzenie, stanowiące falę, polega na odkształceniu, tudzież na ruchu cząstek, przyjdziemy do wniosku, że energia fali składa się z dwu części, mianowicie z energii potencyalnej i energii kinetycznej; pierwsza jest nagromadzona w tych cząstkach, które w uważanej chwili są zgęszczone lub rozrzedzone; druga zależy tylko od prędkości, które one posiadają.

190. Prędkość fal. Ruch fali należy odróżniać od ruchu cząstek poruszanych przez falę. Pierwszy jest ruchem pewnego stanu materyi, drugi zaś ruchem materyi samej. Gdy pod wpływem wiatru kłosy na łanie zboża poczną się kołysać, wtenczas dostrzedz można fale podobne do tych, jakie powstają na powierzchni wody. W tym przypadku szybki stosunkowo postęp fal daje się łatwo odróżnić od powolnego pochylania się kłosów.

Prędkość cząstek ciała sprężystego, w którem z jakiegokolwiek powodu powstają fale, bywa rozmaita, zależnie od wartości popędu udzielonego cząstkom przewodnika przez źródło fal. Tak n. p. wystrzał wprowadzi cząstki powietrza w szybszy ruch, wytworzy fale o większej energii, aniżeli słabe uderzenie młotka. Doświadczenie wskazuje natomiast, że prędkość samejże fali, w pewnem danem ciele sprężystem, jest zawsze ta sama, nie zależy ani od mocy wstrząśnienia, ani od ilości energii zawartej w fali. Jeżeli uważamy z daleka wystrzał z pistoletu i uderzenie młotka, to fala wywołana w powietrzu wymaga w obu przypadkach tego samego czasu, aby przebiedz od źródła wstrząśnienia do ucha, w którem sprawia wrażenie głosu. *Fale w ciałach sprężystych poruszają się jednostajnie, z prędkością zależną tylko od własności przewodnika fal.* Jedynemi własnościami tego przewodnika, które mają w tej mierze wpływ są sprężystość i bezwładność. Widzieliśmy bowiem, że dynamiczne wytłumaczenie postępu fal opiera się tylko na tych dwu własnościach; energia fali jest również w swej części potencyalnej zależną tylko od sprężystości, w części kinetycznej od masy t. j. od bezwładności przewodnika. Niżej dowiedziemy szczegółowo, że prędkość fal, którą oznaczać będziemy przez c, zależy w istocie tylko od spółczynnika sprężystości, w tym rodzaju odkształcenia, jakie fala wywołuje, i od gęstości przewodnika. Zależność ta wyraża się zawsze wzorem następującego kształtu:

$$c = \sqrt{\frac{\text{spółczynnik sprężystości}}{\text{gęstość}}}.$$

191. Długość fali. Wróćmy do przypadku kuli rozszerzającej się, albo kurczącej się, we wnętrzu płynu sprężystego (ryc. 158). Przypuśćmy, że rozszerzanie albo kurczenie się kuli odbyło się w ciągu pewnego krótkiego czasu T. Powierzchnia kulista staje się źródłem fali zaraz z początkiem czasu T, skoro tylko ruch jej się rozpocznie. Początkowe to zaburzenie równowagi oddala się niezwłocznie od kuli z prędkością fal c; to samo dzieje się z dalszemi fazami zgęszczenia podczas całego czasu T. Przy końcu tego okresu, pierwsze ślady zgęszczenia (a, ryc. 158), stanowiące przód, czyli czoło fali, oddaliły się już od kuli na odległość:

$$\lambda = cT;$$

jednocześnie ostatnia faza zaburzenia A oddziela się właśnie od kuli. Widzimy zatem, że grubość warstwy $Aa = \lambda$, w której zaburzenie równowagi istnieje, zwana d ł u g o ś c i ą f a l i, zależy tylko od czasu trwania (T) pierwotnego zaburzenia i od prędkości przewodzenia fal (c) w danym płynie. Dalekość przesunięcia się powierzchni kuli (amplituda jej ruchu) nie ma wpływu na długość fali λ. *Od tej amplitudy natomiast zależy energia fali*; im więcej kula rozszerza się, albo kurczy, w przeciągu czasu T, tem większą wykonywa pracę, tem większa prędkość i zgęszczenie udziela się cząstkom otaczającego płynu, tem większa ilość energii gromadzi się w fali.

Podczas postępu fali, n. p. w położeniu Bb, długość jej λ zostaje niezmienioną, zarówno bowiem czoło jej a, jak koniec A, oddalają się od źródła z tą samą prędkością c.

192. Fale peryodyczne, podłużne. Najważniejsze z tych zjawisk fizycznych, które objaśniają się ruchem fal — przewodzenie głosu i światła — wymagają, abyśmy zastanowili się nietylko nad ruchem fali pojedynczej, wzbudzonej jednorazowem wstrząśnieniem sprężystego przewodnika, lecz także nad ciągłem następstwem fal, jakie powstają, gdy wstrząśnienia powtarzają się peryodycznie t. j. w równych odstępach czasu. Wyobraźmy sobie, że kula *A* (ryc. 161), umieszczona w płynie sprężystym, naprzemian rozszerza się i kurczy, w taki sposób, iżby każdy punkt jej powierzchni (jak to wskazują na rysunku małe podwójne strzałki) wykonywał ruch peryodyczny, czyli drgający, tam i napowrót, w kierunku promienia. Zrozumiemy łatwo, że każde rozszerzenie się kuli wysyła falę zgęszczenia, każde skurczenie się falę rozrzedzenia. Z biegiem czasu płyn otaczający kulę drgającą zapełni się falami, w równych od siebie odstę-

Ryc. 161.

pach, z których jedne odbiegły już od źródła, inne dopiero powstają. Fale tego rodzaju, wywołane przez peryodyczne wstrząśnienia płynu, nazywają się falami peryodycznemi. Ustrój ich zależy ściśle od prawidła, według którego odbywa się ruch drgający źródła pobudzającego. Jeżeli źródło porusza się ruchem drgającym prostym, wtenczas fale rozchodzące się z tego źródła nazwiemy falami prostemi albo harmonicznemi.

Każde drgnienie kuli wzbudzającej fale peryodyczne składa się z dwu części: z ruchu powierzchni na zewnątrz, podczas rozszerzania się i z ruchu w przeciwnym kierunku, podczas kurczenia się kuli. Pierwszy wywołuje falę zgęszczenia, drugi falę rozrzedzenia. *Jedną całkowitą falą nazywać wszelako będziemy tę część zaburzenia, która powstaje podczas jednego całkowitego drgania* źródła fal:

tam i napowrót. Całkowita fala obejmuje więc w sobie zarówno część zgęszczoną jak i część rozrzedzoną. Oznaczmy okres drgania fal peryodycznych przez T, prędkość ich przez c. Zważywszy, że wstrząśnienia pojedyncze wychodzą ze źródła fal w równych odstępach czasu T, zrozumiemy, że w szeregu fal peryodycznych, utworzonych w płynie otaczającym, odstępy kolejnych zgęszczeń $z_1, z_2, z_3 \ldots$ albo kolejnych rozrzedzeń $r_1, r_2, r_3 \ldots$, będą jednakowe i równe:

$$\lambda = c T.$$

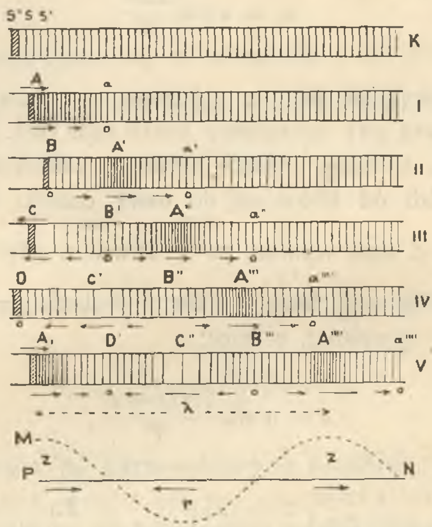
Odstęp ten, mierzony w kierunku postępu fali, stanowi, według przyjętej powszechnie nazwy, *długość jednej fali całkowitej*: *Długość fali równa się drodze, którą fala przebiega w ciągu czasu równego okresowi drgania.* Jako jedną falę możemy przeto uważać każdy odstęp takich dwóch sąsiednich miejsc, w których zgęszczenie ośrodka jest albo największe albo najmniejsze albo żadne. Wszystkie te odstępy są jednakowe i równe λ. Długość fali w tym samym przewodniku bywa rozmaita, zależnie od trwania okresu drgań T, albo od częstości $n = \frac{1}{T}$. Mamy bowiem $\lambda = cT = \frac{c}{n}$ t. j. drgania o większej częstości tworzą krótsze fale; ogólnie mówiąc: *długość fal w tym samym przewodniku jest odwrotnie proporcyonalna do częstości drgania.*

Zastanówmy się jeszcze nad prędkościami cząstek płynu, przewodzącego szereg fal peryodycznych. Wiemy już, że cząstki, przez które przechodzi zgęszczenie, poruszają się wówczas w kierunku fali, rozrzedzenie zaś nadaje im prędkość w kierunku przeciwnym (ust. 188). Podczas ruchu fal peryodycznych każda cząstka ulega naprzemian zgęszczeniu i rozrzedzeniu. Z tego wynika, że podczas ruchu fal peryodycznych, podłużnych, cząstki przewodnika odbywają ruchy drgające około stałych położeń równowagi, naśladując w tej mierze drganie źródła fal; linie na których cząstki drgają, leżą podłużnie, t. j. równolegle do kierunku postępu fal. Duże strzałki na ryc. 161 wskazują kierunki ruchu fal; małe wskazują kierunki prędkości cząstek przewodnika.

Fale kuliste, w rodzaju opisanych tu, powstają, ściśle biorąc tylko wtenczas, gdy źródłem drgającem jest kula, naprzemian rozszerzająca się i kurcząca. Ciała innego kształtu, n. p. dzwonek, drgający wskutek uderzenia i t. p., wzbudzają również fale w otaczającym płynie; fale te tuż obok dzwonka nie są kuliste, oddalając się jednak zaokrąglają się zarazem i przyjmują kształt niemal zupełnie kulisty. Podobne zjawisko spostrzegamy rzuciwszy do wody kamień postaci nieregularnej; fale tworzące się zaokrąglają się już w niewielkiej odległości od środka w prawidłowe kręgi.

Powierzchnią fali nazywamy powierzchnię przechodzącą przez te cząstki przewodnika, których ta sama fala dosięga jednocześnie. Każda z kul wyobrażonych na ryc. 161 jest powierzchnią fali, w ruchu, o którym mówiliśmy wyżej. Cząstki leżące na powierzchni tej samej fali są jednocześnie zgęszczone lub rozrzedzone; poruszają się jednocześnie naprzód lub wstecz, słowem znajdują się zawsze w jednakowych fazach ruchu.

193. Fale płaskie. Najważniejszemi z fal peryodycznych są fale proste czyli harmoniczne. Własności ich rozbierzemy nieco szczegółowiej na przykładzie fal podłużnych, płaskich. Jeżeli fale biegną ze źródła na wszystkie strony (ryc. 161), wtenczas powierzchnie fal są kulami. Fale płaskie powstaną natomiast wtenczas, gdy zmusimy je do postępowania w jednym tylko kierunku. Wyobraźmy sobie n. p. długą rurę SK (ryc. 162), napełnioną płynem sprężystym, dajmy na to powietrzem (kreski w równych odstępach oznaczają jednostajną gęstość płynu). U jednego końca rury umieszczamy tłok S i wprowadzamy go w ruch drgający prosty, w zakresie między S' a S''. Niechaj T oznacza okres jednego drgania, c prędkość fal w płynie. Dajmy na to, że tłok znajduje się z początku w S'', odchylony na lewo z położenia środkowego. Po upływie pierwszej ćwierci okresu T przechodzi on przez położenie środkowe A (ryc. 162, I) z największą prędkością, jaka w ruchu drgającym wogóle się zdarza; w ciągu pierwszej ćwierci okresu tłok zgęszczał przed sobą płyn, a fala zgęszczenia zajęła przestrzeń $Aa = c \, . \, \frac{T}{4}$. Po upływie drugiej ćwierci okresu dobiega on do skrajnego położenia po prawej (ryc. 162, II); prędkość jego równa się tutaj zeru. Płyn znajdujący się w tej chwili przed tłokiem nie będzie więc ani zgęszczony ani rozrzedzony: gęstość jego ma taką wartość, jak gdyby fal wcale nie było. Największe zgęszczenie, które było poprzednio w A, posunęło się obecnie do A' — fala zajęła część rury aż do warstwy a', której odległość od początku $Ba' = c \, . \, \frac{T}{2}$. W ciągu pozostałych dwu ćwierci okresu tłok porusza się na lewo, wzbudzając w płynie falę rozrzedzenia. Najsilniejsze rozrzedzenie powstaje wówczas, gdy tłok przechodzi powtórnie przez położenie środkowe, na lewo, C (ryc. 162, III). Gdy zaś po upływie całego okresu wróci do pierwotnego położenia, D (ryc. 162, IV), wtenczas znajdziemy w płynie jedną, całkowicie rozwiniętą falę. Ona sięga od D do a''' i posiada długość $\lambda = cT$. Fala ta postępuje wzdłuż rury już w ciągu tworzenia się i ustępuje miejsca następnej, powstającej w ciągu następnego drgnienia tłoka. Ryc. 162, V okazuje pierwszą falę już w położeniu



Ryc. 162.

$D'a''''$, tudzież początek A_1D' fali następnej. Każda z tych fal zawiera część zgęszczoną $B''a'''$ (IV), w której cząstki płynu mają prędkości skierowane w kierunku ruchu fal, tudzież część rozrzedzoną DB'', w której cząstki płynu poruszają się w kierunku przeciwnym. Części zgęszczone oddzielone są od rozrzedzonych warstwami (n. p. B'') o gęstości niezmienionej; warstwy te nie mają wcale prędkości, znajdują się chwilowo w spoczynku. Rozmieszczenie zgęszczeń i prędkości w obrębie jednej fali wyobraża wykreślnie linia falowa MN. Odległości różnych jej punktów od prostej PN są proporcyonalne do zgęszczeń, albo do prędkości różnych cząstek płynu.

Ruch, który tu opisaliśmy różni się od fal kulistych tem, że energia nie rozprasza się na wszystkie strony, lecz postępuje razem z falami w jednym tylko kierunku. Powierzchnie fal są widocznie płaszczyznami prostopadłemi do kierunku przewodzenia fal. Każda warstwa płynu naśladuje ruch tłoka tak co do rodzaju, jak i obszerności drgania. Ponieważ jednak przewodzenie fali wymaga czasu, przeto każda faza ruchu źródła fal udziela się pewnej cząstce płynu tem później, im bardziej cząstka ta oddalona jest od tłoka. Ruch drgający tłoka (źródła fal) przedstawia równanie:

$$s_0 = a \sin \frac{2\pi t}{T},$$

s_0 oznacza odchylenie jego z położenia środkowego po upływie czasu t, od chwili gdy zaczęliśmy liczyć czas (ust. 22). Jeżeli zwrócimy uwagę na dowolną cząstkę płynu, w odległości x od tłoka, to przewodzenie fali od tłoka aż do owej cząstki wymagać będzie czasu: $\tau = \frac{x}{c}$. Z tego wynika, że w chwili t, gdy odchylenie tłoka jest s_0, cząstka ta mieć będzie takie odchylenie $= s$, jakie tłok posiadał o czas τ wcześniej, a więc:

$$s = a \sin \frac{2\pi (t - \tau)}{T},$$

albo:

$$s = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{cT}\right) = a \sin \frac{2\pi}{cT} (ct - x).$$

Zważywszy, że iloczyn cT równy jest długości fali $= \lambda$, możemy też napisać:

$$(1) \qquad s = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

albo:

$$s = a \sin \frac{2\pi}{\lambda} (ct - x).$$

Każda cząstka płynu porusza się więc tak samo jak źródło fal; między ruchami tymi istnieje jednak różnica faz, proporcyonalna do odległości x. Za pomocą równania (1) możemy obliczyć odchylenie którejkolwiek cząstki przewodnika w dowolnej chwili; ono określa w zupełności ruch fal płaskich, harmonicznych, nazywa się przeto równaniem tych fal.

W podobny sposób jak odchylenie, można obliczyć prędkość v ruchu drgającego tej cząstki przewodnika, której odległość od źródła fal oznaczyliśmy przez x. Niechaj v_0 oznacza prędkość tłoka w chwili t, natenczas podług ust. 24 (1) mamy:

$$v_0 = \frac{2a\pi}{T} \cos \frac{2\pi t}{T}.$$

Cząstka znajdująca się w odległości x od źródła uzyska tę prędkość dopiero po upływie czasu $\tau = \frac{x}{c}$; zatem w czasie t prędkość jej wynosi:

$$v = \frac{2a\pi}{T} \cos \frac{2\pi(t-\tau)}{T},$$

czyli: $v = \frac{2a\pi}{T} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$, albo:

(2) $$v = \frac{2a\pi}{T} \cos \frac{2\pi}{\lambda}(ct - x).$$

194. Energia fal harmonicznych płaskich. Energia fal płaskich, jak wszelkich wogóle fal, jest po części kinetyczna, po części potencyalna. Zwróćmy uwagę na jedną cząstkę przewodnika, mającą masę m. Gdy fale harmoniczne przechodzą kolejno, jedna za drugą, przez tę cząstkę, wykonywa ona ruchy, które ze wszech miar można porównać z ruchami wahadła, drgającego około stałego położenia równowagi. W chwili przejścia przez położenie równowagi cząstka posiada największą prędkość, największą energię kinetyczną; w chwili gdy odchylenie jej równa się amplitudzie drgania a, prędkość jej jest równa zeru, lecz posiada ona natomiast największą energię potencyalną. W ten sposób energia cząstki przeobraża się stopniowo, podczas każdego drgnienia, z formy kinetycznej w potencyalną i na odwrót. Całkowita jej energia (t. j. suma kinetycznej i potencyalnej) jest jednakowoż ciągle jednakowa. Źródło fal przesyła wprawdzie cząstce drgającej nieustannie świeże zapasy energii, lecz one zostają natychmiast oddane w całości cząstkom następnym, o czem świadczy to, że ruch cząstki uważanej wcale się nie zmienia.

Otóż w chwili przejścia przez położenie równowagi prędkość cząstki posiada wartość: $V = \frac{2a\pi}{T}$ (ust. poprz.). Energia jej jest wtenczas całkowicie kinetyczna, a wartością jej jest:

$$\tfrac{1}{2} m V^2 = \frac{2\pi^2 m}{T^2} \cdot a^2.$$

W szeregu fal płaskich, harmonicznych, wszystkie cząstki poruszają się jednakowo; mają jednakowe amplitudy i prędkości a różnią się tylko tem, że cząstki bliższe źródła zaczynają poruszać się wcześniej, aniżeli dalsze. Celem obliczenia energii, zawartej w przewodniku przewodzącym fale tego rodzaju, należy utworzyć sumę energii wszystkich cząstek; zważywszy, że V, a i T są wszystkim cząstkom wspólne, przekonamy się, że suma ta posiada wartość:

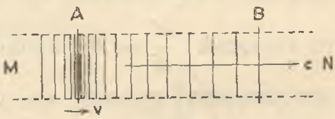
$$\tfrac{1}{2} V^2 \Sigma m. \text{ czyli: } \frac{2\pi^2}{T^2} a^2 \Sigma m.$$

Wnosimy stąd, że *energia zawarta w szeregu fal płaskich, harmonicznych, równa się energii kinetycznej, jakąby posiadał przewodnik fal, gdyby wszystkie cząstki jego, zajęte przez fale, poruszały się jednakowo, z prędkością równą największej prędkości ruchu drgającego.* W rzeczywistości energia ta nie jest w całości kinetyczną, lecz podzielona jest w równych częściach na kinetyczną i potencyalną.

Jeżeli w tym samym przewodniku powstają raz fale słabsze, innym razem silniejsze, o tym samym okresie, wtenczas, jak okazuje ostatni wzór, energie ich mają się do siebie jak kwadraty amplitudy ruchu drgającego.

Energia jest z falami ściśle związana i postępuje naprzód razem z niemi. Gdybyśmy położyli w myśli płaszczyznę, na poprzek rury prowadzącej fale płaskie peryodyczne (ryc. 162), natenczas przez przekrój ten przechodziłaby nieustannie energia, przesyłana ze źródła fal do dalszych cząstek przewodnika. *Ilość energii przesłanej przez przekrój, w ciągu pewnego czasu,* stosownie do poprzedzających uwag, *jest proporcyonalna do pola przekroju, do kwadratu amplitudy drgania i do czasu,* w ciągu którego uważamy przejście fal.

195. Obliczenie prędkości fal podłużnych w płynach. Wspomnieliśmy już, że prędkość fal c w ciałach sprężystych zależy od sprężystości i gęstości przewodnika, a nie zależy od rodzaju, ani od wielkości wstrząśnień wywołujących falę. Dowiedziemy tego w niniejszym ustępie, a zarazem okażemy, że twierdzenie powyższe stosuje się ściśle tylko do takich fal, które sprawiają bardzo małe odkształcenia cząstek przewodnika, a więc do wstrząśnień słabych. Weźmy pod uwagę fale płaskie w płynie o gęstości *d*. *MN* (ryc. 163) wyobraża część płynu ujętego n. p. w rurę. Dajmy na to, że w płynie tym postępuje fala zgęszczenia, płaska, od *M* ku *N*, z prędkością *c*. Zwróćmy uwagę na część tej fali, między płaszczyznami *A* i *B*. W *A* znajduje się zgęszczenie; wskutek tego cząstki płynu posiadają tu pewną prędkość *v* w kierunku od *M* ku *N*. Płaszczyznę *B* natomiast poprowadźmy przez te cząstki, w których niema już zgęszczenia; cząstki te posiadają więc w danej chwili prędkość $= o$.



Ryc. 163.

Gęstość w płaszczyznie *B* równa się pierwotnej gęstości płynu *d*; gęstość w *A* jest większa, wartością jej jest dajmy na to: $d + d'$,

Mówiąc o prędkości *c* fal w płynie, rozumiemy, że płyn sam jest nieruchomy, t. j. że cząstki jego nie mają osobnego ruchu, oprócz drobnych wstrząśnień spowodowanych przez fale. Gdyby płyn był w ruchu, gdyby n. p. płynął strumieniem od *M* ku *N*, wówczas unosiłby on fale ze sobą. Prędkość fal w przestrzeni byłaby w tym razie większa, aniżeli w płynie nieruchomym, mianowicie byłaby równa sumie prędkości *c* i prędkości samego płynu. Fale wzbudzone w powietrzu, przez wystrzał, uderzenie i t. p. idą z wiatrem prędzej, aniżeli naprzeciw wiatru. Naodwrót, jeżeli płyn porusza się w kierunku przeciwnym postępowi fal, wówczas prędkość ich w przestrzeni będzie zmniejszona o prędkość samego płynu. Wyobraźmy sobie, że płyn porusza się jednostajnie od *N* ku *M*, t. j. w kierunku przeciwnym ruchowi fal, tudzież, że prędkość tego ruchu równa się prędkości *c*, jaką fale miałyby w płynie nieruchomym. W tych warunkach fala *AB* będzie w przestrzeni unieruchomioną, a płyn będzie przepływał nawskroś przez nią od *B* ku *A*.

Ten stan rzeczy weźmiemy pod uwagę, celem obliczenia prędkości c. Zważywszy, że fala jest w tych warunkach niejako ustalona w przestrzeni, między przekrojami A i B, zrozumiemy łatwo, że masa płynu wstępującego w ciągu pewnego czasu w przestrzeń między B i A równa jest masie, która wypływa jednocześnie na zewnątrz przez przekrój A; albowiem w obrębie fali AB rozmieszczenie zgęszczeń jest ciągle jednakowe, przeto też ilość materyi między B i A jest stała. Masa wstępująca w ciągu jednostki czasu, przez jednostkę pola płaszczyzny B, równa się iloczynowi cd, albowiem d oznacza tu gęstość płynu, c jego prędkość. W płaszczyznie A płyn posiada gęstość $d+d'$, tudzież prędkość $c-v$; przez jednostkę pola płaszczyzny tej wychodzi tedy w jednostce czasu masa $(c-v)(d+d')$. Stąd równanie:

$$cd = (c-v)(d+d'), \text{ czyli: } v = \frac{cd'}{d+d'}.$$

Wprowadźmy tu stosunek $\frac{d'}{d} = \theta$, oznaczający zgęszczenie (ust. 129, stosunek zwiększenia gęstości do gęstości pierwotnej) a uzyskamy równanie: $v = \frac{c\theta}{1+\theta}$.

Otóż, jeżeli zmiany gęstości płynu, sprawione przez fale, są tak małe, iż zgęszczenie θ jest bardzo małym ułamkiem, w porównaniu z jednością, wtenczas można opuścić θ w mianowniku powyższego ułamka, poczem zostanie: $v = c\theta$.

Równanie to potwierdza, co już wyżej zauważyliśmy, że prędkości cząstek poruszanych przez fale, są proporcyonalne do (małych) zgęszczeń, (lub rozrzedzeń, gdy θ ujemne) tych samych cząstek.

Zauważymy dalej, że płyn wychodzi z płaszczyzny A z prędkością $c-v$, a więc z mniejszą prędkością, aniżeli płyn wstępujący w B. Zmniejszenie prędkości tłumaczy się tem, że ciśnienie płynu w przekroju A, wskutek panującego tam zgęszczenia, jest większe, aniżeli ciśnienie w B. Dajmy na to, że sprężystość uważanego płynu jest taka, iż poddany zgęszczeniu θ, powiększa ciśnienie o p. Ciśnienie w A będzie wskutek tego o p większe, aniżeli ciśnienie w B; w przekroju B, gdzie zgęszczenia niema, panuje ciśnienie pierwotne, t. j. ciśnienie, jakie płyn posiada, gdy fal niema. Okazaliśmy pierwej, że w ciągu jednostki czasu, przez obie płaszczyzny A i B, przepływa masa cd; masa ta wstępuje w B z prędkością c, wychodzi z A z prędkością $c-v$. Podczas jednostki czasu masa cd traci pęd

cdv. Zmniejszenie pędu jest skutkiem nadwyżki ciśnienia (p) od strony A. Zważywszy, że zmiana pędu, przypadająca na jednostkę czasu, równa się sile działającej (ust. 39), mamy:

$$p = cdv.$$

Ponieważ $v = c\theta$, przeto będzie:

$$p = c^2 d\theta, \text{ czyli: } c^2 d = \frac{p}{\theta}.$$

Stosunek $\frac{p}{\theta}$ równa się atoli spółczynnikowi sprężystości objętościowej (spółczynnikowi ściśliwości) płynu (ust. 155 i 181), który oznaczaliśmy znakiem σ.

Otrzymujemy więc szukany wzór na prędkość fal podłużnych w płynach, pod postacią:

$$(1) \qquad c = \sqrt{\frac{\sigma}{d}}.$$

Tę samą postać posiadają wzory na prędkość fal wszelkiego rodzaju, jak to już nadmieniliśmy w ust. 190. Oto są dwa główne prawa odnoszące się do prędkości postępu fal:

1) *Fale w przewodnikach sprężystych, jednolitych, przewodzące bardzo małe drgania i odkształcenia, poruszają się z prędkością stałą, niezależną od wartości odkształcenia, ani od amplitudy drgań.*

2) *Prędkość fal zależy natomiast od rodzaju odkształceń i od gęstości przewodnika sprężystego; równa się mianowicie drugiemu pierwiastkowi z ilorazu spółczynnika sprężystości, przez gęstość przewodnika.*

Wzór powyższy (1) zastosujemy naprzód do obliczenia prędkości, z jaką szybkie ale małe wstrząśnienia (n. p. głos) bywają przewodzone w wodzie. Spółczynnik ściśliwości wody w temp. 15^0 posiada wartość (ust. 155): $\sigma = 21{\cdot}9 \times 10^6$ *Gr/cm*^{2}, czyli: $21{\cdot}9 \times 981 \times 10^6$ *dyn/cm*^{2}; gęstość wody d, w miarach układu bezwzględnego, równa się 1 *gr/cm*^{3}; stąd:

$$c = \sqrt{\frac{21{\cdot}9 \times 981 \times 10^6}{1}} = 146600 \; cm/sek.,$$

t. j. około półtora kilometra na sekundę. Bezpośrednie pomiary prędkości tej, wykonane przez Colladona i Sturma w jeziorze genewskiem, dały wynik niewiele od tego różny (1435 *m/sek*).

Spółczynnik ściśliwości gazów, dla małych zgęszczeń lub rozrzedzeń, równa się ciśnieniu p, panującemu w gazie przed odkształceniem (ust. 181). Wartość tę posiada jednak spółczynnik σ tylko wtenczas, gdy temperatura gazu jest stała. Przy szybkich zmianach gęstości, jakie towarzyszą falom wywołanym przez nagłe wstrząśnienia, n. p. głos i t. p., warunek ten nie jest dopełniony; gaz zgęszczony nagle ogrzewa się, rozrzedzony ostyga. Zmiany temperatury towarzyszące tym odkształceniom czynią gaz trudniej ściśliwym. W nauce o cieple dowiedziemy, że spółczynnik σ nie równa się w tym razie p, lecz kp, gdzie k jest pewną liczbą, zależną od rodzaju gazu. Jeżeli ściśniemy n. p. powietrze tak nagle, żeby rozgrzanie towarzyszące zgęszczaniu nie miało czasu ustąpić, wówczas znajdziemy, że ono jest 1·405 razy trudniej ściśliwe, aniżeli przy powolnem zgęszczaniu, gdy temperatura wyrównywa się przez odpływ ciepła; w tym razie jest: $\sigma = 1{\cdot}405\, p$.

Prędkość fal podłużnych w powietrzu oblicza się więc według wzoru:

$$c = \sqrt{\frac{1{\cdot}405\, p}{d}}.$$

Według prawa Boylego stosunek ciśnienia do gęstości gazu posiada (ust 180) wartość:

$$\frac{p}{d} = A \,.\, g = g A_0 \left(1 + \frac{t}{273}\right).$$

We wzorze tym t oznacza temperaturę[1]) powietrza, zaś $A_0 = 7990\, m$ wysokość atmosfery jednolitej dla powietrza suchego (ust. 180). Podstawiwszy wartości te we wzorze na prędkość fal znajdziemy:

$$c = \sqrt{1{\cdot}405 \times 7990 \times \left(1 + \frac{t}{273}\right) \times 9{\cdot}81} = 332 \sqrt{1 + \frac{t}{273}}\ m/sek.$$

[1]) Zgęszczenia i rozrzedzenia podnoszą naprzemian i zniżają temperaturę powietrza o małe wielkości; t oznacza tu temperaturę średnią, jaką ono posiada, gdy fal nie ma wcale.

W powietrzu suchem, w temperaturze 0^0, wszelkie fale poruszają się więc z prędkością 332 *m/sek*; w temperaturze 15^0 znajdziemy około 341 *m/sek*. Ten wynik teoryi był również wielokrotnie sprawdzany. Wystrzały armatnie i inne wstrząśnienia i głosy bywają istotnie przewodzone jako fale w powietrzu, z prędkością wyżej obliczoną. Stosunek $\frac{p}{d}$ ciśnienia do gęstości gazu jest liczbą stałą, zależną tylko od temperatury; z tego wynika, iż *prędkość fal w gazach, w danej temperaturze, nie zależy wcale od ciśnienia, ani od gęstości gazu*, t. j. wartość jej w gazie zgęszczonym jest ta sama jak w rozrzedzonym. *Podwyższenie temperatury powiększa jednak prędkość fal.*

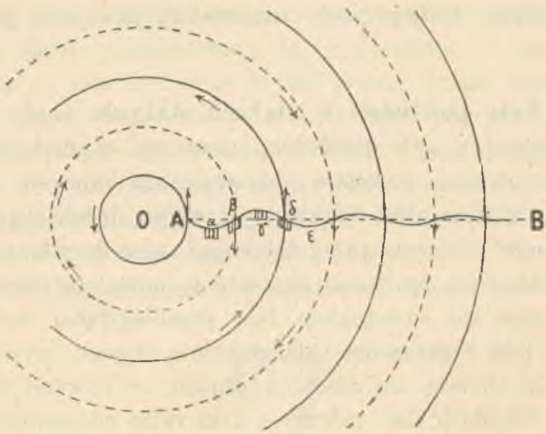
196. Fale podłużne w ciałach stałych. Ciała stałe mogą również przewodzić fale podłużne, albowiem w ciałach tych, podobnie jak w płynach, powstają oddziaływania sprężyste, gdy cząstki ich zostaną zbliżone albo oddalone od siebie. Jeżeli n. p. uderzymy młotkiem koniec długiego pręta żelaznego, albo drewnianego, w kierunku jego długości, wówczas zgęszczenie udzielone pierwotnie końcowi pręta staje się zawiązkiem fali, przebiegającej wzdłuż pręta, jako płaska fala zgęszczenia. Odkształcenia cząstek, wywołane przez ten rodzaj fal, należą do rzędu wydłużeń, o których była mowa w ust. 144. Prędkość fali zależy w tym razie od gęstości pręta i od spółczynnika sprężystości ε na wydłużenie. Wzór na prędkość c przyjmuje kształt:

$$c = \sqrt{\frac{\varepsilon}{d}}.$$

Przyjąwszy n. p. dla żelaza $\varepsilon = 1900 \times 10^6 \times 981$ *dyn/cm*^{2}, $d = 7{\cdot}86$ *gr/cm*^{3}, znajdziemy: $c = 487000$ *cm/sek* $= 4{\cdot}9$ *km/sek*; prędkość fal jest więc 14 razy większa, aniżeli w powietrzu; z tą samą prędkością poruszają się także fale rozrzedzenia.

Bezpośrednie pomiary prędkości fal podłużnych (głosu) w prętach, dały następujące wyniki: drzewo dębowe przewodzi 11, jodłowe 18, ołów 4, srebro 8, miedź 11, żelazo 14, stal 15 razy prędzej niż powietrze.

197. Fale poprzeczne. Ciała stałe oddziaływają sposobem sprężystym nietylko na zgęszczenia lub rozrzedzenia, ale także na odkształcenia postaci, na skręcenia. Wskutek tego ciała stałe mogą przewodzić fale, w których nie ma wcale zmian gęstości, fale polegające jedynie na przewodzeniu skręceń. Fale tego rodzaju noszą nazwę fal poprzecznych, z powodu o którym będzie poniżej mowa. Celem objaśnienia ustroju fal tego rodzaju na jednym z najprostszych przykładów, wyobraźmy sobie ciało bardzo rozległe, sprężyste ale stałe, t. j. posiadające pewien stopień sztywności (n. p. wielką masę galarety) i pomyślmy, że w jego wnętrzu wklejona jest kula A (ryc. 164), mająca służyć jako źródło fal. Jeżeli kulę



Ryc. 164.

tę obrócimy nagle, n. p. około średnicy O, o kąt niewielki, wówczas warstwa najbliższa ciała sprężystego, przylegająca do kuli, zostanie odkształconą, a mianowicie ulegnie prostemu skręceniu; z jednej bowiem strony działa na nią kula, usiłując ją ubróćić n. p. na prawo, z drugiej strony oddziaływają, wskutek bezwładności, dalsze warstwy, w kierunku przeciwnym. Odkształcenie udzielone cząstkom przylegającym do kuli, staje się zawiązkiem fali, która przenosi wstrząśnienia i odkształcenia do warstw dalszych. Zjawisko to ma wiele podobieństwa do powstawania fal podłużnych (ust. 188). Tam jednak cząstki były potrącane przez kulę w kierunku promienia (podłużnie) — tu zaś, prostopadle do promienia (poprzecznie). Jeżeli będziemy kulę obracali naprzemian na prawo i na lewo, o małe kąty, nadając jej ruch obrotowo-drgający około średnicy O, wtenczas cząstki warstwy, otaczającej kulę będą odkształcały się naprzemian w obu kierunkach i staną się źródłem fal peryodycznych, udzielających się warstwom dalszym. Każda cząstka ciała, której dosięgnie jedna z tych fal skręcenia, zostaje odchyloną z położenia równowagi w kierunku prostopadłym do promienia łączącego ją ze środkiem kuli, a więc prostopadle do kierunku, w którym fale postępują; stąd pochodzi nazwa fal poprzecznych.

Zwróćmy uwagę na szereg cząstek, których miejscem równowagi jest promień *AB*. Po upływie pewnej liczby okresów drgania kuli, ciało sprężyste otaczające kulę zapełni się szeregiem fal kształtu kulistego. Cząstki, które w stanie równowagi leżały na promieniu *AB*, będą znajdowały się na linii falistej $A\alpha\beta\gamma\ldots$ Każda z nich drga w kierunku prostopadłym do *AB*. Ryc. 164 wyobraża stan ciała w chwili gdy kula, będąca źródłem fal, przechodzi przez położenie równowagi. Kula sama posiada wówczas największą prędkość i udziela największej prędkości sąsiednim cząstkom ciała. W tym samym kierunku jak kula porusza się także cząstka δ, odległa od kuli o jedną długość fali λ; cząstka ta otrzymuje teraz ruch, który wyszedł z kuli o jeden okres wcześniej. Cząstki α, γ, ε posiadają w uważanej chwili największe odchylenia bądź to w jedną, bądź w drugą stronę; prędkości ich w tych położeniach są równe zeru.

Wyobraźmy sobie na linii *AB* szereg cząstek w kształcie małych sześcianów, o krawędziach równoległych do *AB*. Na ryc. 164 narysowane są te sześciany podczas ruchu fal. W $\alpha, \gamma, \varepsilon,\ldots$ one są najbardziej odchylone z położeń równowagi, ale widocznie nie odkształcone wcale; w $\beta, \delta,\ldots$ znajdują się w położeniach równowagi, ale zarazem są najbardziej skręcone. Widzimy więc, że największe odkształcenie idzie w parze z największą prędkością drgania — podobnie jak w falach podłużnych.

E n e r g i a fal poprzecznych jest w części kinetyczna, w części potencyalna, ukryta w cząstkach odkształconych; podobnie jak w falach podłużnych jest ona proporcyonalna do kwadratu amplitudy drgań.

W miarę oddalania się od środka fale stają się coraz słabsze, albowiem energia zawarta w nich rozprzestrzenia się na coraz większe masy. Z tego powodu, w miarę jak fala oddala się od środka, grzbiety i doliny linii falowej stają się coraz płytszemi.

Można również wyobrazić sobie fale poprzeczne p ł a s k i e, postępujące w jednym tylko kierunku. W tym przypadku nie ma rozbieżności; energia przenosi się z cząstki na cząstkę bez rozprószenia amplituda drgań, wyobrażona przez wysokość grzbietów i dolin linii falowej jest stała (ryc. 15, 16, 20). Do tego przypadku stosuje się również równanie:

$$s = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

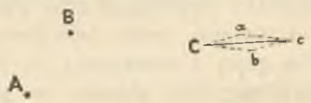
rozwinięte w ust. 193 dla fal płaskich podłużnych. Przez s należy tu rozumieć odchylenie poprzeczne, w chwili t, cząstki odległej o x od źródła fal. Twierdzenia odnoszące się do energii fal płaskich, podane w ust. 194, stosują się widocznie także do fal poprzecznych. Prędkość fal poprzecznych zależy od gęstości (d) przewodnika i od właściwego mu spółczynnika sprężystości postaci (ust. 136), t. j. od spółczynnika sztywności τ. Obliczamy ją za pomocą wzoru:

$$c = \sqrt{\frac{\tau}{d}}.$$

Fale poprzeczne odznaczają się nader wielką rozmaitością form; przewyższają one pod tym względem fale podłużne. Opisaliśmy wyżej najprostszą ich formę: fale kuliste, wywołane przez drgania obrotowe kuli około średnicy. Jest to rzeczą oczywistą, że w tym przypadku amplituda fal w kierunku tej średnicy jest zero. Największą wartość posiada ona w płaszczyznie równika. Wstrząsając kulę w jakikolwiek dowolny sposób możemy wywołać mnóstwo form fal poprzecznych. Jeżeli n. p. jeden z punktów powierzchni kuli wykonywa drgania koliste lub eliptyczne (ryc. 13, 24), podczas gdy środek kuli jest nieruchomy, wówczas cząstki przewodnika fal, leżące na odpowiednim promieniu, będą również wykonywały drgania podobnego rodzaju, w płaszczyznach prostopadłych do promienia. Źródłem fal poprzecznych może być zresztą ciało jakiejkolwiek postaci (niekuliste) wzbudzające podczas ruchu skręcenia w otaczających cząstkach przewodnika. W ogólności powstają wtenczas jednocześnie fale poprzeczne i podłużne; każdy z tych dwu układów fal porusza się niezależnie od drugiego, z właściwą sobie prędkością.

Nazwa fal poprzecznych nie ogranicza się wyłącznie do fal przewodzących skręcenia we wnętrzu ciał sprężystych. Każdy ruch falowy, odznaczający się tem, że odchylenia cząstek przewodnika są prostopadłe do kierunku przewodzenia fali, określamy nazwą fali poprzecznej. Tak n. p. fale na strunach, w części także na powierzchni cieczy (ryc. 177, 183), są falami poprzecznemi.

198. Prawo o składaniu małych odchyleń. Zrozumienie bardziej zawiłych ruchów falowych można częstokroć ułatwić, uważając je jako wypadkowe pewnej liczby ruchów prostszych. Okażemy tu naprzód jak się znajduje ruch wypadkowy, powstający ze zbiegu kilku ruchów falowych, istniejących jednocześnie w przewodniku sprężystym. Dajmy na to, że w *A* i *B* (ryc. 165) znajdują się jakiekolwiek źródła fal i zastanówmy się, jaki ruch mieć będzie pewna cząstka *C*, leżąca gdziekolwiek w przewodniku przewodzącym fale. Gdyby w przewodniku znajdowały się tylko fale pochodzące z *A*, natenczas punkt *C* otrzymałby w pewnej chwili odchylenie, dajmy na to *Ca*, a materya otaczająca ten punkt zostałaby w pewien sposób odkształconą. Podobnie, niech *Cb* oznacza odchylenie, któreby punkt *C* otrzymał w tejże chwili, gdyby w przewodniku istniały tylko fale pochodzące z *B*. Otóż, jeżeli oba te odchy-



Ryc. 165.

lenia i odkształcenia są bardzo małe, natenczas odchylenie punktu *C*, pod jednoczesnym wpływem obu szeregów fal, równać się będzie sumie geometrycznej odchyleń *Ca* i *Cb*. Fala pochodząca z *B* spotyka bowiem cząstkę *C* odchyloną i odkształconą jednocześnie przez falę *A*. Ponieważ jednak to odchylenie i odkształcenie jest bardzo małe, przeto możemy przyjąć, że ruch wzbudzony przez falę *B* będzie niemal zupełnie taki, jakgdyby materya około *C* nie była wcale odkształconą; innemi słowy: *w przewodniku przewodzącym jednocześnie kilka układów fal, pochodzących z różnych źródeł, każdy układ fal rozwija się tak, jak gdyby innych wcale nie było.* Objaśnimy to twierdzenie przykładem fal wzbudzonych na powierzchni wody, przez wrzucenie kamienia. Fale te mają postać zmarszczek kolistych, rozszerzających się około środka wstrząśnienia. Dajmy na to, że rzuciliśmy kamień nie w spokojną wodę, ale w wodę, po której ciągnie szereg fal większych, n. p. wzbudzonych przez wiatr. Zmarszczki koliste utworzą się i w tym razie i będą rozprzestrzeniały się na grzbietach i dolinach tamtych fal większych, tak samo, jakgdyby powierzchnia wody nie była wcale poruszoną; inaczej mówiąc, takie dwa układy fal, o ile są dość nizkie, wcale sobie nie przeszkadzają.

Zrozumiemy teraz bez trudności, że *odchylenie (tudzież prędkość) którejkolwiek cząstki ciała, przewodzącego jednocześnie kilka układów fal, jest sumą geometryczną odchyleń (albo prędkości), jakieby uważana cząstka otrzymała w tej samej chwili od tych układów, gdyby każdy z nich istniał z osobna.* Tak n. p. fala wychodząca z B (ryc. 165) sprawiłaby odchylenie Cb, gdyby fali drugiej nie było; jednakowoż cząstka C odchyla się jednocześnie do a, wskutek działania fal pochodzących z A. Niezależnie od tego odchylenia Ca, fale B sprawiają odchylenie ac, mające tę sama wartość i kierunek jak Cb, t. j. jakgdyby cząstka była przez nie odchylona bezpośrednio z położenia równowagi. Wypadkowe odchylenie będzie więc: $Cc = Ca + Cb$.

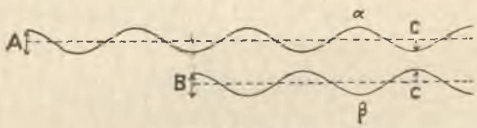
Godne uwagi są wnioski wynikające z tej własności fal w zastosowaniu do teoryi głosu lub światła. Jeżeli dwie osoby mówią jednocześnie, odróżniamy oddzielnie oba głosy i rozumiemy je, pomimo że one wstrząsają te same cząstki powietrza; fale głosowe w powietrzu,. pochodzące z jednego źródła, nie stoją wcale na przeszkodzie i nie zmieniają drugiego podobnego układu fal.

Jak dalece małemi powinny być odchylenia wywołane przez fale, aby prawo niezależności fal mogło być stosowane, to można ocenić w następujący sposób. Odchylenie Ca (ryc. 165), wzbudza siłę sprężystą, która usiłuje sprowadzić cząstkę napowrót do położenia równowagi wzdłuż aC, podobnie ma się rzecz z odchyleniami Cb i Cc. Dopóki one są tak małe, że prawo Hooke'a (ust. 134) może być zastosowane, to siła działająca wzdłuż Cc będzie wypadkową sił aC i bC. Odchylenia będą wtenczas równie niezależne, jak niezależnemi są siły (ust. 44).

199. Interferencya fal. Jeżeli w przewodniku istnieją jednocześnie dwa szeregi fal, a każdy z nich odchyla pewną cząstkę przewodnika w kierunku tej samej linii prostej, wtenczas te dwa układy będą się wzajemnie wzmacniały, albo osłabiały, zależnie od tego, czy odchylają uważaną cząstkę w tym samym kierunku, czy w kierunkach przeciwnych. Odchylenie wypadkowe cząstki równać się będzie sumie odchyleń składowych, jeżeli kierunki ich są jednakowe; w przeciwnym razie odchylenie wypadkowe będzie równe różnicy odchyleń składowych. Jest to proste następstwo prawa o składaniu małych ruchów, które poznaliśmy w ustępie poprzedzającym. Jeżeli odchylenia składowe mają kierunki przeciwne, a nadto są równe co do wielkości, wówczas odchylenie wypadkowe będzie zero.

Spoczynek cząstki, w której spotykają się dwa szeregi fal może być niekiedy **trwały**; to zdarza się gdy wszystkie fale wychodzące z uważanych dwu źródeł znoszą się wzajemnie przy spotkaniu się w danej cząstce, we wszystkich fazach drgań jakich jej udzielają. Zjawisko tego rodzaju nazywamy **interferencyą** fal.

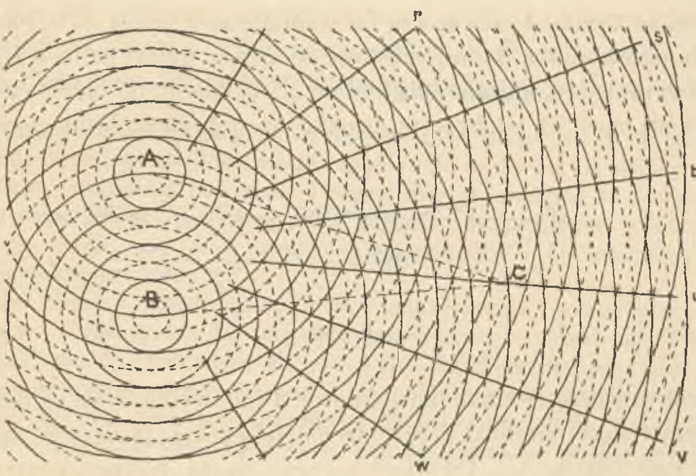
Weźmy n. p. pod uwagę dwa źródła fal A i B (ryc. 166), wykonywające ruchy drgające proste o okresach jednakowych. Fazy tych ruchów niech będą zgodne, t. j. przyjmujemy, że cząstki A i B przechodzą jednocześnie przez położenia równowagi, jednocześnie odchylają się do góry lub na dół i t. d. Linia falowa AC wyobraża szereg fal pochodzących ze źródła A; BC szereg fal wzbudzonych przez B. C oznacza cząstkę przewodnika, której odległość od B jest, dajmy na to, o $1\frac{1}{2}$ długości fali mniejsza, aniżeli odległość od A. W chwili, do której rysunek się odnosi, ruch A odchyla tę cząstkę na dół, ruch B do góry (dla



Ryc. 166.

większej jasności rysunku linie falowe A i B wyobrażone są osobno; w rzeczywistości kierunki przewodzenia fal spotykają się w położeniu równowagi cząstki C). Odchylenia te (o ile są równe) znoszą się wzajemnie. Po upływie połowy okresu drgania, grzbiet α fali pierwszej dosięgnie cząstki C jednocześnie z doliną β fali drugiej; one będą znowu znosiły się. Warunkiem trwałej interferencyi będzie widocznie to, żeby ruchy drgające, wzbudzone w uważanej cząstce przez oba układy fal, odbywały się *po tej samej linii*, *żeby amplitudy ich były równe*, *a fazy przeciwne* (ust. 25 a). Obadwa układy fal powinny być przeto *falami peryodycznemi prostemi*, *o równych okresach*. Przyjęliśmy tu, dla przykładu, że drogi, które fale przebywają od źródeł A i B, do pewnej cząstki C, różnią się $1\frac{1}{2}$ długości fali; nie trudno jednak znaleźć prawo określające ogólny warunek interferencyi. Wiadomo, że w ruchu drgającym prostym każda faza zamienia się po upływie połowy okresu na przeciwną; fala niesie każdą fazę drgania naprzód z prędkością c, właściwą postępowi fal. Którakolwiek faza drgania, wysłana przez źródło A, dosięgnie cząstki C po upływie czasu równego ilorazowi odległości

AC przez prędkość c. O pół okresu później uważana faza oddali się od C o $\frac{\lambda}{2}$, a miejsce jej w C zajmie faza przeciwna. Z tego wynika, że fale wychodzące z A i B spotykać się będą w C w fazach przeciwnych, *jeżeli czasy potrzebne do przebycia dróg AC i BC różnią się* o $\frac{1}{2}$ okresu, albo $1\frac{1}{2}$ okresu, albo $2\frac{1}{2}$ okresu i t. d., ogólnie mówiąc, o nieparzystą wielokrotność połowy okresu drgania. To jest ogólny warunek interferencyi dwu szeregów fal. Przytem jest rzeczą obojętną czy oba szeregi mają równe prędkości postępu i równe



Ryc. 167.

długości fal, czy nie. *Jeżeli prędkości obu szeregów są równe*, wtenczas warunek interferencyi możemy wyrazić inaczej (porów. zadanie 370). Zważywszy, że w przeciągu połowy okresu drgania jeden i drugi szereg posuwa się naprzód o połowę długości fali, możemy powiedzieć: *dwa szeregi fal, wychodzące ze źródeł mających fazy zgodne, znoszą się wzajemnie w tych cząstkach (C), w których drogi (AC i BC) przebyte przez oba szeregi różnią się o nieparzystą wielokrotność połowy długości fali.*

Weźmy n. p. pod uwagę dwa źródła A i B (ryc. 167), drgające prostopadle do płaszczyzny rysunku; na płaszczyznie tej rozprzestrzeniają się fale, wskutek których cząstki przewodnika drgają również prostopadle do tej płaszczyzny. Dajmy na to, że fazy punktów A i B i okresy drgań są jednakowe; kręgi nakreślone pełno oznaczają położenia grzbietów, kreskowane wyobrażają położenia dolin w pewnej chwili. Odległości dwu sąsiednich pełnych, albo dwu kreskowanych kręgów, są równe długości fali λ. W punkcie takim jak n. p. C, którego odległość od A jest o $\frac{\lambda}{2}$ większa, niż odległość od B, grzbiet fali jednego układu spotyka się z doliną drugiego; wogóle w punkcie tym spotykają się zawsze ruchy o fazach przeciwnych, a wskutek tego osłabiają się wzajemnie. Ściśle mówiąc, amplitudy obu ruchów, spotykających się w C, nie są równe, gdyż źródło B, jako bliższe, udziela punktowi C nieco silniejszych wstrząśnień niż A. Wszelako, jeżeli odległości CA i CB są dość znaczne, to drobna różnica $\frac{\lambda}{2}$ tych odległości (mająca wpływ główny na różnicę faz ruchów składowych) może być pominięta przy ocenieniu wartości amplitud. Przyjąwszy zatem, że amplitudy są prawie równe, przekonamy się, że w C istnieć będzie trwała interferencya fal. To samo odnosi się do wszystkich punktów na liniach $r, s, t, u \ldots$ W punktach natomiast leżących pośrodku pomiędzy owemi liniami, ruchy składowe spotykają się w fazach zgodnych; tam one wzmacniają się wzajemnie.

Zadania.

370) Odległości AC i BC (ryc. 166) oznaczamy przez x i y. Drgania obu źródeł fal wyrażone są przez to samo równanie:

$$s_0 = \sin\frac{2\pi t}{T}.$$

Przypuszczamy, że oba układy fal pobudzają cząstkę C do ruchu po tej samej linii. Obliczyć amplitudę ruchu wypadkowego w punkcie C, jeżeli amplitudy przesłane tam z A i B są: a_1 i a_2. Prędkość fal wychodzących z A oznaczamy przez c_1, prędkość drugiego szeregu przez c_2.

Odp. Fale pochodzące z A wywołują w C drgania według równania (ust. 193):

$$s_1 = a_1 \sin\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{c_1}\right);$$

fale pochodzące z B dają:

$$s_2 = a_2 \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{y}{c_2}\right);$$

Oznaczając przez s odchylenie w ruchu wypadkowym, mamy:

$$s = s_1 + s_2 = \sin \frac{2\pi t}{T}\left(a_1 \cos \frac{2\pi x}{\lambda_1} + a_2 \cos \frac{2\pi y}{\lambda_2}\right) -$$

$$- \cos \frac{2\pi t}{T}\left(a_1 \sin \frac{2\pi x}{\lambda_1} + a_2 \sin \frac{2\pi y}{\lambda_2}\right).$$

Wprowadźmy dwie nowe wielkości A i δ, określone równaniami:

$$A \cos \delta = a_1 \cos \frac{2\pi x}{\lambda_1} + a_2 \cos \frac{2\pi y}{\lambda_1};$$

$$A \sin \delta = a_1 \sin \frac{2\pi x}{\lambda_1} + a_2 \sin \frac{2\pi y}{\lambda_2}.$$

Wówczas będzie:

$$s = A \sin \left(\frac{2\pi t}{T} - \delta\right).$$

A oznacza amplitudę ruchu wypadkowego. Celem obliczenia jej dodajmy kwadraty dwu przedostatnich równań; otrzymamy:

$$A^2 = a^2{}_1 + a_2{}^2 + 2 a_1 a_2 \cos . 2\pi \left(\frac{x}{\lambda_1} - \frac{y}{\lambda_2}\right).$$

Iloraz $\frac{x}{\lambda_1}$ wskazuje liczbę fal o długości λ_1, przypadających na drogę x; iloraz ten wyraża więc ile okresów drgania fala potrzebuje do przebycia drogi x. Podobnie $\frac{y}{\lambda_2}$ wyraża liczbę okresów drgania, w ciągu których druga fala przebywa drogę y. Jeżeli te dwie liczby różnią się o jakąkolwiek liczbę całkowitą i, t. j. gdy jest:

$$\frac{x}{\lambda_1} - \frac{y}{\lambda_2} = i,$$

wówczas mamy $\cos 2\pi i = 1$, tudzież $A = a_1 + a_2$; jeśli zaś:

$$\frac{x}{\lambda_1} - \frac{y}{\lambda_2} = i + \tfrac{1}{2},$$

t. j. gdy czasy wspomniane różnią się o nieparzystą wielokrotność połowy okresu, wtenczas $\cos(2\pi i + \pi) = -1$, więc $A = a_1 - a_2$. Przyjąwszy nadto, że w tym drugim przypadku $a_1 = a_2$, uzyskamy znane warunki interferencyi. Jeżeli prędkości c_1 i c_2 są równe, więc także $\lambda_1 = \lambda_2$, wtenczas warunek interferencyi:

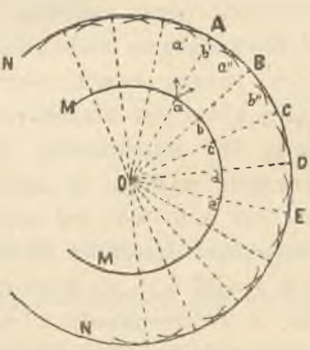
$$\frac{x}{\lambda_1} - \frac{y}{\lambda_2} = i + \tfrac{1}{2}$$

przyjmie kształt:

$$x - y = i\lambda + \frac{\lambda}{2} = (2i+1)\frac{\lambda}{2},$$

w czem λ oznacza długość fali, wspólną obu szeregom.

200. Sposób Huygensa. Opierając się na prawach interferencyi. opiszemy tu sposób rozkładu fal na t. zw. fale cząstkowe, wskazany w r. 1690 przez Huygensa[1]), a ułatwiający znakomicie rozwiązywanie niektórych zagadnień odnoszących się do ruchu fal. Jeżeli pewien punkt O (ryc. 168) w ciele sprężystem wykonywa ruch drgający, wtenczas, jak wiemy, staje się on środkiem szeregu fal kulistych M, N i t. d. Każde wstrząśnienie, wychodzące ze środka O, udziela się naprzód cząstkom $a, b, c\ldots$ leżącym na którejkolwiek powierzchni falowej M; one podają je następnie cząstkom na dalszych powierzchniach falowych jak N i t. d. Innemi słowy, zanim energia wysłana ze środka drgającego, pod postacią fal, dosięgnie cząstek leżących na jednej z dalszych



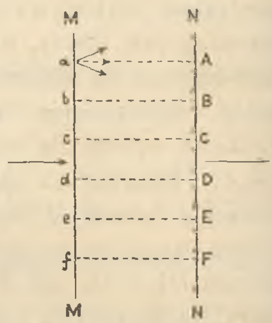
Ryc. 168.

powierzchni falowych, przechodzi ona naprzód przez cząstki leżące na powierzchni falowej M. Otóż sposób Huygensa polega na tem, że zamiast jednego, pierwotnego źródła w O, można uważać cząstki leżące na powierzchni falowej M, jako źródła pomocnicze, wysyłające fale do dalszych cząstek przewodnika. Innemi słowy, gdyby środek O był w spoczynku, a cząstki $a, b, c\ldots$ poruszały się tak samo, jak się poruszają pod wpływem fal wychodzących z O, wten-

[1]) czytaj: Heujchens.

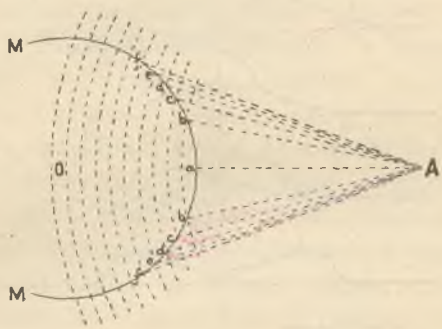
czas falowanie wszystkich cząstek dalszych nie zmieniłoby się wcale. Każda z cząstek $a, b, c\ldots$ otrzymuje od źródła małą część energii przesłanej ogółem do powierzchni M; każda z nich wysyła tę energię dalej, pod postacią fali kulistej, mającej środek w uważanej cząstce. Fale te zowiemy falami cząstkowemi ($a'\,Aa''$, $b'\,Bb''$ i t. d. ryc. 168). Fale słabe postępują, jak wiemy, z ta samą prędkością jak silne; z tego wynika, że po upływie pewnego czasu, promienie fal cząstkowych aA, bB, $cC\ldots$ urosną o tyle, o ile postąpiłaby naprzód fala główna M, w ciągu tego samego czasu. Powierzchnie kuliste fal cząstkowych: $a'\,a''$, $b'\,b''$, ... i t. d. są przeto stycznemi do kuli NN, która wskazuje położenie fali wypadkowej po upływie czasu, o którym była mowa.

Sposób Huygensa polega więc na tem, *że uważa się falę w któremkolwiek jej położeniu (NN) jako wypadkową nieskończenie wielkiej liczby fal cząstkowych. wychodzących ze wszystkich punktów powierzchni tej samej fali, w jednem z wcześniejszych jej położeń (MM).* Przy tworzeniu fali wypadkowej należy zatrzymać z każdej fali cząstkowej tylko nieskończenie mały wycinek (n. p. około A, B, C...) wykrojony przez sąsiednie fale cząstkowe. Te nieskończenie małe odcinki fal cząstkowych tworzą razem nową powierzchnię ciągłą, która jest właśnie powierzchnią szukanej fali wypadkowej. Z tego sposobu tworzenia wynika, że *każda powierzchnia fali* (jak n. p. NN) *jest wspólną styczną do powierzchni wszystkich fal cząstkowych, których środki leżą na powierzchni tej samej fali, w któremkolwiek z wcześniejszych jej położeń* (MM). Ryc. 169, zrozumiała bez bliższych wyjaśnień, okazuje postęp fali płaskiej z położenia MM do NN, przy współudziale fal cząstkowych, kulistych, wychodzących ze środków $a, b, c\ldots$ W podobny sposób można wyznaczyć kształt fali rozszerzającej się także w przypadkach bardziej zawiłych.



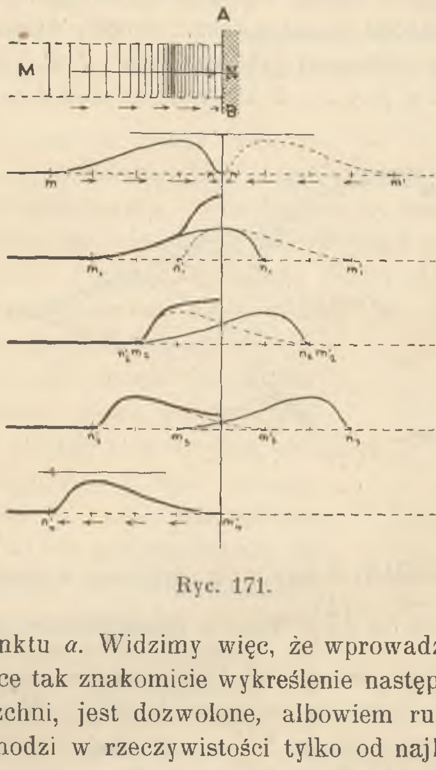
Ryc. 169.

Sposób Huygensa stanowi odmienne od zwyczajnego opisanie postępu fal, w rzeczywistości prowadzi jednak do tych samych wyników, jak sposób, którego używaliśmy dotąd. Opierając się na prawie składania małych drgań i na prawie interferencyi można się przekonać, że fale cząstkowe wywołują w przewodniku taki sam ruch, jakibyśmy otrzymali śledząc bezpośredni przebieg fali głównej. Dajmy na to, że źródło fal znajdujące się w O (ryc. 170) wysyła ciągle wstrząśnienia peryodyczne, udzielające się za pośrednictwem fal, cząstkom leżącym na powierzchni MM. Poczynając od tej powierzchni uważać będziemy dalsze przesyłanie wstrząśnień sposobem Huygensa, za pośrednictwem fal cząstkowych, wychodzących z punktów leżących na MM. Szukamy ruchu wypadkowego, który wykonywa cząstka znajdująca się n. p. w A. Podzielmy naprzód powierzchnię MM na części, wysyłające fale cząstkowe. Moglibyśmy tego podziału dokonać w jakikolwiek sposób; wszelako dla ułatwienia rozumowania postąpimy jak następuje. Z A, jako środka, kreślimy szereg kul α, β, γ,..., z których pierwsza dotyka się (w punk-



Ryc. 170.

cie a) powierzchni MM; dalsze mają promienie wzrastające stopniowo o połowę długości fali $\left(\frac{\lambda}{2}\right)$. Kule te dzielą powierzchnię MM na szereg stref, z których pierwsza (bab') jest najobszerniejsza, gdy dalsze mają szerokości stopniowo malejące (bc, cd,...). Każda z tych stref wysyła energię pod postacią fal cząstkowych, w ilości proporcyonalnej do swego pola. Owóż fale wychodzące z cząstek powierzchni MM, leżących w otoczeniu n. p. b i c, spotykając się w A, osłabiają się wzajemnie wskutek interferencyi, albowiem różnica dróg przebytych przez nie wynosi $\frac{\lambda}{2}$. Amplitudy przesłane przez różne strefy do punktu A zależą od energii fal cząstkowych, a zatem od pól obszarów, w otoczeniu b lub c, na których powstają. Gdyby dwie sąsiednie strefy, n. p. bc i cd miały pola równe, to ruchy wysłane z tych stref do A znosiłyby się tam zupełnie. Pola tych stref nie są wprawdzie równe, lecz można okazać, że pole którejkolwiek ze stref, na które podzieliliśmy MM, równa się średniej arytmetycznej pola strefy poprzedzającej uważaną i pola następującej. Z tego wynika, że działanie strefy drugiej bc zniesione jest przez połowę działania strefy pierwszej i połowę trzeciej; działanie strefy czwartej (de) w punkcie A, znosi wskutek interferencyi połowa trzeciej i połowa piątej i t. d. Ostatecznie zostaje tylko działanie połowy strefy pier-



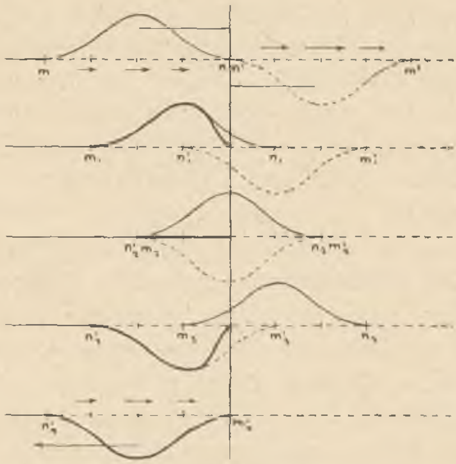
Ryc. 171.

wszej około punktu a. Widzimy więc, że wprowadzenie fal cząstkowych, ułatwiające tak znakomicie wykreślenie następujących po sobie położeń powierzchni, jest dozwolone, albowiem ruch którejkolwiek cząstki (A) pochodzi w rzeczywistości tylko od najbliższych cząstek około a na powierzchni fali, a działania innych fal cząstkowych znoszą się wzajemnie. (Rozumowanie to zastosujemy później do zjawisk optycznych, por. tom II, ust. 160).

201. Odbicie się fal. Ściana z materyału stałego, nie ustępującego pod działaniem słabych popędów, wywieranych przez trafiające go fale, stanowi nieprzebytą zaporę dla fal; postęp fal w otaczającym przewodniku sprężystym zostaje przez taką ścianę wstrzymany.

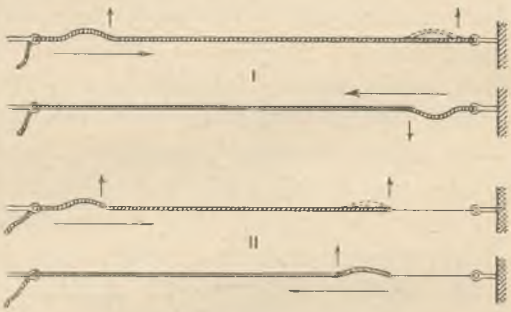
Ponieważ jednak energia nagromadzona w falach nie może zniknąć bez śladu, ani też nagromadzić się pod ścianą, przeto, doszedłszy do ściany, fale muszą wracać się z powrotem, jako t. zw. f a l e o d b i t e. Odbicie fal zdarza się również, gdy przewodnik fal ograniczony jest powierzchnią swobodną, poza którą znajduje się próżnia; powierzchnia tego rodzaju działa podobnie jak ściana stała. Są to dwa przypadki skrajne, w których fale zostają odbite całkowicie. Częściowe odbicie fal zdarza się jednak na każdej powierzchni rozgraniczającej dwa przewodniki, różniące się bądź to gęstością, bądź sprężystością. W tym razie tylko część energii zawartej w falach spotykających granicę zostaje odbitą; reszta wnika do wnętrza drugiego przewodnika pod postacią f a l p r z e p u s z c z o n y c h.

Ażeby objaśnić szczegółowo zjawisko odbicia się fal, przypuśćmy, że n. p. fala zgęszczenia płaska *MN* (ryc. 171) dąży ku ścianie stałej *AB*. Rozmieszczenie zgęszczeń w obrębie tej fali wyobraża wykreślnie linia krzywa *mn*. Wskutek zwiększonego ciśnienia, panującego w obrębie fali i wskutek ruchu, jaki posiadają cząstki przewodnika, fala, spotkawszy ścianę, wywiera na nią ciśnienie w kierunku *M* do *N*. Wobec tego ciśnienia ściana oddziaływa w kierunku przeciwnym. W istocie, cząstki przewodnika, leżące tuż przy ścianie, nie mogą poruszyć się naprzód, albowiem ściana zagradza im drogę; prędkości, które fala usiłuje im nadać, zostają w zupełności zniesione przez oddziaływanie ściany. Inaczej mówiąc, oddziaływanie to udziela cząstkom leżącym tuż przy ścianie prędkości równych, ale mających kierunek przeciwny, aniżeli prędkości udzielone im przez fale. Otóż te wstrząśnienia, oddane przez ścianę, nie giną, lecz stają się źródłem nowej fali, fali odbitej; na mocy prawa o niezależności ruchów falowych (ust. 198) fala ta przebija się na wskroś przez falę pierwotną i oddala się od ściany w przeciwnym kierunku. Działanie ściany jest zatem takie, jakgdyby na spotkanie fali *mn*, od chwili jej zbliżenia się do ściany, wychodziła od ściany druga fala *m'n'*, zupełnie podobna do pierwszej (jak obraz w zwierciedle), ale poruszająca się w przeciwnym kierunku i udzielająca cząstkom przy ścianie przeciwnych prędkości. Prędkości nadane tym cząstkom znoszą się, lecz zgęszczenia wzmacniają się. Jeżeli fala trafiająca ścianę jest falą zgęszczenia, natenczas fala odbita będzie również falą zgęszczenia; to samo odnosi się do fali rozrzedzenia. Na ryc. 171 wyobrażone są cztery fazy powstawania fali odbitej. Linie pełne, cieńsze, okazują rozmieszczenie zgęszczeń w fali pierwotnej i w powstającej fali odbitej; linie grubsze wyobrażają zgęszczenia wypadkowe, wywołane przez obie fale istniejące jednocześnie; zgęszczenia te są równe sumom zgęszczeń wyobrażonych przez linie cieńsze; $m'_4n'_4$ oznacza zupełnie już utworzoną falę odbitą, powstałą z fali pierwotnej *mn*.



Ryc. 172.

Powiedzieliśmy, że fale odbijają się całkowicie także na zewnętrznej, swobodnej powierzchni przewodnika, jeżeli po drugiej stronie tej powierzchni znajduje się przestrzeń próżna. Przebieg zjawiska jest w tym razie nieco odmienny. Cząstki przewodnika leżące na powierzchni mogą poruszać się swobodnie naprzód, ale natomiast nie znoszą zgęszczeń, gdyż nie posiadają żadnego oparcia od strony zewnętrznej. Jeżeli n. p. fala zgęszczenia dosięgnie cząstek leżących na powierzchni swobodnej przewodnika, wtenczas, nie spotykając oporu od strony zewnętrznej, uzyskają one większą prędkość, aniżeli inne cząstki, leżące we wnętrzu przewodnika. Działanie powierzchni odbijającej jest w tym przypadku takie, iż przyczynia ona cząstkom prędkości na zewnątrz, a więc staje się źródłem odbitej fali rozrzedzenia. Ażeby w tym razie wytłumaczyć zjawisko odbicia, należy wyobrazić sobie, że na spotkanie fali zgęszczenia *mn* (ryc. 172) wychodzi od ściany, w przeciwnym kierunku, zupełnie podobna fala rozrzedzenia *m'n'* (wyobrażona na rysunku przez linię krzywą, narysowaną p o n i ż e j prostej *mm'*; strzałki mniejsze oznaczają tu, jak i na ryc. poprzedzającej, prędkości cząstek w fali pierwotnej i odbitej; strzałki większe wskazują kierunek postępu fal). Zgęszczenia fali pierwotnej zostają na powierzchni odbijającej zniesione przez rozrzedzenia fali odbitej; natomiast prędkości cząstek, wytworzone przez obie fale, wzmacniają się wzajemnie. Ruch cząstek w fali rozrzedzenia posiada bowiem zawsze kierunek przeciwny kierunkowi ruchu samej fali (ust. 188); fala odbita od powierzchni zewnętrznej udziela więc



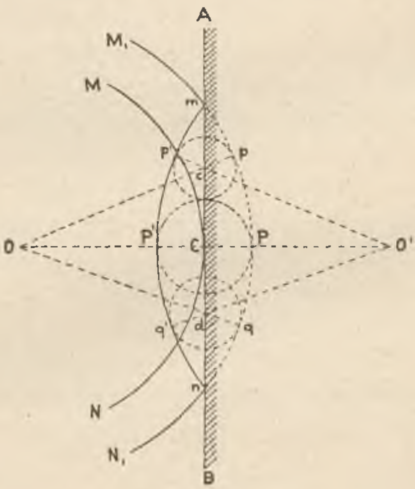
Ryc. 173.

cząstkom prędkości w tym samym kierunku, jak fala pierwotna. Możemy przeto w ogólności powiedzieć, że *przy odbiciu się fal od powierzchni, która nie stawia oporu ciśnieniom wywołanym przez fale, kierunek drgania cząstek przewodnika nie zmienia się; jeżeli natomiast powierzchnia odbijająca oddziaływa przeciw tym ciśnieniom, wtenczas prędkości cząstek w fali pierwotnej i odbitej mają kierunki przeciwne.*

Oba opisane tu przypadki odbicia się fal można objaśnić za pomocą machiny falowej (ryc. 159). Chcąc naśladować odbicie się od stałej powierzchni, przytwierdzamy koniec *B* sprężyny do jakiejkolwiek stałej podpory; pozostawiwszy natomiast koniec *B* wolnym, otrzymamy odbicie się fali bez zmiany kierunku, jakby od powierzchni swobodnej. W tym samym celu można użyć sznura, albo lepiej węża gumowego, napełnionego (w celu zmniejszenia prędkości fal) piaskiem (ryc. 173). Wstrząśnienie jednego końca *A* wywołuje (jeżeli sznur jest nieco napięty) fale poprzeczne, postępujące ku drugiemu końcowi *B*, gdzie zostają odbite. Zależnie od tego, czy koniec *B* jest nieruchomo przytwierdzony (ryc. 173, I), czy poddający się (przywiązany do cienkiego sznurka), ryc. 173 II, otrzymamy falę odbitą o odchyleniu mającem przeciwny kierunek, aniżeli odchylenie fali pierwotnej, albo o odchyleniu w tymsamym kierunku. Celem zapobieżenia omyłkom przypominamy, że linie krzywe na ryc. 171 i 172 nie oznaczają odchyleń, lecz zgęszczenia, t. j. odkształcenia. Stąd pochodzi pozorna różnica między tamtymi rysunkami, a ryc. 173. Gdyby linie krzywe na ryc. 171 i 172 wyobrażały rozmieszczenie prędkości, albo odchyleń cząstek w fali, natenczas ryc. 172 odnosiłaby się widocznie do przypadku ściany stałej, zaś ryc. 171 do powierzchni swobodnej.

Wykreślenie kształtu fali odbitej daje się z łatwością uskutecznić za pomocą sposobu Huygensa. Jeżeli np. w punkcie O (ryc. 174), przed ścianą płaską AB, powstaje fala kulista, natenczas rozprzestrzenia się ona swobodnie, aż do chwili, gdy — w położeniu MN — dosięgnie ściany w najbliższym punkcie C, t. j. w punkcie przecięcia się prostopadłej OC ze ścianą. Od tej chwili zaczyna tworzyć się fala odbita. Fala ta wychodzi z cząstek przewodnika leżących przy ścianie; w miarę tego, jak fala pierwotna ogarnia te cząstki, stają się one środkami fal cząstkowych, których wypadkową jest właśnie fala odbita. Ryc. 174 wyobraża rozwój fali odbitej, w chwili, gdy fala pierwotna postąpiła do M_1mnN_1.

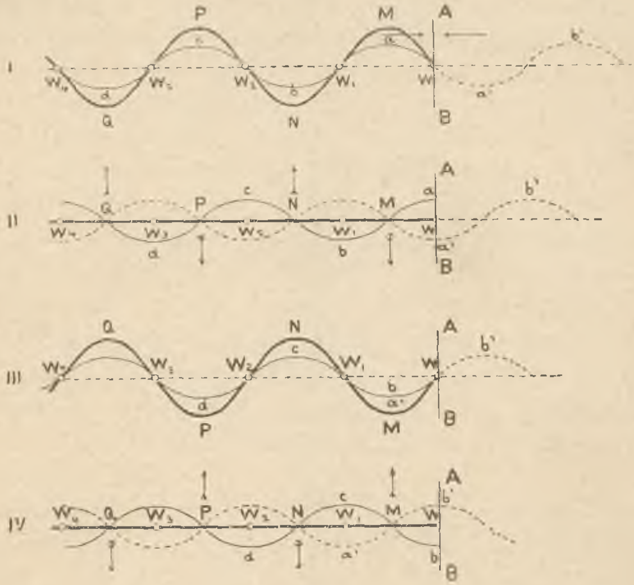
Gdyby ściany nie było, a przestrzeń za płaszczyzną AB była zajęta przez to samo ciało sprężyste, które znajduje się przed nią, wtenczas podczas postępu fali z położenia MCN do M_1PN_1, cząstki C, c, d i t. d., leżące na płaszczyźnie AB, stawałyby się po kolei środkami fal cząstkowych. Cząstka C, najwcześniej wstrząśnięta, wysłałaby falę o promieniu CP; z cząstek c i d utworzyłyby się fale sięgające do p i q i t. d. Fala wypadkowa M_1PN_1 byłaby wspólną powierzchnią styczną tych fal cząstkowych. W rzeczywistości AB jest ścianą stałą, która nie przepuszcza fal wcale, albo przepuszcza tylko część zawartej w nich energii, a resztę odbija. Wskutek tego wspomniane fale cząstkowe rozwijają się wstecz; tak n. p. z C ku P', zamiast ku P; z c ku p', zamiast ku p i t. d. Wspólna powierzchnia styczna $mP'n$ tych fal cząstkowych jest widocznie częścią kuli, symetryczną względem kuli mPn. Jest to fala odbita, utworzona podczas postępu fali pierwotnej z położenia MN do $M'N'$. Środek fali odbitej kulistej znajduje się za ścianą w punkcie O', na linii OO', prostopadłej do ściany AB, w odległości CO', równej odległości CO środka fali pierwotnej. Punkt O' znaleziony za pomocą tego wykreślenia nazywa się obrazem punktu O, względem ściany. Prawo odbicia się fal kulistych możemy na zasadzie powyższego wyjaśnienia wypowiedzieć w sposób następujący: *Fala kulista, po odbiciu się od ściany płaskiej, tworzy znowu falę kulistą, której środkiem jest obraz środka fali pierwotnej.* Przy odbiciu się od powierzchni zakrzywionych, kształt fali ulega w ogóle znacznym zmianom; zjawiska te poznamy dokładniej w nauce o promieniowaniu.



Ryc. 174.

202. Fale stojące. Na osobny rozbiór zasługuje przypadek interferencyi dwu szeregów fal prostych i płaskich, jednakowej amplitudy i częstości, poruszających się w kierunkach przeciwnych. Przypadek ten zdarza się n. p., gdy szereg fal peryodycznych (podłużnych, albo poprzecznych) trafia ścianę, od której odbija się całkowicie. Cząstki przewodnika zostają wówczas poruszane jednocześnie przez fale pierwotne i przez odbite. Wynikiem spotkania się tych dwu szeregów fal są t. zw. fale stojące, których własności zamierzamy tu wyłożyć. Odróżnimy tu, jak w ust. 201, odbicie się od ściany stałej i od powierzchni swobodnej przewodnika.

a) Niech AB (ryc. 175) wyobraża ścianę stałą, o którą uderzają nieustannie fale peryodyczne płaskie, podłużne albo poprzeczne, w kierunku prostopadłym do ściany. Linia falowa *a*, *b*, *c*, *d*... wyobraża odchylenia cząstek, pod wpływem tych fal [1]). Każda fala, uderzając o ścianę *AB*, daje początek fali odbitej, tej samej postaci, mającej atoli przeciwny kierunek ruchu i wstrząsającej cząstki przewodnika w przeciwnym kie-



Ryc. 175.

runku (z powodu stałości ściany), aniżeli fala pierwotna. Tak n. p. na spotkanie grzbietu *a* fali wychodzi od ściany dolina *a'*; gdy pierwszy postępuje ku ścianie na prawo, druga porusza się jednocześnie na lewo. Rysunek (I) przedstawia stan przewodnika w chwili, gdy znaczna liczba fal uderzyła już o ścianę, wskutek czego powstało tyleż fal odbitych. Widoczną jest rzeczą, że linie falowe fal pierwotnych i odbitych nakrywają się w chwili uważanej; n. p. grzbiet *a* fali pierwotnej spotka się z grzbietem fali odbitej, utworzonym przez odbicie się doliny, poprzedzającej grzbiet *a*. Wynikiem tego spotykania się fal, w fazach zgo-

[1]) W przypadku fal poprzecznych linia ta daje wprost miejsce cząstek odchylonych; tenże sam rysunek może jednak służyć do objaśnienia fal stojących podłużnych, potrzeba wówczas wyobrazić sobie odchylenia podłużne, mające też same długości, jak rzędne linii falowej.

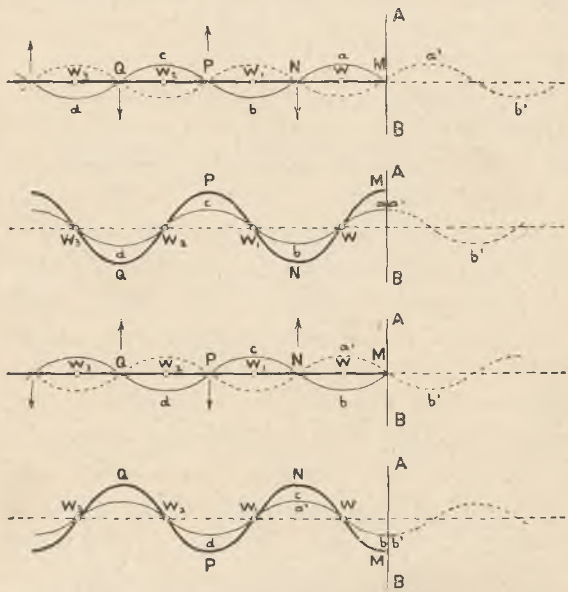
dnych, jest wzmocnienie, podwojenie, odchyleń. Stan przewodnika w uważanej chwili wyobraża linia falowa *QPNM* (ryc. 175, I).

Ćwierć okresu drgania później, obie linie falowe zajmują nowe położenia, przesunięte o ćwierć długości fali: pierwotna na prawo (ryc. 175 II, linia falowa pełna *dcba*), odbita na lewo (linia falowa kreskowana). Fazy odchyleń rozminęły się wskutek tego o połowę drgania; odchylenia w fali pierwotnej i odbitej znoszą się wzajemnie. Cząstki *MNPQ*, które miały poprzednio największe odchylenia, nie mają obecnie żadnych, lecz poruszają się z największą prędkością przez położenia równowagi, naprzemian w kierunkach przeciwnych.

Po upływie dalszej ćwierci okresu zgodność faz fali pierwotnej i odbitej powraca. Linia falowa wypadkowa (III) przyjmuje postać podobną do I, jednak kierunki odchyleń są przeciwne. Po upływie trzeciej i czwartej ćwierci okresu wracają formy IV i I, jak to jest widoczne na rysunku (por. zad. 375).

Główną cechą ruchu, który tu opisaliśmy, jest to, że ruch postępowy, znamionujący zwyczajne fale, został zupełnie ukryty. Grzbiety i doliny fal nie postępują naprzód, lecz tworzą się i znikają ustawicznie w tych samych cząstkach przewodnika; nie są to już fale postępowe, lecz f a l e s t o j ą c e na jednem miejscu. W falach zwyczajnych (postępowych) każda faza drgania przenosi się kolejno do coraz dalszych cząstek przewodnika; tu natomiast wszystkie cząstki przechodzą j e d n o c z e ś n i e przez położenia równowagi, osiągają jednocześnie największe odchylenia. Wartość amplitudy drgania cząstek nie jest zresztą jednakowa. Punkty W, W_1, $W_2 \ldots$, ogólnie mówiąc wszystkie cząstki dotykające się ściany, tudzież te, których odległości od ściany wynoszą: $\frac{\lambda}{2}$, albo $2\frac{\lambda}{2}$ albo $3\frac{\lambda}{2}$ i t. d., pozostają trwale w spoczynku, mają amplitudę zero. Cząstki te leżą w płaszczyznach równoległych do ściany, zwanych p ł a s z c z y z n a m i w ę z ł o w e m i. Każdy z punktów W, W_1, $W_2 \ldots$ na linii falowej nazywa się węzłem. Inne cząstki mają amplitudy różne od zera; największa amplituda i największe prędkości drgania znajdują się w punktach M, N, P, Q.., z w a n y c h s t r z a ł k a m i, leżących po środku między płaszczyznami węzłowemi. Każdy węzeł oddziela grzbiet od doliny; prędkości cząstek i odchylenia ich, po obu stronach węzła, mają przeciwne kierunki.

b) Przyjmijmy teraz, iż ściana AB (ryc. 176) stanowi część swobodnej powierzchni przewodnika. W tym przypadku tworzy się fala odbita, wstrząsająca cząstki leżące na powierzchni w tym samym kierunku, jak fala pierwotna; grzbiet (odchylenia) fali odbija się jako grzbiet, dolina, jako dolina. Jeżeli linia falowa $d\,c\,b\,a$ wyobraża odchylenia cząstek w fali pierwotnej, natenczas linia kreskowana $b'a'$... będzie obrazem fali odbitej. Śledząc bieg obu tych fal przez cztery ćwiartki okresu, przekonamy się z łatwo-



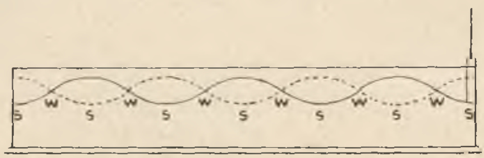
Ryc. 176.

ścią, że wskutek zbiegu fal pierwotnych i odbitych tworzą się i w tym razie fale stojące, poprzedzielane węzłami W, W_1, W_2,... oddalonymi od siebie o połowę długości fali $\left(\frac{\lambda}{2}\right)$. Pierwszy z tych węzłów (W) nie leży jednak na powierzchni odbijającej, lecz w odległości ćwierci fali od ściany (por. zad. 376).

Ażeby zdać sobie sprawę z rozmieszczenia zgęszczeń i rozrzedzeń [1]) w falach stojących, przypuśćmy, że grzbiety linii fa-

[1]) albo skręceń na prawo i lewo — jeżeli fale są poprzeczne.

łowych w ryc. 175 i 176 wyobrażają zgęszczenia, doliny rozrzedzenia, jak to przyjmowaliśmy w ust. 201. W tem założeniu ryc. 176 odnosić się będzie do przypadku ściany stałej (zgęszczenie odbija się jako zgęszczenie,) ryc. 175 natomiast do powierzchni swobodnej (zgęszczenie odbija się jako rozrzedzenie). Litery *M*, *N*, *P*, *Q*... oznaczają teraz węzły. Z obu tych figur wyczytujemy z łatwością, iż w falach stojących *największe zgęszczenia* i *rozrzedzenia zdarzają się* (naprzemian co do czasu i przestrzeni) *w węzłach*; *w strzałkach niema ani zgęszczeń, ani rozrzedzeń.*



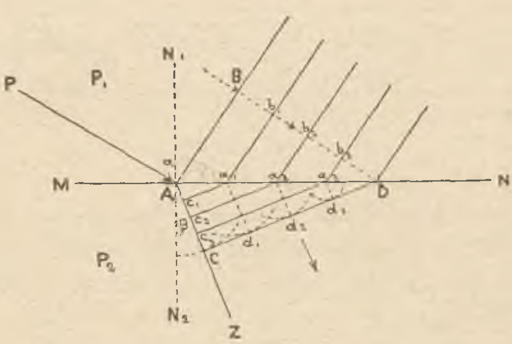
Ryc. 177.

Do uzmysłowienia fal stojących nadają się najlepiej fale poprzeczne. W tym celu można użyć sznura przywiązanego bądź to do ściany stałej, bądź też do końca cienkiego sznurka (ryc. 173). Wstrząsając peryodycznie koniec wolny, przekonamy się, że sznur podzieli się, węzłami nieruchomymi, na szereg odcinków, drgających naprzemian w przeciwnych kierunkach, na kształt linii falowej *M*, *N*, *P*, *Q*, ryc. 175 (jeżeli koniec jest przytwierdzony do ściany), lub ryc. 176 (jeżeli koniec jest ruchomy).

Niemniej łatwo jest wzbudzić fale stojące na wodzie. W tym celu używa się długiego prostokątnego korytka mającego ściany szklane (ryc. 177). Fale wzbudzone u jednego końca przez peryodyczne zanurzanie klocka drewnianego, odbijając się od przeciwnej ściany, przechodzą niebawem w kołysanie się, znamionujące fale stojące.

203. Załamywanie się fal. Na powierzchni rozgraniczającej dwa przewodniki różnorodne fala dzieli się w ogólności na falę odbitą, która wraca do przewodnika pierwszego i na falę przepuszczoną, wnikającą do wnętrza przewodnika drugiego. K i e r u n e k, w k t ó r y m f a l a p r z e p u s z c z o n a p o s t ę p u j e w p r z e w o d n i k u d r u g i m, r ó ż n i s i ę j e d n a k w o g ó l n o ś c i o d *kierunku fali pierwotnej w pierwszym.* Tę zmianę kierunku fali, podczas przejścia przez granicę, nazywamy *załamywaniem się fali.* Zjawisko to daje się z łatwością wytłumaczyć na zasadzie znanych nam już praw; zobaczymy, że zdarza się ono zawsze, gdy *prędkości przewodzenia fal w uważanych przewodnikach są nierówne.*

Weźmy pod uwagę falę płaską AB (ryc. 178), padającą ukośnie, pod jakimkolwiek kątem, na płaszczyznę MN, oddzielającą przewodnik P_1, w którym fale postępują z prędkością c_1, od innego przewodnika P_2, w którym prędkość fal jest c_2. Zakładamy, że oba przewodniki są ciałami sprężystemi, *równokierunkowemi*, a więc, że w każdym z nich prędkość fal jest we wszystkich kierunkach jednakowa. Płaszczyzna rysunku przecina pod kątem prostym powierzchnię fali AB, tudzież płaszczyznę graniczną MN. Płaszczyznę rysunku nazwiemy w tym przypadku *płaszczyzną padania* fali AB. Płaszczyzna padania jest więc prostopadła do śladu, t. j. do krawędzi przecięcia się płaszczyzn AB i MN; ślad ten widzimy na rysunku w skróceniu, jako jeden punkt A.



Ryc. 178.

Fala AB postępuje w pierwszym przewodniku z prędkością c_1, w kierunku strzałki PA. Z biegiem czasu zajmuje ona położenia a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 i t. d. Postępując w ten sposób naprzód, wstrząsa ona po kolei cząstki A, a_1, a_2... D, leżące na płaszczyźnie MN. Cząstki te stają się wskutek tego środkami fal kulistych, cząstkowych, które rozszerzają się, od chwili wstrząśnienia, we wnętrzu drugiego przewodnika. jednostajnie z prędkością c_2, właściwą temu przewodnikowi *). W chwili, gdy cząstka D zostaje wstrząśniętą, utworzyły się już około środków a_3, a_2, a_1, a fale cząstkowe o promieniach a_3d_3, a_2d_2, a_1d_1, AC. Promień AC jest największy, albowiem fala pierwotna dosięgła cząstki A najwcześniej. Cząstka a_2, leżąca w połowie odległości AD. utworzyła falę cząstkową, której promień a_2d_2 mierzy w uważanej chwili tylko połowę promienia AC. Ogólnie mówiąc, promienie fal cząstkowych są proporcyonalne do odległości odpowiednich cząstek od śladu, który fala przechodząca przez D kreśli na płaszczyźnie MN. Z tego wynika, że fale te mają wspólną płaszczyznę styczną, prostopadłą do płaszczyzny rysunku; jest nią powierzchnia fali wypadkowej CD (ust. 200). Podczas dalszego wzrostu fal cząstkowych, które utworzyły falę wypadkową CD, postępuje ona we wnętrzu przewodnika P_2, z prędkością c_2, w kierunku AZ. Kierunek ten różni się w ogólności od kierunku postępu fali pierwotnej PA, albowiem drogi BD i AC przebyte przez obie fale w ciągu tego samego czasu są nierówne. Kierunek fali pierwotnej określa się przez kąt $BAD = \alpha$ między powierzchnią fali AB a płaszczyzną MN, zwany kątem padania; kąt ten jest oczywiście równy kątowi PAN_1, między kierunkiem postępu fali pierwotnej, a normalną N_1N_2 do płaszczyzny załamującej. Kierunek fali załamanej określa się podobnie przez kąt załamania $ZAN_2 = ADC = \beta$, między normalną N_1N_2, a kierunkiem postępu fali załamanej. Ilekroć kąty α i β są nierówne, fala przepuszczona jest załamaną względem pierwotnej. Celem znalezienia kierunku fali załamanej, t. j. kąta β, gdy dany jest kąt α, zważmy, że $\sin\alpha = \frac{BD}{AD}$, $\sin\beta = \frac{AC}{AD}$, zaczem $\sin\alpha : \sin\beta = BD : AC$.

Długość BD równa jest drodze, którą fala pierwotna przebywa w tymże samym czasie, w którym fala przepuszczona przebywa drogę AC; mamy więc $BD : AC = c_1 : c_2$, przeto

$$\sin\alpha : \sin\beta = c_1 : c_2.$$

Na tej podstawie możemy wypowiedzieć prawo załamywania się fal, jak następuje:

*) Te same cząstki wysyłają jednocześnie do pierwszego przewodnika fale cząstkowe, składające się na falę odbitą.

1) *Fala załamana postępuje w kierunku równoległym do płaszczyzny padania fali pierwotnej.*

2) *Stosunek wstawy kąta padania do wstawy kąta załamania jest stały, t. j. niezależny od wartości kąta padania* α; *równa on się stosunkowi prędkości fal w danych przewodnikach.*

Stosunek sin α: sin β, albo $c_1 : c_2$, nazywa się **spółczynnikiem załamania** fal przechodzących z przewodnika P_1 do P_2. Oznaczywszy jego wartość przez n, możemy wyrazić drugie twierdzenie następującem równaniem:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2} = n$$

Gdy $\alpha = 0$, wtenczas równanie to daje $\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n}$, zatem $\beta = 0$; t. j. jeżeli fala pierwotna jest równoległa do płaszczyzny rozdzielającej oba przewodniki, wtenczas fala załamana posiada tenże sam kierunek: załamania fal niema w tym razie. Gdy α powiększa się, wzrasta zarazem kąt β. Kąt załamania jest większy lub mniejszy, aniżeli kąt padania, zależnie od tego, czy fale postępują w drugim przewodniku prędzej, czy wolniej, aniżeli w pierwszym.

Odbicie się całkowite fal. Jeżeli prędkość fal c_2 w drugim przewodniku jest większa, aniżeli prędkość c_1 w pierwszym, wtenczas jest $n < 1$. W tym przypadku fala przepuszczona tworzy się tylko wtenczas, gdy kąty padania są mniejsze od t. zw. kąta granicznego α', którego wartość oblicza się z równania $\sin \alpha' = n$, t. j. $\alpha' = arc\ sin\ n$. Kąt załamania bowiem, z powodu $n < 1$, jest w uważanym przypadku większy, aniżeli kąt padania. Gdy α wzrośnie do tego stopnia, że $\sin \alpha = n$, wtenczas $\beta = 90^0$, t. j. fala załamana postępuje równolegle do płaszczyzny załamującej; kąt załamania przyjmuje największą wartość, jaką mieć może. Dla większych kątów padania fala przepuszczona nie tworzy się wcale (wykreślenie ryc. 178 staje się niemożliwe); całkowita energia fali pierwotnej pozostaje w zupełności w fali odbitej. Z tego powodu odbicie się fali w tym przypadku nazwano odbiciem całkowitem.

Zadania.

371) Obliczyć prędkość fal podłużnych w wodorze.

Odp. $340 \sqrt{14{\cdot}4} = 1290$ *m/sek.*

372) Porównać długości fal w powietrzu i w wodorze dla pewnej danej częstości drgań.

Odp. 340 : 1290, t. j. w wodorze 3·8 razy dłuższe.

373) W powietrzu postępują fale peryodyczne o częstości drgania: $n = 435$ na *sek.* Obliczyć długość fali.

Odp. $\lambda = \frac{340}{435} m = 78\ cm.$

374) Doświadczalnie znaleziono w pewnym przypadku długość fal peryodycznych w powietrzu $= 10\ cm$; obliczyć częstość drgania.

Odp. $n = 3400$ na *sek.*

375) Na płaską, stałą ścianę pada prostopadle szereg fal płaskich postępujących w powietrzu z prędkością c. Znaleźć równanie ruchu drgającego którejkolwiek cząstki powietrza, pod wpływem fal pierwotnych i odbitych.

Odp. Równanie fal pierwotnych: $s = a \sin \frac{2\pi}{\lambda}(ct - x)$, w czem x oznacza odległość uważanej cząstki od pewnego punktu A, znajdującego się w odległości $= d$ przed ścianą, który uważamy za źródło fal. Fale odbite postępują tak, jak gdyby pochodziły z punktu A' znajdującego się w odległości d za ścianą. Odchylenie s' uważanej cząstki, sprawione przez fale odbite, znajdziemy, podstawiając w poprzedzającem równaniu dla s: zamiast x, odległość $d + (d - x)$; nadto należy znak tego wyrażenia zmienić na przeciwny, albowiem przy odbiciu się od stałej ściany kierunek prędkości zmienia się na przeciwny (ta zmiana kierunku i znaku nie miałaby miejsca przy odbiciu się od swobodnej powierzchni przewodnika). Otrzymamy zatem:

$$s' = -a \sin \frac{2\pi}{\lambda}(ct - 2d + x).$$

Odchylenie wypadkowe: $S = s + s'$. Korzystając ze znanego wzoru

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2},$$

znajdziemy:

$$S = 2a \sin \frac{2\pi}{\lambda}(d - x) \cos \frac{2\pi}{\lambda}(ct - d),$$

albo:
$$S = 2a \sin \frac{2\pi y}{\lambda} \cos \left(\frac{2\pi t}{T} - 2\pi \frac{d}{\lambda}\right),$$

gdzie $y = d - x$ oznacza odległość uważanej cząstki od ściany, zaś T okres drgania. Równanie znalezione okazuje, że wszystkie cząstki przechodzą jednocześnie przez położenie równowagi, albowiem dla tych wartości t, które przywodzą dostawę do zera, jest $S = 0$, jakiekolwiek byłoby y. Równanie to wyraża więc fale stojące. Amplitudy drgania różnych cząstek nie są równe; wartością amplitudy jest bowiem:

$2a \sin \frac{2\pi y}{\lambda}$; równa się ona zeru w cząstkach leżących przy ścianie ($y = 0$), tudzież w tych, dla których y wynosi: $\frac{\lambda}{2}$, $2\frac{\lambda}{2}$, $3\frac{\lambda}{2}$ i t. d. Cząstki te leżą więc w płaszczyznach węzłowych równoległych do ściany i mających równe odstępy $= \frac{\lambda}{2}$. W środku między płaszczyznami węzłowemi amplituda drgań jest największa, posiada wartość $2a$.

376) Rozwiązać poprzedzające zadanie w przypuszczeniu, że płaszczyzną odbijającą jest swobodna powierzchnia przewodnika fal, która odbija je bez zmiany kierunku prędkości cząstek.

Odp. $s = a \sin \frac{2\pi}{\lambda}(ct - x)$; $s' = a \sin \frac{2\pi}{\lambda}(ct - 2d + x)$ Stąd: $S = s + s' = 2a \cos \frac{2\pi y}{\lambda} \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - 2\pi \frac{d}{\lambda}\right)$. Odległości płaszczyzn węzłowych od ściany wynoszą w tym wypadku.

$$y = \frac{\lambda}{4};\ \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2};\ \frac{\lambda}{4} + 2\frac{\lambda}{2};\ \frac{\lambda}{4} + 3\frac{\lambda}{2} \text{ i t. d.}$$

377) Wzdłuż rury o średnicy 4 *cm*, napełnionej powietrzem o gęstości 0·0012 gr/cm^3, postępują fale płaskie, podłużne, wywołane przez ruch drgający tłoka (ryc. 162), poruszającego się podług równania: $s = 0{\cdot}001 \sin 2400\, t$, s oznacza odchylenie w *cm*, t czas w *sek.* Obliczyć energię zawartą pod postacią fal, w kawałku rury o długości 1 *m.*

Odp. Częstość drgania $n = \frac{2400}{2\pi}$; największa prędkość drgania: $V = 2\pi a n = 2400 \times 0{\cdot}001$ *cm/sek.* Energia $= \frac{1}{2}(2)^2\pi \times 100 \times \times 0{\cdot}0012 \times (2400 \times 0{\cdot}001)^2$ *ergów.*

378) Fale podłużne, płaskie, postępujące w powietrzu ($c_1 = 340$ *m/sek*) padają na powierzchnię wody ($c_2 = 1489$ *m/sek*). Znaleźć najmniejsze pochylenie powierzchni fal ku powierzchni wody (t. j. najmniejszy kąt padania), przy którem odbicie się fal będzie całkowite.

Odp. $\sin \alpha = \frac{340}{1489}$; $\alpha = 13^0 12'$.

ROZDZIAŁ XIV.

O głosie (Akustyka).

204. Warunki powstawania i podział głosów. Głosem nazywamy każde wrażenie otrzymane za pośrednictwem słuchu. Źródłem zmian fizycznych, wywołujących wrażenie głosu, jest prawie zawsze jakieś ciało znajdujące się za obrębem ucha — n. p. młot uderzający o kowadło, dzwon, struna dźwięcząca, narząd głosowy ludzi lub zwierząt i t. p. Źródło głosu bywa niekiedy bardzo odległe od ucha odbierającego wrażenie (grzmoty, wystrzały działowe), ale nigdy nie znajduje się za obrębem kuli ziemskiej; stamtąd nie dochodzą do nas żadne głosy.

Zwyczajne spostrzeżenia dowodzą, że *do wzbudzenia głosu konieczne są nagłe, krótko trwające uderzenia*, n. p. wystrzał, albo uderzenie młotka. Wrażenie głosu odbieramy dopiero po upływie niejakiego czasu po uderzeniu; wiadomo n. p., że huk wystrzału armatniego przychodzi później, aniżeli błysk towarzyszący wystrzałowi. Głos bywa więc przewodzony, i to z prędkością stosunkowo niewielką. W roku 1738 kilku członków akademii paryskiej wymierzyli czas upływający między pojawieniem się światła, a hukiem wystrzału z działa umieszczonego w odmierzonej odległości; podzieliwszy tę odległość przez czas, otrzymano prędkość przewodzenia głosu, albowiem czas przewodzenia światła jest tak mały, że w rachunku tym można go pominąć. Prędkość przewodzenia głosu wynosi około 340 *m/sek*, równa się zatem prędkości przewodzenia fal podłużnych w powietrzu (ust. 195).

Doświadczenia tego rodzaju doprowadziły do wniosku, że nie samo uderzenie się ciał jako takie, lecz raczej wstrząśnienie sąsiednich cząstek powietrza jest warunkiem koniecznym powstawania głosów. Powierzchnia ciała uderzonego, albo poruszonego nagle, uderza zarazem sąsiednie warstwy powietrza, zgęszcza je albo je rozrzedza, a tem samem wywołuje falę podłużną. Nagłość uderzenia, albo w ogóle ruchu ciała wydającego głos, jest konieczną, aby w powietrzu otaczającem utworzyło się dostatecznie silne zgęszczenie lub rozrzedzenie. Jeżeli n. p. składamy dłonie powoli, to powietrze ma dość czasu, aby ustąpić z drogi, okrąża dłonie na podobieństwo wody poruszanej wiosłem i nie doznaje niemal żadnej zmiany gęstości. Nagłe natomiast uderzenie się dłoni zgęszcza powietrze znajdujące się między niemi i wzbudza silny głos. Powietrze jest bowiem ciałem bezwładnem i nie ustępuje tak rychło, jak dłonie się zbliżają. Przewodzenie głosu polega więc na przewodzeniu fal podłużnych, wzbudzonych w powietrzu, albo w jakimkolwiek innym sprężystym przewodniku. Do świadomości naszej głos dochodzi dopiero wtenczas, gdy wstrząśnienie przewodzone w fali udzieli się uszom, a raczej nerwom słuchowym, znajdującym się we wnętrzu uszu.

Pojedyncze nagłe uderzenie wywołuje krótko trwające drżenie ciała uderzonego; udziela się ono uchu jako g ł o s k r ó t k i, urwany (huk, stuk, brzęk i t. p.). G ł o s c i ą g ł y powstaje wtenczas, gdy liczne uderzenia następują szybko jedno po drugiem, n. p. gdy koniec laski poruszamy szybko po kracie, gdy przyłożymy blachę, albo kartkę twardego papieru do obwodu koła zębatego, które szybko się obraca i t. p. Tu należy także szmer wody lub liści drzew, jęczenie wiatru, dźwięczenie struny, śpiew i t. p. Doświadczenie okazuje, że gdy częstość wstrząśnień dochodzi do 20 albo 30 na sekundę, wtenczas ucho nie odróżnia już pojedynczych wstrząśnień, lecz odbiera jednolite wrażenie głosu ciągłego.

Badanie głosów ciągłych stanowi jedno z najważniejszych zadań nauki o głosie, czyli akustyki. W szczególności zajmować się będziemy tymi głosami ciągłymi, które bywają w muzyce niemal wyłącznie używane, mianowicie dźwiękami.

D ź w i ę k i e m nazywamy każde wrażenie ciągłe, otrzymane za pośrednictwem słuchu, które przez cały czas trwania jest zupełnie jednostajne i niezmienne (dźwięki instrumentów muzycznych, dźwięki samogłosek w mowie, brzęczenie niektórych owadów). Wrażenia głosowe zmienne i niejednostajne nazywamy szmerami, szelestami (głos powstający, gdy wóz jedzie szybko po nierównym bruku i t. p.); głosy takie są zwykle bezładną mieszaniną różnych uderzeń i dźwięków.

205. Przewodzenie głosu. Powietrze jest zwyczajnym, ale bynajmniej nie jedynym przewodnikiem głosu. Każde ciało posiadające zdolność przewodzenia zgęszczeń i rozrzedzeń, pod postacią fal podłużnych, może również przewodzić głos. *Prędkość głosu w każdym przewodniku równa się prędkości przewodzenia fal podłużnych w tymże przewodniku.* Przyłożywszy ucho do ziemi, możemy usłyszeć głosy pochodzące z wielkiej odległości. Lekkie stukanie o słup telegraficzny przenosi się za pośrednictwem drutu do ucha przyłożonego do następnego słupa. Doświadczenia Colladona i Sturma nad prędkością przewodzenia fal podłużnych w wodzie, o których wspominaliśmy w ust. 195, były również wykonane za pośrednictwem słuchu. W odległości wymierzonej ustawione były na jeziorze dwie łodzie; obserwator znajdujący się na jednej łodzi uderzał w dzwon zanurzony pod wodą i w tejże samej chwili dawał sygnał optyczny; obserwator na drugiej łodzi, przyłożywszy ucho do wiosła zanurzonego w wodzie, mierzył czas upływający między zjawieniem się światła, a nadejściem fali głosowej. Okazało się, że prędkość głosu jest i w tym razie równa prędkości przewodzenia fal zgęszczenia i rozrzedzenia (1435 *m/sek*). Gdzie niema sprężystego przewodnika, tam też głos nie może być przewodzony; dzwonek umieszczony w próżni nie wydaje zupełnie głosu, pomimo uderzeń młotka.

Skoro przewodzenie głosu jest przewodzeniem fal podłużnych w przewodnikach sprężystych, przeto głosy wszelkiego rodzaju muszą mieć w pewnym przewodniku jednakowe prędkości; wiemy bowiem (ust. 190, 195), że prędkość przewodzenia wstrząśnień nie zależy od amplitudy ich, ani od rodzaju. Istotnie, doświadczenie codzienne uczy, że szmery wszelkiego rodzaju, szelesty i dźwięki postępują w powietrzu z tą samą prędkością; w przeciwnym razie nie moglibyśmy słuchać orkiestry z większej odległości, gdyż dźwieki różnych instrumentów, wydane jednocześnie, nie dochodziłyby jednocześnie do ucha.

Prędkość głosu w powietrzu poruszającem się, podczas wiatru, jest większa albo mniejsza, aniżeli w powietrzu nieruchomem. Zależy to od tego, czy fale głosowe postępują z wiatrem, czy naprzeciw wiatru; fale głosowe bywają bowiem unoszone razem z przewodnikiem, wskutek czego prędkość ich zmienia się o prędkość samego przewodnika.

206. Odgłos, czyli echo, tworzy się wskutek odbicia się fal głosowych. Głos wydany w powietrzu otwartem, naprzeciw ściany albo skały, wraca po upływie pewnego czasu do ucha, nieco osłabiony, jak gdyby wychodził z miejsca leżącego za ścianą. Zgadza się to zupełnie z tem, co powiedzieliśmy o odbijaniu się fal (ust. 201). Fale głosowe odbite powstają w ogólności na każdej powierzchni rozgraniczającej dwa przewodniki różnej sprężystości i gęstości. Ciała stałe i woda, warstwy powietrza o odmiennej temperaturze lub wilgoci, chmury i t. p. odbijają głos. Część głosu udziela się drugiemu przewodnikowi, jako fala głosowa przepuszczona, reszta tworzy falę odbitą. Odgłos jest tem silniejszy, im mniej głosu przechodzi do drugiego przewodnika.

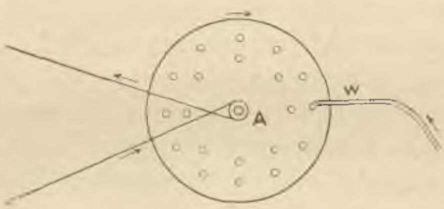
Ciała stałe jednolite i ciecze odbijają głos przewodzony w powietrzu niemal całkowicie; z tego powodu ściany murowane oddzielające dwa mieszkania czynią rozmowę niemożliwą, jakkolwiek dźwięk fortepianu bywa za pośrednictwem podłogi dość dobrze słyszany. Pokrycie ścian kobiercami, tkaninami i t. p. osłabia znacznie odgłos. Właściwym przewodnikiem głosu w takich ciałach jest bowiem powietrze, uwięzione między luźnemi ich cząstkami; głos wchodzi więc obficie w takie ciała, lecz wskutek tarcia zostaje szybko zniszczony.

Odgłos powtarza mowę wyraźnie, jeżeli ściana odbijająca jest dostatecznie odległa. Na wymówienie jednej zgłoski (syllaby) potrzeba mniej więcej $\frac{1}{5}$ sekundy. Jeżeli odległość ściany jest taka, iż w ciągu $\frac{1}{5}$ sekundy głos przebiega ją dwukrotnie (tam i napowrót), natenczas po wymówieniu zgłoski usłyszymy natychmiast jej odgłos. Odległość powinna więc wynosić: $\frac{1}{2} . 340 . \frac{1}{5} = 34$ *m*. Ściana znajdująca się w odległości $2 \times 34 = 68$ *m* tworzy odgłos dwuzgłoskowy i t. d.

W dużych a próżnych salach, o ścianach gładkich, odgłos utrudnia częstokroć zrozumienie mowy: sprzęty, firanki, większa ilość osób, łagodzą znacznie to działanie odgłosu. Zamknięcie ścianami przestrzeni wpływa zresztą korzystnie na natężenie głosu, albowiem nie wypuszcza energii głosowej na zewnątrz i zapobiega jej rozpraszaniu się. Z tego powodu n. p. muzyka bywa o wiele głośniejsza w pokoju zamkniętym, aniżeli w miejscu otwartem.

Odbicie się głosu od powierzchni zakrzywionych, n. p. od zwierciadeł wklęsłych, podlega podobnym prawom, jak odbicie się światła. To samo dotyczy się także załamania głosu.

207. Znamiona dźwięków. Jednostajne a niezmienne wrażenia słuchu, zwane dźwiękami, powstają wówczas, gdy szereg uderzeń, łączących się w głos ciągły, składa się z wstrząśnień zupełnie równych i powtarzających się w równych odstępach czasu, t. j. gdy zarówno źródło głosu, jak cząstki przewodnika, posiadają ruch drgający, ściśle peryodyczny. Ta jednostajność i dokładna peryodyczność ruchów jest jedynem znamieniem, odróżniającem



Ryc. 179.

dźwięk od innych głosów. Rodzaj wstrząśnień tudzież sposoby, jakich używamy do wywołania ich, mają znaczenie podrzędne. Dźwięk powstaje n. p., gdy przyłożymy kartkę twardego papieru do zębów koła obracającego się szybko, byle obrót koła był jednostajny, a zęby równe i w równych odstępach. Dźwięki można również wywoływać za pomocą przyrządu zwanego s y r e n ą (ryc. 179) przez przerywanie silnego prądu powietrza w krótkich, ale równych odstępach czasu. Przyrząd ten (w postaci danej mu przez S e e b e c k a) składa się z krążka blaszanego, albo kartonowego *A*, opatrzonego otworami, umieszczonymi w równych odstępach na obwodzie koła, którego środek znajduje się na osi obrotu krążka *O*. (Na ryc. 179 przedstawione są dwa rzędy takich otworów, na większem kole 12, na mniejszem 8). Umieśćmy krążek ten na osi wirówki i skierujmy prąd powietrza prostopadle do jego płaszczyzny za pomocą rurki połączonej z miechem. Przy dostatecznie szybkim obrocie krążka prąd wiatru będzie peryodycznie przerywany, wskutek czego powstanie dźwięk. Jeżeli i oznacza liczbę otworów na jednem z kół na krążku, wtedy podczas jednego obrotu krążka prąd będzie i razy przerwany; między przerwami wywiera on i uderzeń na powietrze znajdujące się po przeciwnej stronie krążka. Ilość takich wstrząśnień w ciągu sekundy wynosi iN, w czem N oznacza liczbę obrotów krążka na sekundę. Oznaczywszy częstość wstrząśnień powietrza na sekundę przez n, znajdziemy:

$$n = iN.$$

Źródłami dźwięków bywają najczęściej ciała sprężyste, drgające: pręty sprężyste, struny i t. p.; tę zdolność wydawania dźwięków zawdzięczają ciała sprężyste nader dokładnej peryodyczności ruchów.

W każdym dźwięku ucho rozpoznaje trojaką własność: natężenie, wysokość i barwę.

Natężeniem dźwięku nazywamy wielkość wrażenia słuchu, czyli ilość głosu. Struna uderzona lekko wydaje dźwięk tej samej jakości, jak przy uderzeniu silnem: w pierwszym razie jednak natężenie głosu jest mniejsze, niż w drugim.

Wysokość dźwięku określa tę własność, która odróżnia głos człowieka dorosłego od głosu dziecka, dźwięk struny długiej od krótkiej i t. p.

Barwa jest trzecią własnością dźwięków, niezależną i różną od natężenia i wysokości. Jest to ta własność, która odróżnia dźwięk samogłoski *A* od samogłoski *O*, lub *I*; dźwięk struny skrzypcowej od dźwięku tej samej wysokości i natężenia, wywołanego za pomocą fletu, albo syreny, albo narządu głosowego ludzkiego.

208. Natężenie głosu zależy od obszerności, t. j. od amplitudy drgań, udzielonych za pośrednictwem fal narządowi słuchu; obok tego zależy ono także od wrażliwości ucha na dany rodzaj głosu. Struna silnie uderzona wykonywa z początku drgania o znacznej, widzialnej amplitudzie; stopniowo jednak drgania te zanikają, a ruch ustaje w końcu zupełnie. Z początku też struna wydaje dźwięk o największem natężeniu; razem z amplitudą drgania zmniejsza się stopniowo i natężenie dźwięku. Do końca jednak wysokość i barwa dźwięku pozostają niezmienione, co dowodzi, że *amplituda drgań wpływa jedynie na natężenie głosu*; *wysokość i barwa* *natomiast nie zależą wcale od amplitudy.* Rozumie się samo przez się, że natężenie głosu zależy od amplitudy drgań wzbudzonych przez fale w samem uchu; amplituda drgań tych jest jednak proporcyonalna do amplitudy drgań ciała wydającego dźwięk. Z tego powodu natężenie wrażenia słuchowego wzrasta i maleje razem z amplitudą drgań źródła dźwięku.

Zadanie fizyki przy pomiarze natężenia głosu ogranicza się do zbadania i określenia własności drgań, które sprawiają wrażenie głosu. Jako fizyczną miarę natężenia przyjmuje się więc energię ruchu drgającego cząstek powietrza przewodzącego głos. Natężenie głosu, mierzone w ten sposób, jest przeto proporcyonalne do kwadratu amplitudy drgań (ust. 194). Nie należy jednak zapominać, że ta miara natężenia nie daje zgoła żadnego wyobrażenia o wielkości *wrażenia* słuchowego. Ucho ludzkie jest nader czułe na dźwięki wysokie, do tego stopnia, że niezmiernie mała ilość energii objawia się nam jako silny głos; dźwięki nizkie powinny mieć bez porównania większą energię, aby były równie dobrze słyszane.

Natężenie głosu zależy w ogóle: *a*) od własności ciała wydającego głos, *b*) od własności ciała sprężystego przewodzącego fale głosowe, *c*) od sposobu doprowadzenia tych fal do ucha.

a) W równych zresztą warunkach natężenie głosu będzie tem większe, im więcej energii źródło głosu oddaje przewodnikowi otaczającemu. Natężenie jest wskutek tego proporcyonalne do kwadratu amplitudy drgań źródła głosu i do ilości cząstek powietrza poruszanych przez nie. Jeżeli w syrenie (ryc. 179) zamiast jednej dmuchawki *w* użyjemy kilku, n. p. po jednej dla każdego otworu, natenczas głos się zwiększy. Widełki strojowe, trzymane w ręku, wydają głos słaby; oparte o stół dźwięczą głośno, albowiem wprowadzają w drganie całą powierzchnię stołu, która udziela je powietrzu.

b) Przy równych drganiach źródła głosu, natężenie będzie tem większe, im gęstszy jest przewodnik znajdujący się między ciałem drgającem a uchem, albowiem energia kinetyczna drgań udzielających się uchu jest proporcyonalna do masy przewodnika drgającego, a więc do jego gęstości. W powietrzu rozrzedzonem, n. p. na wysokich górach, pod dzwonem pompy pneumatycznej, głos brzmi bardzo słabo; podczas silnych mrozów, w powietrzu zgęszczonem, bywa donośny. Wodór przewodzi głos znacznie gorzej, aniżeli powietrze. Ciała stałe (stal, drzewo) są najlepszymi przewodnikami głosu.

c) Natężenie głosu maleje w ogólności, gdy źródło głosu oddala się od ucha. Jeżeli głos rozchodzi się ze źródła na wszystkie strony, w postaci fal kulistych, wtenczas natężenie jest odwrotnie proporcyonalne do kwadratu odległości źródła od ucha. Energia wydana przez źródło w ciągu pewnego krótkiego czasu mieści się bowiem w cienkiej fali kulistej, której promień powiększa się jednostajnie z biegiem czasu. Ta sama ilość energii przenosi się więc na warstwy coraz większe, a mianowicie proporcyonalne do kwadratów promieni. Energia przypadająca na pewną określoną część powierzchni fali, n. p. na jednostkę powierzchni, albo na powierzchnię ucha, zmniejsza się więc tak, jak odwrotność kwadratu promienia.

Wszelkie urządzenia, zapobiegające wszechstronnemu rozpraszaniu się głosu, zwiększają jego natężenie. Za pomocą rury o gładkich ścianach, umieszczonej między uchem a źródłem głosu, można przewodzić głos bardzo daleko, prawie bez osłabienia. Cząstki powietrza w rurze drgają bowiem równolegle do jej osi, wskutek czego fale są płaskie (ryc. 162); amplituda drgań zmniejsza się w tym przypadku podczas postępu fal tylko o tyle, o ile ją niszczy tarcie powietrza o ściany rury. W podobny sposób działa t. zw. tuba, służąca do rozmawiania na większe odległości.

Ucho jest niezmiernie czułe na wstrząśnienia szybko się powtarzające, choćby nader słabe. Doświadczenia **Rayleigha** okazały, że dźwięk piszczałki o częstości 2730 na *sek* był słyszany w takiej odległości, że amplituda drgań powietrza wynosiła zaledwie 1 $\mu\mu$ (10^{-7} *cm*), a zatem największa prędkość ruchu drgającego cząstek powietrza w uchu była: $2\pi \times 2730 \times 10^{-7} = 0{\cdot}002$ *cm/sek*. Podług **Wiena** można jeszcze słyszeć drgania, których amplituda nie przenosi: 0·066 $\mu\mu$, największa prędkość: 0·10 μ/*sek*, a zwiększenie ciśnienia przez fale głosowe: 0·59 $\mu\mu$ rtęci. Liczby te odnoszą się wprawdzie do granicy wrażliwości ucha, wszelako w ogóle amplitudy i prędkości drgań głosowych, tudzież zgęszczenia i rozrzedzenia powietrza w falach przewodzących te drgania, są zwyczajnie nader małe; amplitudy drgania głosów zwyczajnych zawarte są w granicach 0·1 $\mu\mu$ do 1 μ.

Absorbcya i rozprószenie głosu. Drgania ciał sprężystych trwają zwykle krótko, albowiem tarcie wewnętrzne spożywa rychło energię ruchu drgającego i zamienia ją na ciepło (ust. 150). Temu samemu losowi ulegają także drgania przewodzone pod postacią fal. Nawet fale płaskie nie zachowują w rzeczywistości, podczas postępu swego, amplitudy stałej, lecz zanikają stopniowo, wskutek wewnętrznego tarcia cząstek przewodnika. Taką zmianę głosu, a więc energii dynamicznej, na ciepło, nazywamy absorbcyą. Oceniając zdolność jakiego ciała do dobrego, t. j. do donośnego przewodzenia głosu, powinniśmy zwrócić uwagę na wielorakie warunki: na jego gęstość, sprężystość i tarcie wewnętrzne. Celem zbadania dobroci przewodnictwa wycina się z różnych materyałów pręty, kształtu i rozmiarów ołówka; jednym końcem opiera się je na stole. albo na pudełku skrzypiec, a do drugiego końca przykłada się trzonek widełek strojowych, wprowadzonych w drganie. Tym sposobem przekonano się, że do najlepszych przewodników głosu należy suche drzewo jodłowe, stal, szkło; kauczuk albo korek przewodzą natomiast gorzej.

Osłabienie głosu w powietrzu — pominąwszy wpływ odległości — polega w małym tylko stopniu na absorbcyi. Znaczny natomiast wpływ ma rozpraszanie się głosu, zdarzające się wtenczas, gdy przewodnik głosu nie jest dokładnie jednolity. Każda. choćby drobna zmiana własności sprowadza częściowe odbicie się głosu, a wskutek tego rozprószenie jego w różnych kierunkach. W powietrzu, zwłaszcza podczas pory gorącej, unoszą się prądy nieregularne, wywołane różnicą temperatury i wilgoci; w tych warunkach zdarza się, że atmosfera na pozór jednolita i dla światła przeźroczysta mało jest przeźroczysta dla głosu. W nocy głos bywa donośniejszy; jedną z przyczyn tego zjawiska jest jednostajniejszy stan atmosfery.

209. Wysokość dźwięku. Struna drgająca szybko (często) wydaje dźwięk wyższy (cieńszy), aniżeli struna mająca dłuższy okres, t. j. mniejszą częstość drgania. Dźwięk syreny (ryc. 179) jest również przy szybkim obrocie wyższy, aniżeli przy powolnym. Ucho, wprawione do rozpoznawania dźwięków muzycznych, określa z łatwością wysokość każdego dźwięku, bez względu na to, z jakiego źródła on pochodzi, oraz bez względu na jego natężenie. Doświadczenie poucza nas, że wrażenie wysokości jest zawsze jednakowe, jeżeli częstość drgań jest ta sama. *Wysokość dźwięku zależy więc jedynie* *od częstości drgań;* od natężenia lub rodzaju wstrząśnień wysokość jest niezależna. Miarą częstości jest liczba drgań n przypadających na jednostkę czasu, a zatem odwrotność okresu T (ust. 22). Wstrząśnienia peryodyczne objawiają się zmysłowi słuchu tylko wtenczas jako dźwięki, jeżeli częstość ich leży mniej więcej w granicach od 20 albo 30 do 40000 drgań na sekundę. Drgania o częstości mniejszej, aniżeli 20 do 30, nie łączą się w dźwięk ciągły; słyszymy je jako pojedyncze uderzenia. Granice te nie są bezwzględnie stałe, u różnych osób różnią się one dość znacznie. Częstość 40 na sekundę można przyjąć jako granicę, przy której słyszymy już dźwięk o pewnej określonej wysokości, przydatny dla muzyki.

Prawo Dopplera. Wysokość zależy zawsze od liczby impulsów, które ucho odbiera w ciągu jednostki czasu. Otóż Doppler zwrócił uwagę na to, że liczba impulsów zmniejsza się, gdy ucho oddala się od źródła dźwięku; dźwięk wydaje się nam wtenczas niższy, aniżeli jest w istocie. Naodwrót, gdy odległość pomiędzy źródłem a uchem maleje, wysokość dźwięku podwyższa się. W istocie, wyobraźmy sobie, że ucho ucieka od ciała dźwięczącego z prędkością równą prędkości fal (340 *m/sek*); wówczas fale nie będą oczywiście wcale uderzały o ucho, nie usłyszymy więc dźwięku, t. j. pozorna wysokość jego będzie równa zeru. Przypuśćmy naprzód, że źródło dźwięku jest nieruchome, a ucho oddala się od niego z prędkością v. Drgania źródła następują po sobie w odstępach czasu równych okresowi T i rozprzestrzeniają się pod postacią fal, z prędkością c. Gdy ucho oddala się od źródła, wtenczas wstrząśnienia będą je trafiały w odstępach czasu $= T'$, większych, aniżeli okres drgania T. Każda fala trafiająca ucho przebywa drogę o vT' dłuższą, aniżeli poprzedzająca, wskutek tego też biegnie o czas $\frac{vT'}{c}$ dłużej, aniżeli poprzedzająca. Odstęp czasu T' między uderzeniami o ucho dwu następujących po sobie fal wynosi zatem:

$$T' = T + \frac{vT'}{c}, \text{ skąd } \frac{T}{T'} = \frac{c - v}{c}.$$

Podstawiwszy tu

$$T = \frac{1}{n}, \; T' = \frac{1}{n'},$$

gdzie n oznacza rzeczywistą, n' pozorną, czyli słyszaną wysokość dźwięku, znajdziemy:

$$n' = n\left(1 - \frac{v}{c}\right).$$

Jeżeli ucho zbliża się do źródła, wtenczas znak prędkości v należy zmienić na przeciwny.

Zmiana wysokości nie zależy od prędkości ucha względem źródła dźwięku, lecz względem przewodnika głosu. Jeżeli bowiem ucho jest nieruchome, a źródło dźwięku oddala się od niego, wtenczas znajdziemy inne wyrażenie na n'. Rozumowanie podobne do poprzedzającego daje w tym razie:

$$n' = \frac{n}{1 + \frac{v}{c}}.$$

W obu przypadkach, jeżeli stosunek $\frac{v}{c}$ jest mały, możemy w przybliżeniu napisać:

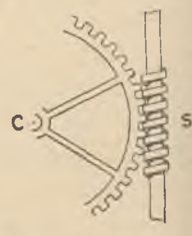
$$n' = n\left(1 - \frac{v}{c}\right).$$

Zjawisko uzasadnione wyżej było sprawdzone drogą doświadczalną; dźwięk trąbki umieszczonej na lokomotywie podwyższa się, gdy pociąg zbliża się ku nam, zniża się następnie, gdy pociąg się oddala. Prawo Dopplera stosuje się także do drgań świetlnych i znalazło ważne zastosowanie w astronomii fizycznej (tom II, ust. 159, 227).

210. Mierzenie wysokości dźwięków; strojenie. Najpewniejszy sposób zmierzenia częstości drgań, t. j. wysokości pewnego danego dźwięku, polega na użyciu syreny, której urządzenie opisaliśmy w ust. 207. Wprowadzamy ten przyrząd w ruch obrotowy i przyśpieszamy stopniowo prędkość kątową krążka, dopóki wysokość dźwięku syreny nie zrówna się z wysokością dźwięku badanego, co przy niejakiej wprawie rozpoznamy łatwo słuchem. Niechaj N oznacza liczbę obrotów krążka na sekundę, i liczbę otworów w krążku, na obwodzie tego koła, ku któremu skierowana jest dmuchawka, natenczas wysokość szukaną n obliczymy podług wzoru $n = iN$. Za pomocą syreny można również stroić piszczałki, struny i inne przyrządy muzyczne; częściej używa się w tym celu widełek strojowych, które opiszemy w rozdziale następnym. Widełki mogą jednak służyć do strojenia dopiero wtenczas, gdy wysokość dźwięku ich zostanie dokładnie wyznaczoną za pomocą syreny lub innym sposobem.

Najważniejszą częścią pomiaru jest wyznaczenie liczby obrotów N krążka syreny w ciągu sekundy. Do pomiaru tego służy osobny przyrząd (liczydło), liczący ilość obrotów dokonanych w ciągu odmierzonego czasu. Obok osi krążka osadzone jest, na osobnej osi C (ryc. 180), koło zębate, liczące 100 zębów, połączone stale ze wskazówką posuwającą się na podziałce podzielonej na 100 równych odstępów. Zęby koła tego zachodzą w gwint śrubowy S, nacięty na osi krążka syreny.

Przy każdym obrocie osi syreny koło posuwa się o jeden ząb, a wskazówka o jedną kreskę na podziałce. Policzywszy ilość kresek wskazanych podczas 10—20 sekund, znajdziemy łatwo liczbę obrotów N osi syreny w ciągu jednej sekundy. Ażeby ułatwić liczenie setek obrotów osi syreny, t. j. ilości całkowitych obrotów koła zębatego, umieszcza się obok tego koła drugie koło zębate, osadzone luźnie na tej samej osi C, mające jednak tylko 99 zębów, które również zazębiają się w gwinty śruby S. Podczas 100 obrotów osi syreny pierwsze koło obraca się jeden raz; koło pomocnicze obraca się również jeden raz, ale w dodatku posuwa się jeszcze o jeden ząb naprzód. Ilość zębów, o którą drugie koło wyprzedza pierwsze w ciągu pewnego czasu, wskazuje ilość setek obrotów dokonanych.



Ryc. 180.

211. Dudnienie. Dokładne wyrównanie wysokości dwu dźwięków, przy mierzeniu wysokości zapomocą syreny, albo przy strojeniu, wymaga wprawy w poznawaniu i odróżnianiu dźwięków, a więc dobrego słuchu muzycznego. Opiszemy tu zjawisko ułatwiające porównywanie częstości drgań dwu dźwięków mających wysokości mało się różniące, nawet niewprawnemu uchu, a wskutek tego wielce pomocne przy strojeniu. Jeżeli dwa źródła dźwięków mają jednakowe częstości drgania, wówczas różnica faz obu ruchów drgających jest stała; jeżeli n. p. fale zgęszczenia, wysłane przez nie w pewnej chwili, trafiają ucho jednocześnie, wtenczas także wszystkie następne zgęszczenia i rozrzedzenia będą się tam jednocześnie spotykały. Dźwięki takie wzmacniają się trwale. Własności tej nie mają dźwięki różniące się cokolwiek wysokością. Nie płyną one jednostajnie obok siebie, lecz osłabiają się w pewnych równych odstępach czasu, albo nawet niszczą się wzajemnie. Wrażenie dźwięku złożonego *nie jest w tym przypadku jednostajne, lecz przerywane;* głos wzmaga się naprzemian i słabnie, sprawiając wrażenie dudnienia. Wytłumaczenie tego zjawiska jest łatwe. Podaliśmy je w ust. 25 *b*, gdzie była mowa o składaniu ruchów drgających, mających różne okresy. Ryc. 21 (str. 63) objaśnia peryodyczne wzmaganie się i opadanie amplitudy drgania wypadkowego, gdy drgania składowe mają częstości nie wiele różne. Z twierdzenia dowiedzionego we wspomnianym ustępie wynika, iż *częstość dudnień wywołanych przez dwa jednoczesne dźwięki równa się różnicy ich wysokości.* Jeżeli więc n i n' oznaczają częstości danych dźwięków, natenczas liczba dudnień (t. j. wzmocnień lub osłabień) w ciągu sekundy będzie $N = n - n'$. Wyraźne dudnienia można wywołać n. p. za pomocą dwu piszczałek dających dźwięki nie wiele różnej wysokości, za pomocą dwu syren i t. p. Mając dostroić dźwięk syreny do jakiegokolwiek dźwięku, którego wysokość ma być zmierzona, powiększamy stopniowo prędkość obrotu syreny, dopóki nie usłyszymy dudnień tak powolnych, żeby można było dogodnie policzyć ich częstość, n. p. 4 na sek. Wysokość dźwięku badanego będzie równa wysokości dźwięku syreny, powiększonej o częstość dudnień.

212. Skale muzyczne. Dwa są sposoby oznaczenia wysokości dźwięków: jeden, fizyczny, polega na określeniu częstości drgań, jak to opisaliśmy w poprzedzających ustępach; drugi na oznaczeniu położenia i nazwy pewnego dźwięku na jednej z używanych skal muzycznych.

Dźwięki używane w muzyce mają częstości zawarte w granicach od 40 do 4000 drgań na sekundę (w liczbach okrągłych). W zakresie tych granic leży nieskończenie wiele dźwięków, o wysokościach pośrednich. W muzyce jednakowoż umiejętnej niektóre tylko z tych dźwięków bywają używane i to w ilości stosunkowo nie wielkiej. Ucho wykształcone muzycznie poznaje mianowicie pewne powinowactwa między dźwiękami o różnych wysokościach, jeżeli częstości ich mają pewne względem siebie stosunki i takimi tylko dźwiękami posługuje się w muzyce. Jeżeli n. p. słyszymy dwa dźwięki, z których jeden wykonywa dwakroć więcej drgań na sekundę, aniżeli drugi, wtenczas uderza nas odrazu blizkie ich pokrewieństwo; powiadamy, że jeden jest **oktawą** drugiego. Dźwięk 400 na *sek* jest wyższą oktawą dźwięku 200; dźwięk 1500 jest niższą oktawą dźwięku 3000 i t. p. W drugim z tych przykładów różnica częstości jest daleko większa, aniżeli w pierwszym, lecz stosunek wysokości albo częstości jest w obu przypadkach ten sam, równy 2. Pokrewieństwo dźwięków nie zależy zatem od różnicy, lecz od stosunku ich wysokości. Dźwięki, których częstości mają się do siebie jak 2 do 3, rozpoznajemy również jako pokrewne i nazywamy drugi **kwintą** pierwszego. Jeżeli n. p. na krążku syreny umieścimy na jednym obwodzie 8, na drugim 12 otworów (jak na ryc. 179), wtenczas dźwięk drugiego obwodu będzie kwintą pierwszego, albowiem stosunek częstości wynosi $8 : 12 = 2 : 3$. Zmiana prędkości obrotu syreny zmienia wysokości obu dźwięków, nie zmienia jednak ich stosunku, wskutek czego wyższy będzie zawsze kwintą niższego.

Stosunek wysokości dwu dźwięków nazywamy interwałem, albo stopniem zawartym między nimi. W muzyce bywają używane tylko takie dźwięki, których interwały mogą być wyrażone przez stosunki niewielkich całkowitych liczb. Tak n. p. interwały oktawy i kwinty wyrażają się stosunkami $1 : 2$ i $2 : 3$. Innym interwałom muzycznym odpowiadają również proste stosunki częstości. Fakt wyrażony w powyższem twierdzeniu został sprawdzony przez fizyków za pomocą pomiarów częstości dźwięków, wprowadzonych do muzyki i śpiewu przez uczonych i nieuczonych muzyków, którzy przy wyborze tych dźwięków kierowali się tylko względami prostoty i piękności muzycznej. Fakt ten nie jest zresztą przypadkowym, daje się on naukowo uzasadnić, jak to obaczymy w ust. 216.

Przyjąwszy jakikolwiek dźwięk, mający pewną określoną wysokość, jako dźwięk pierwszy, albo początkowy, możemy przyłączyć doń, na zasadzie interwałów przyjętych w muzyce, cały szereg innych dźwięków pokrewnych, które będą wówczas miały wysokości również zupełnie określone.

Dźwięk służący jako punkt wyjścia, nazywa się **tonem normalnym** a zbiór wszystkich należących do niego, używanych w muzyce dźwięków, stanowi **skalę**.

U rozmaitych narodów i w różnych wiekach uznawano rozmaite interwały jako dozwolone w muzyce. Ograniczymy się tutaj do jednej skali, używanej w nowoczesnej muzyce europejskiej. W obrębie interwału jednej oktawy, t. j. między dźwiękiem o pewnej częstości n, a dźwiękiem o częstości $2n$, mieści się siedm interwałów mniejszych, a zatem sześć dźwięków o wysokościach następujących:

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
$n,$	$\frac{9}{8}n,$	$\frac{5}{4}n,$	$\frac{4}{3}n,$	$\frac{3}{2}n,$	$\frac{5}{3}n,$	$\frac{15}{8}n,$	$2n.$

Drugi z tych dźwięków nazywa się *sekundą* względem pierwszego, zwanego dźwiękiem zasadniczym skali, albo toniką. Trzeci, odpowiadający interwałowi $\frac{5}{4}$ względem toniki, nazywa się *tercyą większą;* dalsze mają nazwy: *kwarty, kwinty, seksty większej, septymy większej* i *oktawy.* Na tem jednak nie kończy się jeszcze skala; biorąc oktawę $2n$ jako nową tonikę, możemy przybrać do niej sekundę oktawy: $\frac{9}{8}2n$, tercyę oktawy i t. d.; podobnież możemy przedłużyć szereg na lewo, dobierając według tej samej zasady dźwięki niższe niż n. Zbiór dźwięków uzyskany w ten sposób stanowi t. zw. skalę diatoniczną naturalną „dur“, zbudowaną na dźwięku o częstości n. Skala ta składa się z szeregu oktaw, każda zaś oktawa zawiera siedm dźwięków, których wysokości mają napisane wyżej stosunki.

Interwały pomiędzy sąsiednimi dźwiękami powyższej skali nie są równe; obliczywszy bowiem stosunki wysokości dźwięków następujących bezpośrednio po sobie, znajdziemy takie liczby:

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	

t. z. 1·125; 1·111; 1·067; 1·125; 1·111; 1·125; 1·067.

Znajdujemy więc pięć interwałów większych, mających wartości mało się różniące: $\frac{9}{8}$ albo $\frac{10}{9}$, nazwanych całymi tonami (większy i mniejszy), tudzież dwa interwały mniejsze: $\frac{16}{15}$, zwanych półtonami większymi. Pomiędzy dźwiękami różniącymi się w wysokości o cały ton, znajduje się tedy miejsce na umieszczenie dźwięku pośredniego, którego interwały z obu dźwiękami sąsiednimi będą prawie równe półtonowi. Tak n. p. interwał $\frac{10}{9}=\frac{25}{24}\times\frac{16}{15}$ może być rozłożony na półton mniejszy $\frac{25}{24}=1{\cdot}042$ i półton większy: $\frac{16}{15}=1{\cdot}067$. Wstawiwszy rzeczone półtony, uzyskamy t. zw. skalę chromatyczną naturalną, złożoną z dwunastu niezupełnie równych półtonów. Częstości dźwięków składających tę skalę mają następujące wartości:

$$\frac{25}{24}n,\quad \frac{9}{8}\times\frac{25}{24}n,\quad \frac{4}{3}\times\frac{25}{24}n,\quad \frac{3}{2}\times\frac{25}{24}n,\quad \frac{5}{3}\times\frac{25}{24}n,$$

$$\begin{array}{cccccccc} n, & \frac{9}{8}n, & \frac{5}{4}n. & \frac{4}{3}n, & \frac{3}{2}n. & \frac{5}{3}n, & \frac{15}{8}n, & 2n. \\ \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} & \mathrm{IV} & \mathrm{V} & \mathrm{VI} & \mathrm{VII} & \mathrm{VIII} \end{array}$$

Interwały sąsiednich dźwięków tej skali są półtonami; nie są jednak dokładnie równe, lecz mają jedną z następujących wartości: $\frac{25}{24}=1{\cdot}042$, $\frac{27}{25}=1{\cdot}08$, $\frac{16}{15}=1{\cdot}067$. Oprócz skal naturalnych, które tu opisaliśmy, są jeszcze inne, nad któremi nie będziemy się zatrzymywali *).

Ilość dźwięków potrzebnych dla tych skal różnych jest bardzo wielka. Na klawiaturze fortepianu wymagałyby one nierównie więcej klawiszów niż ich bywa zwyczajnie. Ze względu na fortepian i inne instrumenty muzyczne, w których dźwięki są gotowe i nie mogą być według upodobania zmieniane, zgodzono się poświęcić czystość interwałów naturalnych i wyrównano wszystkie półtony. W muzyce praktycznej używa się więc t. zw. skali jednostajnie utemperowanej, w której każda oktawa składa się z dwunastu równych półtonów. Przyjąwszy dźwięk o częstości n jako zasadniczy, oznaczywszy nadto przez x wartość półtonu ujednostajnionego, uzyskamy następujące dźwięki w obrębie jednej oktawy:

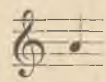
$$\begin{array}{ccccccccccccc} & xn & & x^3n & & & x^6n & & x^8n & & x^{10}n & & \\ n & & x^2n & & x^4n & x^5n & & x^7n & & x^9n & & x^{11}n & x^{12}n \\ \mathrm{I} & & \mathrm{II} & & \mathrm{III} & \mathrm{IV} & & \mathrm{V} & & \mathrm{VI} & & \mathrm{VII} & \mathrm{VIII} \end{array}$$

---

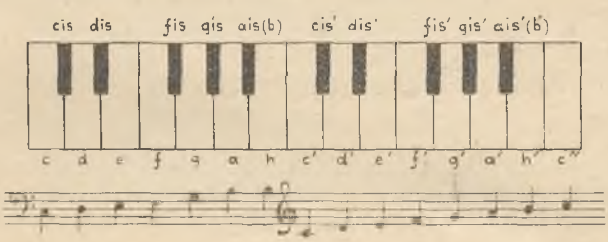
*) W t. zw. skali diatonicznej »moll« znajduje się zamiast tercyi większej, tercya mniejsza $^6/_5\ n$, wyższa tylko o półton $^{16}/_{15}$ od sekundy; zamiast seksty większej użyta jest w tej skali mniejsza: $^8/_5\ n$, również tylko o półton wyższa od kwinty; nakoniec zamiast większej, mniejsza septyma: $^9/_5\ n$, niższa o cały ton mniejszy od oktawy.

Wysokość oktawy wyraża się liczbą $x^{12}n$, co powinno wynosić $2n$; dostajemy stąd równanie: $x^{12} = 2$, przeto $x = \sqrt[12]{2} = 1{\cdot}05946$. Widzimy więc, że półton tej skali różni się tylko nieznacznie od półtonów naturalnych, wskutek czego nieczystość interwałów nie razi zbytecznie ucha.

Wskutek przyjętej ogólnie umowy, służy obecnie jako punkt wyjścia przy budowie skali ton normalny, mający częstość 435 drgań na sekundę. Dźwięk ten oznacza się literą *a'*, a w piśmie muzycznem znakiem:



Dźwięk ten odpowiada drugiej strunie na skrzypcach, licząc od najcieńszej. Na klawiaturze fortepianu dźwiękowi temu odpowiada biały klawisz, znajdujący się cokolwiek na prawo od środka klawiatury. Następne białe klawisze oznaczano dawniej po kolei literami *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*. Obecnie liczy się oktawy od dźwięków oznaczonych literą *c;* zamiast litery *b* używa się *h*. Zmiana ta zaleca się



Ryc. 181.

tem, że dźwięki uzyskane w porządku *c*, *d*, *e*, *f*, *g*. *a*, *h*, tworzą skalę diatoniczną. Dźwięki wstawione między *c* i *d*, *d* i *e*, *f* i *g*, *g* i *a*, *a* i *h* noszą nazwy: *cis* (albo *des*), *dis* (albo *es*), *fis* (albo *ges*), *gis* (albo *as*), *ais* (albo *b*). Dźwiękom tym odpowiadają czarne klawisze na fortepianie. Dźwięki, których interwał równa się oktawie, oznaczają się tą samą literą; tak n. p. dla wyższych oktaw tonu normalnego przyjęto następujące znaki: $a' = 435$; $a'' = 870$; $a''' = 1740$ $a'''' = 3480$; dla niższych $a = 217{\cdot}5$; $A = 108{\cdot}75$; $A_1 = 54{\cdot}375$; $A_{11} = 27{\cdot}188$. Inne dźwięki oznacza się w taki sam sposób; tak n. p. oktawa, w obrębie której znajduje się ton normalny, składa się z następujących dźwięków: *c'*, *cis'*, *d'*, i t. d. Ażeby ułatwić przegląd podajemy wyżej (ryc. 181) rysunek dwu środkowych oktaw na klawiaturze fortepianu, tudzież nazwy i znaki muzyczne odpowiednich dźwięków. Na skrzypcach znajdują się cztery struny, wydające dźwięki postępujące w interwałach kwint, mianowicie: *g*, *d'*, *a'*, *e''*; częstości ich, według skali jednostajnej, wynoszą: 193·77; 290·327; 435; 651·763 na sek; według skali naturalnej należałoby je stroić na częstości: 193·333; 290; 435; 652·5.

TABLICA
wysokości dźwięków muzycznych, według skali jednostajnej,
zbudowanej na tonie normalnym: a' = 435.

	$C_{11}—H_{11}$	$C_1—H_1$	$C—H$	$c—h$	$c'—h'$	$c''—h''$	$c'''—h'''$	$c''''—h''''$
c	16·17	32·33	64·66	129·3	258·7	517·3	1035	2069
cis	17·13	34·25	68·51	137·0	274·0	548·1	1096	2192
d	18·15	36·29	72·58	145·2	290·3	580·7	1161	2323
dis	19·23	38·45	76·90	153·8	307·6	615·2	1230	2461
e	20·37	40·74	81·47	162·9	325·9	651·8	1304	2607
f	21·58	43·16	86·31	172·6	345·3	690·5	1381	2762
fis	22·86	45·72	91·45	182·9	365·7	731·6	1463	2926
g	24·22	48·44	96·89	193·8	387·5	775·1	1550	3100
gis	25·66	51·32	102·6	205·3	410·6	821·2	1642	3285
a	27·19	54·38	108·8	217·5	435·0	870·0	1740	3480
ais	28·80	57·60	115·2	230·4	460·9	921·7	1843	3687
h	30·52	61·03	122·1	244·1	488·3	976·5	1953	3906

213. Fonograf. Zastanawialiśmy się poprzednio nad wielkością i częstością drgań głosowych, t. j. nad temi własnościami, od których zależy natężenie i wysokość dźwięków. Zostaje jeszcze pytanie, jakiego rodzaju ruchy drgające wykonywają cząstki powietrza, przewodzące fale głosowe, tudzież cząstki ciał, wydających dźwięki. Najprostszy sposób uzyskania odpowiedzi na to pytanie, polega na zastosowaniu metody wykreślnej. Do ciała drgającego przytwierdzamy lekki rysik, a pod rysikiem posuwamy jednostajnie tabliczkę, na której tenże kreśli linię falową. Sposób ten opisaliśmy już w ust. 23; ryc. 15 objaśnia powstawanie linii falowej w pewnym ruchu drgającym, ryc. 16 wyobraża przyrząd kreślący linię falową, odpowiadającą drganiu widełek strojowych. Linie falowe kilku rodzajów ruchu drgającego przedstawione są na ryc. 20, 21, 22. Mając linię falową, wiemy wszystko, co o pewnym ruchu drgającym powiedzieć można; znajdujemy bowiem na niej amplitudę i częstość ruchu, a zarazem prawo, według którego odchylenie zmienia się w ciągu każdego drgania. Jakoż, przesuwając jednostajnie tabliczkę, na której nakreślona jest jakakolwiek linia falowa, poza kartką papieru, w której wycięliśmy wąską szparę, obaczymy w szparze punkt, posuwający się tam i napowrót, stosownie do tego prawa ruchu, które wyobraża dana linia falowa. Ruchy drgające ciał wydających dźwięki (ust. 207) są ruchami peryodycznymi. Z tego wynika, że linie falowe odpowiadające dźwiękom składają się z szeregu odcinków zupełnie równych, przystających do siebie. Każdy z tych odcinków należy do jednego drgania; liczba ich, przypadająca na tę długość, którą tabliczka przebiega w jednostce czasu, równa się częstości drgań uważanego dźwięku.

Wrażenie, jakie dźwięk pewien sprawia w uchu, zależy jedynie od rodzaju drgania, bądź to powietrza przewodzącego głos, bądź też części samego ucha. Możemy więc twierdzić, że *każdy dźwięk może być wyobrażony wykreślnie za pomocą odpowiadającej mu linii falowej.*

Ryc. 182.

Pomiędzy rozmaitymi przyrządami kreślącymi linie falowe, bądź to dla ruchów drgających ciał wydających dźwięki, bądź też dla drgań cząstek powietrza przewodzącego głos, w pierwszym rzędzie zasługuje na uwagę fonograf, wynaleziony przez Edisona. Przyrząd ten nietylko kreśli linię falową dla drgań powietrza, ale dozwala nadto, za pośrednictwem uzyskanej linii falowej, odtworzyć powtórnie dźwięk pierwotny; tem samem stwierdza wypowiedziane wyżej twierdzenie. Nie wdając się w opis rzeczywistej budowy tego, dziś już znacznie wydoskonalonego przyrządu, objaśnimy tylko zasadę, na której ona polega. Na dnie drewnianej lejkowatej muszli, którą ryc. 182 wyobraża w przecięciu, znajduje się okrągły otwór *O*. Otworem tym fale głosowe wnikają do wnętrza muszli, zamkniętej u spodu cienką, podatną błoną B (z blaszki metalowej, albo z łyszczku). Pod błoną znajduje się krótka stalowa sprężyna, przytwierdzona jednym końcem S stale do muszli; na drugim końcu, swobodnym, osadzony jest kolec k, nieco przytępiony. Między sprężyną a błoną umieszczone są dwa kawałki kauczuku. Jeżeli silne fale głosowe trafiają błonę przez otwór O w muszli, wówczas zostaje ona wprowadzona w drganie; drganie to przenosi się za pośrednictwem kawałków kauczuku na sprężynę i na kolec k. Błona razem ze sprężyną zachowuje się więc jako nader podatny tłok, którego zadaniem jest przejmować wstrząśnienia powietrza. Kauczukowa podkładka między błoną a sprężyną służy do szybkiego stłumienia tych drgań, które błona i sprężyna mogłyby wykonywać na mocy własnej sprężystości, a które rzeczywiście nie mają nic wspólnego z drganiami powietrza, które mamy zapisywać. Wskutek tego urządzenia, kolec k drga tak samo, jak cząstki powietrza przewodzącego dźwięk, albo jak ciało, które go wydaje.

Celem nakreślenia linii falowej przesuwamy pod kolcem k tabliczkę AC, z materyału plastycznego (staniol, wosk), ruchem jednostajnym. Kolec drgający wciska się w tabliczkę i wytłacza na niej rowek o zmiennej głębokości, którego podłużny przekrój, czyli profil, stanowi właśnie linię falową danego dźwięku. Grzbiety i doliny tej linii są bardzo drobne, jednakowoż za pomocą stosownego przyrządu rysunkowego można je powiększyć i dokładniej zbadać. W dawniejszych fonografach Edisona tabliczka była mosiężna; materyałem plastycznym był naklejony na niej papier cynowy (staniol). W nowszych używa się materyału podobnego do wosku. Za pomocą fonografu można kreślić linie falowe nietylko dla dźwięków różnych instrumentów muzycznych, ale także dla mowy ludzkiej. Jeżeli cofniemy tabliczkę, razem z wyrzeźbioną na niej linią falową, do pierwotnego miejsca i przesuniemy ją powtórnie pod kolcem, natenczas wypukłości i zagłębienia jej wprowadzą kolec, a razem z nim błonę, w ruch drgający, który będzie prawie wiernem powtórzeniem pierwotnego ruchu. Wskutek tego błona staje się źródłem głosu i powtarza dźwięki, lub mowę, dla których nakreśliliśmy linię falową.

214. Barwa dźwięku. Linie falowe różnych dźwięków bywają nieskończenie różnorodne; kształt ich zależy od rodzaju drgania, a więc od sposobu powstania dźwięku. Tak n. p. dźwięk syreny Seebecka (ryc. 179), powstający wskutek krótkich, urywanych, lecz mimo to dość miękkich podmuchów powietrza, wyciska na fonografie linię, którą widzimy w powiększeniu na ryc. 183*A*. Jeżeli obok krążka z otworami osadzimy na osi syreny koło zębate, mające tyleż zębów, ile krążek otworów, a do zębów koła przyłożymy kawałek kartonu, natenczas usłyszymy podczas obrotu dźwięk tej samej wysokości, jak dźwięk syreny, lecz znacznie ostrzejszy Fonograf wykreśli w tym razie krzywą (ryc. 183*B*), która załamuje się ostro w miejscach odpowiadających uderzeniom kartonu o zęby. Widełki strojowe wydają znowu dźwięk miękki i pozbawiony wszelkiej ostrości; linię falową tego dźwięku wyobraża ryc. 183*C*. W tych trzech przykładach mamy dźwięki jednakowej wysokości, mimo to wrażenie słuchu jest w każdym przypadku inne, tak iż natychmiast

Ryc. 183.

zdołamy odróżnić dźwięk syreny od dźwięku koła zębatego, lub widełek. Otóż tę właściwość, która znamionuje i odróżnia tak dobitnie dźwięki wywołane za pomocą różnych przyrządów, określamy nazwą: barwa dźwięku. Doświadczenia robione z fonografem przekonywają, że gdy wysokość i natężenie zależą od częstości i amplitudy, albo energii drgania, to *barwa zależy od rodzaju drgania, t. j. od prawa, według którego odchylenie cząstki drgającej zmienia się z biegiem czasu*. Prawo to możemy wyobrazić wykreślnie dla każdego dźwięku za pomocą linii falowej; każdej przeto formie linii falowej odpowiada pewna określona barwa dźwięku.

215. Analiza dźwięków. Ruchy drgające ciał wydających dźwięki, tudzież ruchy cząstek powietrza, przewodzącego je, są tylko w nielicznych. wyjątkowych przypadkach, ruchami drgającymi prostymi. Zwykle są to ruchy bardziej zawiłe, złożone. Owóż dowiedzieliśmy się w ust. 26, że *wszelki ruch drgający*, t. j. ruch powtarzający się peryodycznie w równych odstępach czasu, *można uważać jako wypadkowy pewnej liczby ruchów drgających prostych, mających częstości współmierne, t. j. proporcyonalne do szeregu liczb 1, 2, 3, 4, 5*... Amplitudy i fazy tych ruchów składowych są dla każdego ruchu peryodycznego zupełnie określone, t. j. pewien ruch peryodyczny może być rozłożony na ruchy drgające proste (wahadłowe) w jeden tylko, jedyny sposób.

Naodwrót, składając pewną ilość ruchów drgających prostych, przedstawionych równaniami:

$$s_1 = a_1 \sin (2\pi \,.\, n t + \delta_1); \quad s_2 = a_2 \sin (2\pi \,.\, 2 n t + \delta_2);$$
$$s_3 = a_3 \sin (2\pi \,.\, 3 n t + \delta_3) \text{ i t. d.}$$

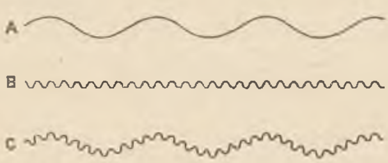
w których amplitudy a i fazy δ są odpowiednio dobrane, możemy utworzyć wszelki dowolny ruch drgający. Przykład takiego postępowania daje ryc. 22 (ust. 26). Składając ruchy drgające proste, wyobrażone tam przez linie falowe f_1, f_2, f_3 i t. d., zbliżymy się stopniowo do linii falowej kształtu $ABCD$, wyobrażającej pewien ruch drgający złożony.

Sposób ten rozkładu, czyli rozbioru drgań jakichkolwiek na drgania proste. zawdzięczamy Fourierowi. Nie należy jednak sądzić, jakoby to był jedyny możliwy sposób rozłożenia ruchu peryodycznego na ruchy składowe. Każdy ruch dowolny można rozłożyć na składowe nieskończenie wielorakimi sposobami, podobnie jak w arytmetyce każdą sumę możemy rozłożyć na najrozmaitsze składniki. Są jednak dwa powody, dla których rozkład według reguły Fouriera, na ruchy drgające proste, mające okresy spółmierne, zasługuje przed innymi na uwagę. Powody te zawarte są w następujących prawach, odkrytych przez Ohma i Helmholtza:

Prawo Ohma. *Ucho posiada zdolność rozkładania każdego dźwięku na dźwięki składowe, odpowiadające ruchom drgającym prostym.* Dźwięki wywołane przez drgania proste są jedynymi, w których ucho nie odróżnia żadnych składników; dźwięki takie nazywają się tonami.

Według reguły Fouriera każdy ruch peryodyczny można rozłożyć w jeden określony sposób na ruchy drgające proste. Jest to reguła matematyczna, a nie przyrodnicza. Nie ma w istocie konieczności przyjmować z góry, żeby ucho w ogólności rozkładało dźwięki. albo żeby stosowało się do tej, a nie innej reguły rozkładu. Ale Ohm dostrzegł, że wrażenia dźwięków nie są jednolite i niepodzielne. Słuchając uważnie, przekonamy się, że w przeważnej ilości dźwięków można usłyszeć szereg głosów składowych o różnych wysokościach. Ścisłe dochodzenia wykazały, że częstości tych głosów mają się zawsze jak liczby 1, 2, 3, 4, 5 i t. d. Natężenia ich bywają dla różnych dźwięków różne, nierzadko brakuje niektórych. Doświadczenie okazało nadto, że wrażenia słuchu, wywołane przez ruchy drgające proste, są niepodzielne; są to pierwiastki, z których składają się wszystkie wrażenia głosu, jakie kiedykolwiek odbieramy. Te wyniki badań fizyologicznych wypowiedziane są właśnie w prawie Ohma. Reguła rozkładu drgań, jedna z wielu możliwych, podana została przez Fouriera jako prawo matematyki; dopiero dzięki twierdzeniu Ohma stała się prawem przyrodniczem. Odpowiada jej w akustyce twierdzenie: *każdy dźwięk składa się z szeregu dźwięków, odpowiadających ruchom drgającym prostym, czyli z tonów.* Tony te nie są jakiekolwiek; częstości ich mają się do siebie jak liczby 1, 2, 3... Szereg taki tonów o częstościach n, $2n$, $3n$, $4n$... nazywamy szeregiem tonów harmonicznych. Prawo Ohma możemy tedy wypowiedzieć krótko, jak następuje: *każdy dźwięk jest sumą pewnej ilości tonów harmonicznych.* Najniższy z tych tonów, zwykle najsilniejszy, nazywa się tonem zasadniczym. Częstość jego n nadaje cechę wysokości całemu dźwiękowi. Dalsze tony harmoniczne, zależnie od ilości i natężenia swego, nadają całemu dźwiękowi tę lub owę barwę.

Uzasadnienie prawa Ohma polega na właściwościach budowy ucha i na ogólnych prawach drgania ciał sprężystych, o których będzie niżej mowa. Zdolność ucha do rozdzielania kilku dźwięków, słyszanych jednocześnie, znana jest z codziennych doświadczeń: wśród ogólnego dźwięku, wydawanego n. p. przez orkiestrę, złożoną z kilkunastu instrumentów, rozróżniamy z łatwością głosy skrzypiec, fletu, trąb i t. d. Należy przytem pamiętać, że wszystkie te dźwięki wstrząsają jednocześnie te same cząstki powietrza w przewodzie ucha. Cząstki powietrza wykonywają więc ruchy niezmiernie złożone, a mimo to ucho śledzi i odczuwa każdy ruch i każdy dźwięk składowy z osobna. Ta sama zdolność ucha, która umożliwia odróżnienie pewnego dźwięku wśród wielu innych, służy także przy rozłożeniu dźwięku na tony. Wyobraźmy sobie, że na tabliczce fonografu wykreśloną została linia falowa prosta *A* (ryc. 184) za pomocą widełek strojowych, które, jak się dowiemy, wydają dźwięk złożony niemal z jednego tylko tonu. Weźmy następnie inne widełki, dające ton wyższy, odpowiadający n. p. linii *B* i poprowadźmy tabliczkę powtórnie pod kolcem fonografu, trzymając mniejsze widełki przy muszli. Na pierwotnej linii falowej *A* wyrzeźbi się druga linia *B*, przez co uzyskamy linię złożoną kształtu *C*. Otóż jeżeli wprowadzimy błonę fonografu w drganie, za pomocą tej linii złożonej, wówczas usłyszymy dźwięk, w którym przy należytem skupieniu uwagi, rozróżnimy obydwa tony, które złożyły się na odpowiednią linię falową. W przykładzie tym drugi ton jest o tyle wyższy i słabszy od pierwszego, że już z kształtu linii falowej można poznać istnienie obu tonów. Przypatrzmy się



Ryc. 184.

jednak ryc. 20 (str. 61), mianowicie *C* albo *D*, które złożone są z linii *A* i *B*. Z kształtu tych linii nie poznalibyśmy ani wysokości, ani natężenia tonów składowych, a jednak ucho odróżnia z łatwością obydwa w drganiu powietrza, odpowiadającem linii złożonej.

Otóż podobnie jak słyszymy oddzielnie tony dwu widełek uderzonych jednocześnie, tak też usłyszymy te tony w dźwięku wydanym przez ciało, którego drganie jest sumą takich ruchów. W dźwiękach muzycznych bywają tylko niższe tony harmoniczne tak silne, że można je usłyszeć; od 6-go albo 10-go począwszy, mają one nader małe natężenie. Tony harmoniczne tworzą we wszystkich dźwiękach te same interwały z tonem pierwszym, albo zasadniczym, bo częstości ich są całkowitemi wielokrotnościami tonu zasadniczego. Natężenia ich bywają jednak w różnych dźwiękach różne; wielu tonów harmonicznych brakuje zupełnie.

Przyjąwszy jakąkolwiek częstość n dla tonu zasadniczego, otrzymamy następujący szereg tonów harmonicznych: 2-gi ma częstość $2n$, jest więc oktawą zasadniczego; częstość trzeciego wynosi $3n$, jest to kwinta oktawy; 4-ty jest oktawą oktawy; 5-ty jest tercyą większą drugiej oktawy; 6-ty jest jej kwintą (6:4 czyli 3:2); dla siódmego nie znajdziemy nazwy w skali diatonicznej, gdyż interwału 7:4 nie ma w tej skali — zresztą jest on blizki mniejszej septymy; 8-my jest trzecią oktawą zasadniczego i t. d. Tak n. p. do tonu zasadniczego c należy następujący szereg tonów harmonicznych:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10...
c	c'	g'	c''	e''	g''	(b'')	c'''	d'''	e''''...

Tony harmoniczne można łatwo usłyszeć w dźwiękach fortepianu. Uderzmy n. p. lekko klawisz g', aby zwrócić uwagę na ten ton; następnie, puściwszy g', uderzmy dość silnie klawisz c. Usłyszymy wówczas wyraźnie 3-ci ton harmoniczny g'; również łatwo można usłyszeć c', c'', e''.

Prawo Helmholtza. Tony harmoniczne, składające dźwięk jakikolwiek, nie są tylko podmiotowem (subjektywnem) zjawiskiem słuchu; one[1]) *istnieją rzeczywiście (objektywnie) w powietrzu przewodzącem dźwięk, t. j. każdy z ruchów drgających prostych, wchodzących w skład ruchu złożonego, może wywołać takie objawy dynamiczne, jak gdyby sam jeden istniał w powietrzu.*

Ruchy drgające proste, a raczej fale proste, posiadają jednę wybitną własność dynamiczną, mianowicie, pod pewnymi warunkami mogą one wprowadzać ciała sprężyste w ruch drgający. Zjawiska te, znane pod nazwą resonancyi, albo oddźwięku, poznamy dokładniej w następującym rozdziale. Obecnie potrzebne są nam tylko następujące wiadomości. Wyobraźmy sobie ciało sprężyste, zdolne wykonywać ruch drgający prosty, o pewnej ściśle określonej częstości — n. p. strunę napiętą, powietrze w naczyniu niezupełnie zamkniętem, albo błonę sprężystą, napiętą na bębnie. Ciało takie zostaje wprowadzone w drganie, ilekroć je trafiają fale głosowe, o częstości równej częstości drgań własnych, do których jest nastrojone; wówczas staje się ono samoistnem źródłem głosu, odpowiada niejako tonowi zewnętrznemu. Fale o częstości odmiennej, większej lub mniejszej, aniżeli częstość drgań własnych ciała, nie działają na nie wcale, albo mają co najwyżej wpływ nieznaczny.

---

[1]) t. zn. odpowiadające im drgania proste.

To działanie fal głosowych prostych, dostrojonych do drgań ciała, nie doznaje żadnej zmiany, gdy obok fal uważanych rozlegają się w otoczeniu ciała inne jeszcze głosy i fale. Jest to nowy przykład wzajemnej niezależności drgań. Ciało wybiera z dowolnej mieszaniny tonów ten ton jedyny, do którego jest dostrojone. Resonancya jego jest nieomylnem świadectwem, że drganie odpowiadające rzeczonemu tonowi istnieje w powietrzu. Wyobraźmy sobie tedy, że ciało takie trafiają fale pewnego dźwięku złożonego. Jeżeli pomiędzy tonami harmonicznymi tego dźwięku znajduje się ton, do którego ciało jest dostrojone, i jeżeli natężenie jego jest dostatecznie wielkie, wówczas resonator zacznie drgać; w przeciwnym razie nie odezwie się wcale. Między tonem pojedynczym, wzbudzonym przez stosownie drgające ciało, a tonem wydzielonym, według reguły Fouriera, z dowolnie zawiłego dźwięku, nie ma żadnej różnicy.

Tę własność drgań prostych zastosował Helmholtz do wykonywania doświadczalnego rozbioru, czyli analizy dźwięków, na składające je tony. Można to wprawdzie uskutecznić słuchem, bez pomocy jakichkolwiek przyrządów, wszelako sposób ten wymaga wielkiej wprawy i dobrego słuchu muzycznego. Obok błon sprężystych używał Helmholtz w tym celu resonatorów w kształcie kuli metalowej, albo szklanej (ryc. 185), mającej z jednej strony otwór A o gładkich brzegach; na przeciwnej stronie kula jest nieco wydłużona w krótką stożkowatą rurkę B, którą można szczelnie wetknąć w otwór ucha. Powietrze znajdujące się w resonatorze można przez stosowne zadęcie wprowadzić w drgania proste o pewnej określonej częstości, zależnej od pojemności kuli i od wielkości otworu A; ono jest ciałem sprężystem, nastrojonem na pewien określony ton. Nawzajem, jeżeli resonator taki trafiają fale głosowe tej wysokości, jaką sam przy zadęciu wydaje, wtenczas wprowadzają one powietrze w resonatorze w silny ruch drgający; ucho uzbrojone w resonator słyszy ton rzeczony, jak gdyby w powiększeniu. Inne tony działają nań słabo. Resonator posiada więc zdolność *wzmacniania i uwydatniania tego tonu, do którego sam jest dostrojony.* Celem wykonania analizy pewnego dźwięku, należy zaopatrzyć się w szereg resonatorów, na-

Ryc. 185.

strojonych na różne tony o znanych wysokościach. Przykładając je po kolei do ucha, poznamy łatwo, które tony harmoniczne wchodzą w skład dźwięku i jakie mają względne natężenia. Skoro bowiem trafimy na resonator odpowiadający jednemu z tonów harmonicznych, obecność jego w dźwięku zdradzi się natychmiast przez wybitne wzmocnienie.

Przy pomocy prawa Helmholtza można wyjaśnić zdolność ucha do rozkładania dźwięków złożonych na tony. Ucho jest narządem zmysłowym bardzo zawiłej budowy; nerw słuchu składa się z mnóstwa włókien, z których każde jest połączone z naroślą sprężystą (łuki Cortiego), usposobioną do drgania w pewnym określonym okresie. Można sobie wyobrazić, że te części ucha działają jakby szereg resonatorów dostrojonych do różnych tonów. Dźwięk złożony pobudza więc te tylko nerwy, które odpowiadają tonom zawartym w dźwięku; wskutek tego słyszymy każdy z tych tonów oddzielnie.

216. Synteza dźwięków. Barwa. Wrażenie dźwięku zależy tylko od rodzaju ruchu drgającego w samem uchu, a nie zależy od tego, jakimi środkami ruch ten został wzbudzony. Helmholtz skorzystał z tej okoliczności, celem sprawdzenia teoryi dźwięków, którą podaliśmy wyżej. Pojedynczy ton można uzyskać za pomocą widełek strojowych; one wykonywają bowiem prawie dokładnie drgania proste (ryc. 183, C); dla wzmocnienia i oczyszczenia tonu umieszcza się obok widełek resonator dostrojony do tegoż samego tonu. Szereg takich widełek, wydających tony harmoniczne różnej wysokości, może służyć do sztucznego wytwarzania głosów, czyli do syntezy dźwięków. Przyrządem takim Helmholtz zdołał naśladować dźwięki mowy ludzkiej (samogłoski), tudzież dźwięki różnych instrumentów muzycznych, przez składanie właściwych im tonów harmonicznych. Sprawdził zatem dowodnie, że barwa dźwięku zależy od rodzaju drgania złożonego, t. j. od ilości i natężenia tonów harmonicznych, przyłączonych do tonu zasadniczego. Różnice faz tonów harmonicznych nie mają, według Helmholtza, wpływu na barwę dźwięku; t. j. tony należące do pewnego dźwięku możemy zmieszać jakkolwiek, nie troszcząc się o to, czy odpowiednie drgania proste zaczynają się jednocześnie, czy też niektóre zaczynają się o pewien ułamek okresu wcześniej lub później, niż inne. Każdej linii falowej, wyobrażającej pewne drganie złożone, odpowiada więc pewna barwa dźwięku. Nawzajem jednak, dźwiękom tej samej barwy mogą odpowiadać linie falowe różnych kształtów. Tak n. p. drgania proste *A* i *B* (ryc. 20) dają drgania złożone *C*, jeżeli na początku fazy ruchów składowych są jednakowe. Też same drgania *A* i *B* dają jednak wypadkowę *D* innej formy, jeżeli jedno drganie zaczyna się $^1/_4$ okresu wcześniej, niż drugie. Otóż obie linie falowe złożone *C* i *D* należą do tego samego dźwięku, albowiem składają się z tych samych ruchów prostych.

Pojedyncze tony, wywołane przez drgania proste, brzmią miękko ale bezbarwnie; w nizkich oktawach głucho (jak resonancya beczki), w wyższych są podobne do tonów fletu. Najpiękniejsze dźwięki muzyczne zawierają około sześciu pierwszych tonów harmonicznych (fortepian, głos ludzki, piszczałki otwarte); obecność wysokich tonów harmonicznych czyni dźwięk ostrzejszym (skrzypce, harmonika), a przy znaczniejszem ich natężeniu szorstkim (krzyk głośny, trąby).

Różnice dźwięku różnych samogłosek *A*, *E*, *I*, *O*, *U* i t. p. polegają również na obecności różnych tonów harmonicznych, wywołanych przez rozmaity skład ust i jamy ustnej, która działa jako resonator, wzmacniający pewne tony. Wymawiając n. p. samogłoskę *U*, tworzymy z ust resonator nastrojony na ton *f*; charakterystyczna resonancya ust dla samogłoski *O* odpowiada tonowi b_1; dla *A* tonowi b_2; dla *I*, d_4, połączone z tonem *f* (odzywającym się w głębi jamy ustnej, za podniebieniem). Tworzenie spółgłosek polega na wywołaniu różnych szelestów i szmerów, za pomocą warg, zębów i języka. Przez sztuczną kombinacyę tonów harmonicznych, właściwych pewnej samogłosce, można dźwięk jej naśladować. Jeżeli n. p. wymówimy głośno *A* lub *O* nad strunami fortepianu, podniósłszy pedał, wtenczas struny odezwą się tym samym dźwiękiem *A* lub *O*; każdy z tonów harmonicznych dźwięku porusza bowiem, wskutek resonancyi, strunę odpowiedniej wysokości.

Teorya ta tłumaczy także pokrewieństwa dźwięków, na zasadzie których powstały skale muzyczne. Słuchając n. p. dźwięku o pewnej wysokości, określonej częstością n, słyszymy zarazem cały szereg tonów harmonicznych, połączonych z tonem zasadniczym: n, $2n$, $3n$, $4n$ i t. d. Oktawa tego dźwięku posiada następujący skład: $2n$, $4n$, $6n$ i t. d., zawiera więc te same tony, które znajdowały się już w dźwięku pierwszym; z tego powodu interwał oktawy wydaje się nam tak naturalnym i wyróżnionym od innych. Dwa dźwięki tego rodzaju, słyszane jednocześnie, spływają jakoby w jeden, tworzą doskonałą harmonię. Są atoli kombinacye dźwięków, które sprawiają wrażenie przykre, tworzą t. zw. dysonans, albo rozdźwięk. Helmholtz okazał, że niezgodnymi czyli dysonującymi są takie dwa dźwięki, w których bądź to tony zasadnicze, bądź też inne silniejsze tony harmoniczne sprawiają szybkie dudnienia. Tony o częstościach n i n', dają $n-n'$ dudnień na sekundę (ust. 210); one nie płyną jednostajnie obok siebie, nie sprawiają ciągłego, jednolitego wrażenia, lecz wrażenie przerywane; one są tem dla ucha, czem dla oka światło migające. Dudnienia bardzo powolne (jeżeli n i n' bardzo mało się różnią) podobne są do kołysania się (tremolowania) głosu i nie czynią przykrego wrażenia. Gdy jednak liczba dudnień dochodzi (mniej więcej) do 30 na sekundę, wtenczas spółbrzmienie obu tonów stanowi przykry dysonans; przy większej jeszcze częstości, około 100 na sekundę, dudnienia stają się znowu nieszkodliwemi dla harmonii, bo ich już nie odczuwamy. Na tej zasadzie można okazać, że kwinta, n. p. c i g, jest interwałem harmonicznym, albowiem tony zawarte w tych dźwiękach:

$$\begin{array}{llllllll} c, & c', & g', & c'', & e'', & g'', & b'', & c'''\ldots \\ g, & & g', & d'', & & g'', & h'', & \ldots \end{array}$$

są bądź zgodne, bądź też tak od siebie odległe, że nie dają powodu do szkodliwych dla harmonii dudnień; te zaś, które mogłyby stać się przyczyną dysonansu, mają już (w dźwiękach dobrych instrumentów) zbyt małe natężenie. Dźwięki oddzielone małym interwałem, jak n. p. c i *cis*, są wielce niezgodne, stanowią dysonans, gdyż niemal wszystkie ich tony harmoniczne tworzą między sobą dudnienia.

Oceniając, czy dwa dźwięki jakiekolwiek harmonizują z sobą czy też tworzą dysonans, należy, obok zgody składających je tonów harmonicznych, uwzględnić także zgodę lub niezgodę t. zw. tonów kombinacyjnych, którym one dają początek. Zauważono, że gdy dwa dźwięki, a nawet dwa tony proste, o wysokościach n i n', byle dostatecznie silne, pobudzają ucho jednocześnie, wówczas słyszy się, obok n i n', szereg tonów zwanych kombinacyjnymi, z których najwybitniejszymi są ton różnicowy o wysokości $n-n'$ i sumowy o wysokości $n+n'$. Helmholtz tłumaczy powstawanie ich tem, że zasada prostego dodawania się dwu drgań, bez wzajemnego na siebie oddziaływania (ust. 198), stosuje się, ściśle biorąc, tylko do drgań nieskończenie słabych. Rzeczywiste tony sprawiają małe wprawdzie, ale przecież skończone odchylenia cząstek powietrza, tudzież błony bębenkowej ucha; stąd pochodzi, że nie płyną one obok siebie bez przeszkody, lecz dają początek nowym wstrząśnieniom peryodycznym, których nie było w pierwotnych ich źródłach

Zadania.

379) Na obwodzie krążka syreny znajduje się 48 otworów; wskazać na skali jednostajnej wysokość dźwięku wydawanego przy 8-miu obrotach krążka na sekundę. *Odp.* $n = 384$, t. j. blizko g'.

380) Obliczyć długość fali głosowej w powietrzu, dla najwyższego i najniższego dźwięku używanego w muzyce ($n = 4000$ i 40 na sek.). *Odp.* $8\frac{1}{2}$ *cm*; $8\frac{1}{2}$ *m*.

381) Dwa dzwonki elektryczne, bijące 8 razy na sek., umieszczone w obwodzie tego samego prądu, uderzają jednocześnie. Oddalając jeden z nich, usłyszymy uderzenia jego nieco później, aniżeli uderzenia dzwonka znajdującego się obok nas. W odległości 42 *m* słyszymy uderzenia obu dzwonków znowu jednocześnie. Obliczyć prędkość głosu. *Odp.* $8 \times 42 = 336$ *m/sek.*

382) Z jaką prędkością należy zbliżać się do źródła dźwięku, aby tenże wydawał się o pół tonu (interwał 1·05946) wyższym?

Odp. $0{\cdot}05946 \times 340 = 20{\cdot}2$ *m/sek.*

383) Mamy dwie pary widełek strojowych, dających tony jednakowe. Jeżeli jedna para oddala się z prędkością 40 *m/sek*, wtenczas dźwięk jej, z dźwiękiem drugiej, nieruchomej pary, tworzy dudnienia o częstości 5 na sek. Obliczyć w przybliżeniu częstość drgań widełek. *Odp.* Około 48 na sek.

384) Dany jest szereg 20 widełek strojowych, uporządkowanych podług wysokości tonów. Największe wydają ton o częstości 100 na sekundę, każde następujące dają z poprzedzającemi 4 dudnienia na sekundę. Znaleźć częstość najmniejszych widełek.

Odp. 176 na sek.

385) Wypisać tony skali diatonicznej jednostajnej, mającej *fis* za ton zasadniczy. *Odp.* *fis*, *gis*, *ais*, *h*, *cis'*, *dis'*, *eis'*, (*f*), *fis'*.

386) Wypisać tony harmoniczne dźwięku *f* (172·6).

Odp. $f, f', c'', f'', a'', c''', dis''', f''', g''', a''', \ldots$

387) Obliczyć częstości dudnień wywołanych przez sześć pierwszych par tonów harmonicznych dźwięków $C (= 64)$ i $D (= 72)$.

Odp. 8, 16, 24, 32, 40, 48.

ROZDZIAŁ XV.

O ruchu drgającym ciał sprężystych.

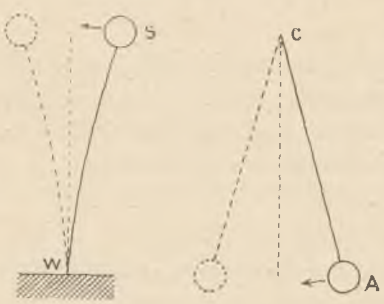
(Źródła dźwięków).

---

217. Isochronizm drgań. Ciało sprężyste, odkształcone w zakresie granic sprężystości, następnie oswobodzone, wykonywa ruch drgający; każda cząstka porusza się peryodycznie w sąsiedztwie tego miejsca, które zajmowała w stanie równowagi. Do ruchów drgających zalicza się zwykle te ruchy, w których wszystkie cząstki ciała sprężystego mają jednakowe fazy: jednocześnie przechodzą przez położenia równowagi, jednocześnie osiągają największe odchylenia; w przeciwnym razie mamy ruch falowy, w którym pewna faza drgania przenosi się z biegiem czasu od cząstki do cząstki. Drgania ciał sprężystych są to w ogóle zjawiska nader zawiłe, albowiem to samo ciało może drgać jednocześnie na kilka różnych sposobów, z powodu niezależności małych ruchów. W przypadkach prostszych drgania ciał sprężystych mają wielkie podobieństwo do ruchów wahadła. Dynamiczne wytłumaczenie drgania ciał sprężystych, podobnie jak ruchu fal, opiera się na dwu własnościach materyi: na bezwładności i sprężystości.

Porównajmy drgania masy S (ryc. 186), osadzonej na lekkim, sprężystym pręcie, utwierdzonym stale na końcu W, z ruchem masy A, zawieszonej jako wahadło na nici AC. W obu przypadkach budzi się siła, gdy masa S lub A zostanie odchyloną z położenia równowagi (w pierwszym sprężystość pręta, w drugim składowa ciężkości); w obu przypadkach siła ta: 1) ciągnie masę wciąż ku położeniu równowagi, 2) jest proporcyonalna do odchylenia z położenia równowagi, 3) znika, gdy masa znajduje się w położeniu równowagi. Przejście masy przez położenie równowagi, powtarzające się co pół okresu drgania, odbywa się zatem jedynie na mocy bezwładności.

Wskutek tego podobieństwa warunków, masa S, zostająca pod wpływem siły sprężystej, porusza się tak samo, jak wahadło A pod wpływem ciężkości. Drgania ciał sprężystych, miernych rozmiarów, bywają zwykle daleko częstsze, aniżeli wahania się wahadeł; wszelako prawo ruchu jest w obu przypadkach to samo. *Drgania ciał sprężystych dają się zawsze przedstawić* jako ruchy wahadłowe, czyli *jako ruchy drgające proste.* Jeżeli drgania te są dostatecznie częste, a odbywają się w powietrzu, wtenczas dostrzegamy je jako dźwięk wydawany przez ciało drgające. Zważywszy, że ruch drgający pro-



Ryc. 186.

sty daje początek tym rodzajom głosu, które nazwaliśmy tonami, możemy też powiedzieć, że *ciało sprężyste, drgające, wydaje ton, albo mieszaninę tonów.*

Drgania te mają i tę własność wspólną z ruchem wahadła, że *okres, albo częstość drgań, nie zależy od wielkości amplitudy drgania*; inaczej mówiąc, drgania ciał sprężystych są isochroniczne. Częstość drgania, tudzież wysokość odpowiedniego tonu, zależy od postaci, rozmiarów, od sprężystości ciała, tudzież od gęstości (bezwładności) jego, lecz nie zależy od obszerności drgania, t. j. natężenia tonu. Tak n. p. struna, albo dzwon, wydaje tony o wysokości zupełnie określonej, bez względu na to, czy uderzymy ją silnie czy lekko; na tej własności polega możność zastosowania ciał sprężystych do instrumentów muzycznych.

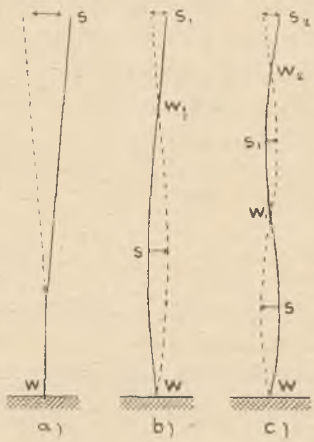
Istotną przyczyną isochronizmu drgania ciał sprężystych (podobnie jak i wahadeł) jest to, że siła działająca na masę odchyloną z położenia równowagi jest proporcyonalna do odchylenia. Siły sprężyste w ciałach odkształconych mają, jak wiadomo, tę własność zawsze (prawo Hooke'a), byle odkształcenia nie przekraczały granic sprężystości. Ciała służące jako źródła dźwięków czynią niemal zawsze zadość ostatniemu warunkowi, gdyż amplituda drgań bywa zwykle nader mała.

W przypadku przytoczonym wyżej, mianowicie gdy masa S (ryc. 186) drga pod wpływem sprężystości pręta SW, możemy uzasadnić nieco ściślej główne własności ruchu drgającego. Dajmy na to, że pręt SW jest tak lekki, iż masę jego można w rachunku opuścić. Siedzibą masy poruszającej się będzie głównie ciało S (masa jego $= m$); pręt SW jest natomiast siedzibą siły sprężystej. Gdy masa odchyli się o s z położenia równowagi, pręt wywiera na nią siłę: $P = ks$, t. j. siłę proporcyonalną do s, a skierowaną ku położeniu równowagi. Im sztywniejszy jest pręt, tem większą będzie siła odpowiadająca pewnemu odchyleniu, tem większy będzie spółczynnik k. Stosunek siły do masy, t. j. $\frac{P}{m}$ jest miarą przyśpieszenia ruchu γ; mamy więc: $\gamma = \frac{k}{m} s$. To, że przyśpieszenie jest proporcyonalne do odchylenia i że jest stale zwrócone ku położeniu równowagi, wskazuje, jak wiadomo (ust. 24), że masa wykonywa ruch drgający prosty. Zważywszy na zależność $\gamma = 4\pi^2 n^2 s$ ($n =$ częstości drgania) dowiedzioną w ust. 24, w przypadku drgań prostych (por. także teoryę wahadła w ust. 97), znajdziemy $\frac{k}{m} = 4\pi^2 n^2$; stąd otrzymamy wartość częstości drgania (wysokość tonu):

$$n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Wzór ten, stosujący się przynajmniej w ogólnych zarysach także do zawilszych przypadków drgania, orzeka, iż wysokość tonu wydawanego przez ciało sprężyste drgające będzie tem większą, im bardziej sprężystem jest ciało, t. j. im większe siły budzą się przy odkształceniu jego; natomiast zwiększenie masy albo gęstości ciała obniża ton.

218. Tony własne ciał sprężystych. W poprzedzającym ustępie wyłożyliśmy główne własności drgania ciał sprężystych, posiłkując się prostym przykładem masy osadzonej na pręcie sprężystym. Prostota tego przypadku polega na tem, że masa drgająca jest oddzielona od siedziby siły sprężystej. Zwyczajnie atoli cząstki drgające ciała sprężystego bywają jednocześnie siedliskiem i siły i masy; podczas drgania oddziaływają one zarazem na inne cząstki tego samego ciała. Pomyślmy n. p., że z pręta sprężystego (ryc. 186) usunięto kulę; pozostanie wtenczas sam pręt drgający, a więc ciało, w którem bezwładność i sprężystość są jednostajnie rozmieszczone. O ile ruch drgający staje się wskutek tego bardziej urozmaiconym, zrozumiemy natychmiast, przyjrzawszy się kilku możliwym rodzajom



Ryc. 187.

drgania takiego pręta. W najprostszym przypadku, przedstawionym na ryc. 187a, pręt drga podobnie jak wówczas, gdy na końcu wolnym umieszczona była ciężka stosunkowo masa. Zgięcie, a więc i siła sprężysta, której wyrazem jest k (ust. 217), pojawia się głównie na końcu utwierdzonym W. Koniec wolny S nie zgina się wcale podczas drgania, a cząstki sąsiadujące z tym końcem mają przedewszystkiem znaczenie masy bezwładnej m; zastępują więc poniekąd kulę z powyższego przykładu. Gdybyśmy koniec S zgrubili, siła sprężysta zyskałaby na tem bardzo mało, natomiast zwiększyłaby się masa bezwładna, wskutek czego, w myśl wzoru:

$$n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

wysokość tonu zniżyłaby się. Zgrubienie natomiast pręta w pobliżu końca W nie przyczyniłoby wiele masy drgającej, albowiem amplituda drgań jest tu bardzo mała, lecz w zamian zwiększyłoby sztywność, wyrażoną przez spółczynnik k — częstość drgań stałaby się większą.

Jeżeli przytrzymamy pręt, chwilowo, w stosownym punkcie W_1, znalezionym przez próbę, i uderzymy go poniżej tego punktu, wtedy możemy wprowadzić pręt w inny sposób drgania, przedstawiony na ryc. 187b. Punkt W_1 pozostawać będzie trwale w spoczynku, podobnie jak dolny koniec W. Inne cząstki będą drgały w jednakowych fazach, każda jednak mieć będzie inną amplitudę. W punktach S, S_1, oznaczonych strzałkami, amplitudy są największe; w punktach W i W_1, zwanych w ę z ł a m i, spadają do zera. Pręt zajmuje naprzemian położenia skrajne $WS\ W_1\ S_1$ i $WS'\ W_1 S_1'$ (linia kreskowana). *Cząstki leżące po przeciwnych stronach węzła poruszają się zawsze w kierunkach przeciwnych.*

Ażeby zdać sprawę z tego nowego sposobu drgania, zauważymy, że ruch odbywa się tak, jak gdyby pręt był podzielony na dwie części, z których wyższa drga sposobem pierwszym. Odcinek WS (ryc. 187b) stanowi jedną z tych części; górną zaś część pręta SS_1 możemy uważać jako osobny pręt, drgający sposobem pierwszym, ale osadzony na ruchomym końcu tamtego. Pierwszy sposób drgania porównaliśmy (ryc. 186) do ruchu wahadła; w obecnym przypadku możnaby użyć porównania do dwu wahadeł, mających jednakowe okresy, z których jedno jest zawieszone na drugiem (ryc. 188).

Przez stosowne uderzenie, albo początkowe odkształcenie można również wywołać drganie pręta w trzech częściach, a więc z trzema węzłami (W, W_1, W_2, ryc. 187c) i t. d.

Widzimy więc, że to samo ciało sprężyste może wykonywać cały szereg różnych ruchów drgających. W każdym z tych sposobów drgania cząstki pręta poruszają się ruchem drgającym prostym; każdemu sposobowi drgania odpowiada atoli inna częstość drgań. Podobną różnorodność sposobów drgania spotykamy we wszystkich ciałach sprężystych, t. j. ciała mogą drgać bądź to w c a ł o ś c i, b ą d ź t e ż d z i e l ą s i ę n a d w i e, t r z y i t. d. c z ę ś c i d r g a j ą c e, oddzielone od siebie węzłami, w których amplituda drgania jest zero. Każdemu z tych sposobów drgania odpowiada ton o wysokości zupełnie określonej. Im większa jest liczba części drgających i węzłów, tem większa jest częstość drgań ciała sprężystego, tem wyższy ono wydaje ton. Gdy bowiem na pręcie drgającym utworzą się dwa albo trzy węzły, wówczas zgięcia pręta są stosunkowo ostrzejsze, aniżeli przy drganiu z jednym węzłem; im więcej zatem węzłów, tem znaczniejsze powstają siły sprężyste, a zarazem mniejsza masa bierze udział w ruchu. Obie przyczyny sprawiają, jak wiemy, podwyższenie tonu.

Wzbudzenie w ciele sprężystem ruchu drgającego prostego. odpowiadającego jednemu tylko z tych sposobów drgania, do których ciało jest usposobione na mocy swej postaci i sprężystości, wymaga szczególnych ostrożności i jest w ogóle trudne. Ciało, wstrząśnięte lub uderzone jakkolwiekbądź, wykonywa w ogóle ruch nader zawiły, złożony ze wszystkich ruchów prostych, które jest zdolne wykonywać. Tak n. p. pręt (ryc. 187) odchylający się jako całość na prawo i lewo, może obok tego drgać jednocześnie drugim, trzecim i t. d. sposobem. Jeżeli odkształcenia w tym ruchu złożonym są małe, wówczas, na mocy prawa niezależności małych ruchów (ust. 198), ruchy te nie przeszkadzają sobie, t. j. na pręcie odchylającym się cokolwiek na prawo i lewo, podług *a* (ryc. 187), tworzą się drgania wielowęzłowe *b*, *c* i t. d., tak samo, jak gdyby oś pręta była prosta i nieruchoma. Z tego wynika, że ciało mające ruch złożony wydaje głos będący mieszaniną tonów, odpowiadających różnym ruchom drgającym prostym, które są mu właściwe.

Ryc. 188.

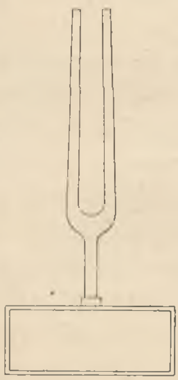
Możemy więc powiedzieć, że *każde ciało sprężyste dostrojone jest do szeregu ruchów drgających prostych, którym odpowiadają różne częstości, zależne od postaci ciała, od rozmiarów jego, sprężystości i sposobu odkształcenia.* Tony odpowiadające tym ruchom stanowią szereg t. zw. tonów własnych ciała. Najniższy z nich nazywa się tonem zasadniczym; często bywa on także najsilniejszy w mieszaninie tonów własnych ciała, a zarazem dźwięczy najdłużej.

Zależnie od tego, w jaki sposób ciało bywa pobudzane do drgania, może ono wydawać bądź tylko pojedyncze tony własne, bądź też mieszaninę tych tonów.

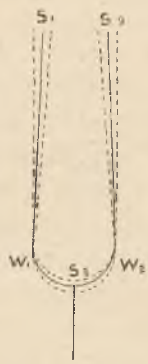
Interwały w szeregu tonów własnych ciał sprężystych nie są w ogóle harmoniczne; wskutek tego mieszanina tych tonów nie stanowi dźwięku.

W niektórych atoli wyjątkowych przypadkach (struny, piszczałki) częstości tonów własnych należą do szeregu harmonicznego: n, $2n$, $3n$,... Ciała wydają wówczas dźwięki i są szczególnie przydatne jako instrumenty muzyczne.

219. Widełki strojowe. Wyższe tony własne, odpowiadające drganiom wielowęzłowym, bywają w pewnych ciałach sprężystych słabe i znikome. Ruch ciał tego rodzaju bywa niemal dokładnie ruchem drgającym prostym, a głos wydawany przez nie jest prawie czystym tonem. Tak n. p. gruby i sztywny pręt nagina się



Ryc. 189.



Ryc. 190.

z trudnością do tych form, które należą do dwu albo więcej węzłów; wydaje też zwykle tylko ton zasadniczy. Tę samą własność mają t. zw. widełki strojowe (ryc. 189), służące jako wzory fizyczne wysokości tonów. Widełki należy uważać jako jeden pręt, zgięty w podkowę i osadzony na nóżce. Sposób drgania pręta takiego objaśnia ryc. 190. W punktach W_1 i W_2, po obu stronach nóżki, tworzą się węzły, wskutek czego pręt dzieli się na trzy części drgające unisono: $S_1 W_1$, $W_1 W_2$ i $W_2 S_2$. Końce ramion $W_1 S_1$ i $W_2 S_2$ zbliżają się i naprzemian oddalają się od siebie; środek łuku $W_1 W_2$ t. j. punkt S_3 zniża się jednocześnie i podnosi do góry. Amplituda drgania punktu S_3 jest jednakowoż nader mała; ruch mieści się przedewszystkiem w końcach S_1 i S_2. Wskutek tego częstość drgań widełek jest w wysokim stopniu niezależna od otoczenia, nie zmienia się, jeżeli widełki trzymamy w ręku, albo oprzemy

n. p. o stół. Widełki wykonane z dobrej, sprężystej stali można więc uważać jako wcielenie pewnego niezmiennego czasu, mianowicie okresu drgania. Z tego powodu używa się widełek nietylko jako wzorów wysokości tonów, do strojenia, lecz także do dokładnego mierzenia krótkich okresów czasu.

Dostrajanie widełek do żądanego tonu wykonywa się w sposób następujący: gdy chodzi o podwyższenie tonu, zbiera się pilnikiem końce S_1 i S_2. Spiłowanie stali około W_1 i W_2 zmniejsza natomiast sztywność a więc zniża ton (por. ust. 218).

220. Wpływ rozmiarów. Wielkie widełki wydają ton niższy, aniżeli małe z tej samej stali, podobne zresztą co do kształtu do większych.

Stosunek okresów drgania równa się stosunkowi odpowiednich rozmiarów. Prawidło to stosuje się nie tylko do widełek strojowych, lecz do wszelkich ciał sprężystych. Jeżeli jakiekolwiek ciało drgające (widełki strojowe, dzwonek, piszczałka i t. p.) jest n. p. dwa razy cieńsze, krótsze i węższe, aniżeli drugie ciało z tego samego materyału, jeżeli nadto oba ciała drgają w ten sam sposób (co do rodzaju odkształceń, sposobu utwierdzenia, ilości węzłów), wówczas ton wydawany przez ciało mniejsze będzie oktawą wyższą odpowiedniego tonu ciała większego. Stosunkowi rozmiarów 2 : 3 odpowiadałby interwał kwinty i t. d.

Jeżeli bowiem wykonamy kopię jakiegokolwiek ciała sprężystego, w rozmiarach n. p. dwa razy większych, wówczas objętość i masa (jeżeli materyał ten sam) będą ośm razy większe, aniżeli w ciele mniejszem. Dajmy na to, że cząstki ciała większego zostają dwa razy dalej odchylane z położeń równowagi, aniżeli cząstki mniejszego; wartość odkształceń będzie w obu ciałach jednakowa, albowiem miarą odkształcenia jest stosunek zmiany pewnego rozmiaru, albo objętości, do rozmiaru, albo do objętości pierwotnej. Z tego wynika, że ciśnienia sprężyste, liczone na jednostkę powierzchni, będą równe; mamy bowiem: ciśnienie = spółczynnik sprężystości $\times$ odkształcenie. Siły natomiast sprężyste w ciele dwa razy większem będą cztery razy większe, gdyż siła = ciśnienie $\times$ powierzchnia, a powierzchnie odpowiednie mają się jak 1 : 4. Okresy drgań są proporcyonalne do stosunku $\sqrt{m}:\sqrt{k}$ (ust. 217), przyczem $k=$ siła : odchylenie. Ponieważ zatem w ciele dwa razy większem masa jest ośm razy, a spółczynnik k dwa razy większy, przeto okres drgania będzie $\sqrt{\frac{8}{2}}=2$ razy dłuższy.

221. Zanikanie drgań. Wspomnieliśmy w ustępie 150, że podczas odkształcania się ciał sprężystych objawia sie tak zwane tarcie wewnętrzne, za sprawą którego amplituda drgania, a więc i energia stopniowo ubywa. Swobodne drgania ciał sprężystych, odkształconych działaniem jakiejkolwiek siły zewnętrznej, a następnie oswobodzonych, nie są przeto nigdy dokładnym ruchem drgającym prostym; są to zawsze drgania zanikające, których własności opisaliśmy obszernie w ustępie 29 (ryc. 29). Następstwem ubywania amplitudy drgania jest zanikanie głosu wydawanego przez ciało drgające, jak to stwierdzają znane powszechnie zjawiska przycichania dzwonów uderzonych, strun i t. p. Pomimo zmniejszającego się natężenia, wysokość tych tonów pozostaje aż do końca niezmienioną, gdyż drgania ciał sprężystych są isochroniczne; częstość nie zależy od wielkości amplitudy drgania.

Chcąc za pomocą ciała sprężystego uzyskać ton ciągły, o natężeniu stałem, nie wystarczy raz jeden uderzyć je, albo odkształcić, lecz należy zasilać je nieustannie świeżymi zapasami energii, w miarę tego, jak ją siły rozpraszające zużywają. Dźwięk fortepianu zanika jak wiadomo nader szybko, natomiast ze skrzypiec można wydobyć dźwięk ciągły, dzięki działaniu smyczka, który strunę ciągle pobudza; jednostajny dźwięk piszczałki utrzymuje się również wskutek ciągłego prądu powietrza; ustaje natychmiast, skoro prąd zostanie przerwany. Nie należy jednak sądzić, jakoby tarcie wewnętrzne było jedyną przyczyną zanikania drgań. Byłoby tak istotnie, gdyby ciała drgały w próżni, nie dotykając się wcale innych ciał. Jeżeli zaś są w zetknięciu, czy to z powietrzem, czy z jakimkolwiek innym przewodnikiem głosu, wtenczas samo dźwięczenie jest przyczyną utraty energii, nie mniej ważną jak tarcie wewnętrzne. Fale głosowe, jak i wszelkie inne, odwodzą energię od ciała, które je wzbudza. Energia uchodząca w falach jest oczywiście stracona dla ciała drgającego. Trwałość dźwięku zależy więc z jednej strony od wartości tarcia wewnętrznego, z drugiej od tego, czy ciało drgające oddaje energię, więcej lub mniej obficie, otaczającym przewodnikom głosu. Nakoniec zależy ona od zapasu energii, jaki był ciału z początku udzielony. Ciała gęstsze i bardziej sprężyste wymagają większej pracy do wprowadzenia w drganie, aniżeli lekkie i wiotkie; one gromadzą w sobie większy zapas energii i opierają się dłużej siłom rozpraszającym. Ciężkie widełki strojowe, ze stali sprężystej, albo dzwon metalowy, dźwięczą długo po uderzeniu;

lekka struna natomiast, albo cienka błona napięta (n. p. na bębnie), dotykają się powietrza powierzchnią znaczną, w porównaniu ze swą masą, milkną też bez porównania szybciej.

Wyższe tony własne ciał sprężystych zanikają zazwyczaj rychlej, aniżeli najniższy ton zasadniczy; dzięki tej własności widełki strojowe wydają w krótką chwilę po uderzeniu ton niemal czysty.

222. Drgania swobodne i podniecane. Ciało sprężyste, wolne od wszelkich wpływów obcych, drga w sposób odpowiedni swej postaci, rozmiarom, sprężystości i gęstości. Amplituda drgania może być dowolnie zmienianą, w pewnych granicach, przez mniej lub więcej silne pobudzenie ciała; sposób drgania, t. j. podział ciała za pośrednictwem węzłów na pewną ilość części drgających, zależy również w pewnych granicach od rodzaju pobudzenia. Częstość drgania jednak, tudzież szybkość zanikania drgań, zależą wyłącznie od ustroju samego ciała i nie mogą być dowolnie zmieniane. Ruchy tego rodzaju, odbywające się pod wyłącznym wpływem sił wewnętrznych ciała sprężystego, nazywamy d r g a n i a m i s w o b o d n e m i. Wszystkie przykłady, przywiedzione w poprzedzających ustępach, należały do drgań swobodnych. Wiernym obrazem drgania swobodnego jest ruch wahadła, zawieszonego swobodnie i poruszającego się pod wpływem ciężkości. W wahadle takiem wcielony jest pewien okres ruchu, zależny od natężenia ciężkości i od bezwładności wahadła; podobnie w ciele sprężystem swobodnem, pobudzonem do drgania w pewien określony sposób, wcielony jest jeden, albo kilka okresów drgania, zależnych od sprężystości i bezwładności ciała.

Oprócz drgań swobodnych, ciała sprężyste mogą wykonywać wszelkie inne ruchy drgające, o ile mianowicie będą do tego zmuszone przez zewnętrzne, peryodycznie powtarzające się impulsy; są to drgania, którychby ciało nie wykonywało, gdyby było zupełnie swobodne, a wykonywa je tylko pod przymusem. Podobnie możemy wprowadzić wahadło w ruch peryodyczny, mający okres odmienny od okresu swobodnego wahania się, jeżeli n. p. zwiążemy je jakkolwiek z drugiem wahadłem, mającem dowolny okres drgania, a tak ciężkiem, iżby mogło narzucić pierwszemu własny okres wahania. Ogólnie mówiąc, wszelka siła zewnętrzna, zmieniająca się peryodycznie, w jakimbądź okresie, wprowadza ciała sprężyste w ruch drgający, mający tę samą częstość, jak działanie siły (drganie synchroniczne z siłą), a tem większy, im większe jest jej natężenie.

Drgania tego rodzaju, odbywające się pod wpływem zewnętrznej podniety, nazywać będziemy drganiami podniecanemi. Siły takiej, zmiennej peryodycznie. dostarczać mogą fale głosowe. Wiemy bowiem, że w falach głosowych znajdują się części zgęszczone i rozrzedzone, a cząstki przewodnika, przez które fale przechodzą. bywają potrącane bądź to naprzód bądź wstecz. Jasnem jest przeto, że fale trafiające powierzchnię ciała sprężystego, ciągną je naprzemian naprzód i wstecz. a tym sposobem mogą je wprowadzić w ruch drgający. Częstość tego ruchu jest zawsze równa częstości fal głosowych uderzających o powierzchnię ciała. Drganie ciała pod wpływem fal głosowych jest widocznie drganiem podniecanem.

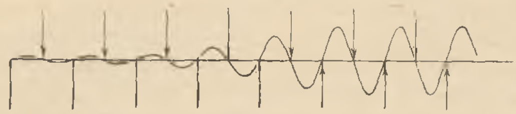
Jednym z najważniejszych przykładów drgania wzbudzonego przez fale głosowe, są ruchy t. zw. błony bębenkowej, napiętej na poprzek przewodu usznego i oddzielającej ucho zewnętrzne od wewnętrznego, mieszczącego w sobie nerwy słuchu. Wszelki głos, trafiający ucho zewnętrzne, wprowadza bębenek w drganie synchroniczne, które przenosi się dalej do ucha wewnętrznego. Podobne zadanie mają blaszki odbierające głos w fonografach (ryc. 182), telefonach i t. p.

223. Resonancya (Oddźwięk). Drgania ciał sprężystych, wzbudzone przez uderzające o nie fale głosowe, bywają w ogóle słabe, gdyż energia tych fal jest zbyt mała, aby mogła znacznie rozruszać większe masy. Są jednak przypadki, w których drganie ciała sprężystego, pod wpływem uderzeń fal głosowych, dochodzi do znacznych rozmiarów; zdarza się to wtenczas, *gdy częstość fal głosowych, trafiających ciała sprężyste, równa się częstości drgań swobodnych ciała*.

W tym przypadku ciało sprężyste pochłania obficie energię fal głosowych i może być kosztem tej energii silnie rozbujane. To przenoszenie się energii fal na ciało dostrojone do drgania w okresie równym okresowi fal, nazywamy *resonancyą*.

Objawy resonancyi bywają niekiedy zdumiewające. Jeżeli n. p. wprowadzimy w drganie widełki strojowe, a w niewielkiej odległości umieścimy drugą parę widełek, dostrojonych dokładnie do wysokości tonu pierwszych, wtenczas ruch drgający udzieli się niebawem drugiej parze. Stłumiwszy drganie pierwszych, przekonamy się, że drugie dźwięczą. Pierwsza para wysyła fale głosowe; peryodyczne a częste, aczkolwiek słabe uderzenia tych fal o drugą parę widełek, wzbudzają stopniowo znaczny ruch, w ciężkiej stosunkowo i sztywnej masie stali.

Objaśnienie zjawisk resonancyi polega na następującej zasadzie. Jeżeli peryodyczne impulsy, czy to fal głosowych, czy jakiekolwiek inne, trafiają ciało w tym samym okresie, do którego ono jest dostrojone, wówczas działania tych impulsów dodają się do siebie, mogą przeto z biegiem czasu utworzyć znaczną sumę. Dajmy na to, że grzbiet pierwszej fali potrąca ciało naprzód, a dolina tej fali ciągnie je wstecz. Grzbiet drugiej fali trafi ciało wtenczas właśnie, gdy ono zwraca się znowu naprzód, pod wpływem własnej sprężystości; drugie drganie będzie zatem wzmocnione uderzeniem



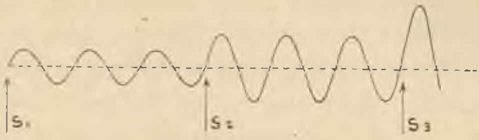
Ryc. 191.

drugiej fali, a więc będzie większe od pierwszego i t. d. W ten sposób amplituda ciała rośnie stopniowo, a wzrastaniu temu kładzie kres jedynie tarcie wewnętrzne ciała i oddawanie energii na zewnątrz, pod postacią fal. Skoro zysk i strata energii wyrównają się, wówczas drganie ciała mieć będzie nadal stałą amplitudę, dopóki fale głosowe je trafiają.

Łatwo zrozumieć, że nawet słabe impulsy mogą w tych warunkach wzniecić silne drganie, gdyż słabość impulsów wynagradza ich liczba i rytm stosownie dobrany. Wiadomo, że ciężki dzwon, zawieszony nakształt wahadła, można stopniowo rozbujać, przez ekkie, byle we właściwym okresie powtarzane pociągnięcia sznura.

Ryc. 191 objaśnia stopniowe powstawanie resonancyi pod wpływem synchronicznej pobudki. Strzałki wyobrażają impulsy zewnętrzne; w chwilach, gdy one działają najsilniej na ciało, linia falista okazuje stopniowe wzmaganie się drgań ciała.

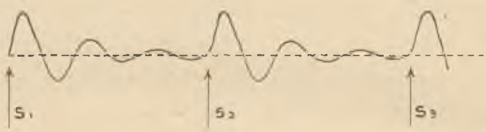
Zjawiska resonancyi przedstawiają się różnie, zależnie od tego, czy drgania swobodne danego ciała zanikają szybko, czy też nie. Ciała, które po wprowadzeniu w drganie swobodne wykonywają bardzo wiele drgań, zanim stracą ruch, objawiają silną resonancyę tylko pod wpływem takich dźwięków, które mają wysokość bardzo dokładnie równą wysokości własnego ich tonu. Do takich należą widełki strojowe, które dźwięczą istotnie pod wpływem głosu mającego wysokość równą własnej ich wysokości, a nie dźwięczą już prawie wcale, jeżeli różnica wysokości tonu własnego i zewnę-



Ryc. 192.

trznego wynosi choćby tylko jedno drganie na sekundę. Ciała natomiast, których drgania własne zanikają szybko, n. p. błony napięte, są w tym względzie mniej wybredne; resonancya ich nie traci wiele na natężeniu, jeżeli dźwięk pobudzający jest cokolwiek rozstrojony. Obszar tonów wzbudzających silniejszy oddźwięk nie jest w tym razie tak ograniczony, jak w przypadku poprzedzającym, lecz obejmuje także tony wyższe i niższe od tonu własnego.

Przyczynę tego zjawiska objaśniają ryc. 192 i 193.



Ryc. 193.

Przypuśćmy, celem ułatwienia rozumowania, że impuls zewnętrzny trafia ciało co trzy drgania. Jeżeli zanikanie drgań swobodnych jest nieznaczne (ryc. 192), wtenczas w chwili drugiego impulsu S_2, drganie wzbudzone przez impuls pierwszy, S_1, trwa jeszcze niemal w pierwotnej mocy. Gdyby więc impuls drugi spóźnił się tylko o pół okresu, wtenczas nie wzmocniłby ruchu ciała, lecz trafiłby je w przeciwnym kierunku, aniżeli być powinno. Inaczej zachowują się ciała, których drgania swobodne zanikają tak szybko (ryc. 193), iż w chwili drugiego impulsu zostaje już tylko drobna reszta ruchu wzbudzonego przez impuls pierwszy. Tu jest rzeczą obojętną, czy drugi impuls opóźni się cokolwiek, czy też uderzy zawcześnie; natężenie resonancyi niewiele na tem ucierpi.

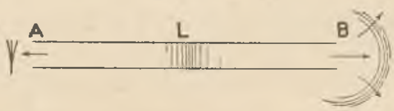
Opory tarcia i t. p., będące przyczyną zanikania wszelkiego drgania swobodnego, działają niemniej na ciała wprowadzone w drganie podniecane. O ile jednak zewnętrzne, podniecające impulsy mają natężenie stałe, ciało wprowadzone przez nie w ruch przyjmuje w końcu również stałą amplitudę drgania; nastąpi to wówczas, gdy strata energii ruchu, wynikająca z działania oporów, łącznie ze stratą spowodowaną przez samo dźwięczenie ciała, a więc przez wydawanie fal głosowych, wyrówna się z pracą dostarczaną ciągle przez impulsy zewnętrzne. Otóż, żeby ciało drgające mogło istotnie odbierać pracę od tej podniety zewnętrznej, jest rzeczą konieczną, iżby pomiędzy drganiem ciała a tą podnietą wytworzyła się pewna różnica fazy. Gdyby bowiem ciało uchylało się najsilniej z położenia równowagi w tej samej chwili, gdy siła zewnętrzna najsilniej na nie napiera, a ustępowało wstecz w tej samej chwili, gdy działanie siły się odwraca, wówczas praca pobrana w ciągu pierwszej połowy drgania byłaby całkowicie zwróconą podczas drugiej i nicby nie zostało na powetowanie strat ponoszonych skutkiem działania oporów.

Istotnie też, faza impulsu zewnętrznego wyprzedza zawsze fazę odchylenia ciała, a w przypadku równości obustronnych okresów, gdy zachodzi resonancya, wyprzedzanie to dochodzi do ćwiartki okresu. Impuls zewnętrzny pociąga ciało najsilniej w jedną i drugą stronę, wtenczas właśnie, gdy ono przechodzi przez położenie równowagi (ryc. 191).

Objawy resonancyi w przypadku, gdy drgania swobodne szybko zanikają, a resonancya sama jest mniej ostrą i wybredną, są wprawdzie mniej wybitne, w praktyce bywają jednak częściej stosowane. Do wzmocnienia dźwięku strun fortepianowych, skrzypcowych i t. p., używa się pudełek i płyt resonansowych, których zadaniem jest wzmacniać, nie jeden lub kilka, lecz wszystkie dźwięki danego instrumentu, i to ile możności równomiernie. Ciała te nie są wprawdzie zdolne do wydawania własnych trwałych dźwięków, lecz zato odpowiadają na wszystkie tony, tem więcej, że wskutek nieregularnej formy (n. p. pudełka skrzypiec) mają bardzo liczne i blizkie siebie tony własne. Podobną zaletę mają blaszki i błony odbierające głos w telefonach i fonografach; drgania ich własne bywają niekiedy umyślnie tłumione, aby je tem lepiej usposobić do jednostajnego odbierania wszystkich dźwięków zewnętrznych, choćby kosztem wielkości ruchów.

224. Zastosowanie resonancyi do analizy dźwięków. Ciała sprężyste, dające resonancyę tylko na tony zupełnie zgodne z własnymi ich tonami, są szczególnie przydatne do analizowania dźwięków, albo mieszanin tonów, o czem była już mowa w ustępie 215. Obecnie możemy zdać sobie sprawę, dlaczego resonatory rozkładają dźwięki na tony proste, — zgodnie z regułą Fouriera — a wśród zawiłej mieszaniny tonów, odpowiadającej ruchowi wielce złożonemu, wybierają i uwydatniają własny swój ton, a więc jedną tylko składową całkowitego ruchu. Przyczyna leży w tem, że ciało sprężyste samo zdolne jest wykonywać tylko ruch drgający prosty, a nie inny ruch peryodyczny.

Ażeby dowiedzieć się, czy dźwięk jakikolwiek, albo nawet nieprawidłowa mieszanina głosów, zdolna jest wzbudzić resonancyę w ciele sprężystem, czy też nie, należy rozłożyć odpowiednie wstrząśnienia na ruchy drgające proste; jeżeli pośród tych składników znajdziemy ruch mający częstość równą częstości drgań własnych ciała, wtenczas resonancya będzie znaczna, w przeciwnym razie nie otrzymamy jej wcale.



Ryc. 194.

225. Resonancya piszczałek. Znana jest powszechnie resonancya powietrza we flaszkach, w beczkach, w pustych pokojach i t. p. Ciałem drgającem w tych przypadkach jest głównie powietrze; ściany stałe naczyń mają nieznaczny udział w drganiu; one odgraniczają tylko pewną objętość gazu i nadają jej kształt, a tem samem zniewalają do drgania w okresach zupełnie określonych.

Najprostszem zjawiskiem tego rodzaju jest resonancya rur wązkich, a długich, jakie bywają używane w piszczałkach organów i w innych instrumentach muzycznych.

a) **Piszczałki otwarte.** *AB* (ryc. 194) wyobraża wązką a długą rurę, otwartą u obu końców. Dajmy na to, że tuż przed końcem *A* drga płytka sprężysta, albo widełki strojowe. Pytamy, jaką wartość powinna mieć częstość tego drgania, aby ono było zdolne wzbudzić resonancyę powietrza w rurze.

Weźmy pod uwagę chwilę, gdy płytka, poruszając się ku ujściu A rury, przechodzi przez położenie równowagi. Wiadomo, że od płytki odbiega wtenczas i wstępuje w rurę fala zgęszczenia, potrącająca cząstki powietrza naprzód.

Fala ta, przebiegłszy przez rurę, od A do B, zostaje w B częściowo odbitą; w części zaś wybiega z rury na zewnątrz i rozchodzi się w otaczającym gazie, jako fala kulista. Zgęszczenie, ograniczone we wnętrzu rury do wązkiego jej przekroju, znika niemal zupełnie, skoro dostanie się do nieograniczonej atmosfery otaczającej koniec B. Z tego powodu możemy przyjąć, że cząstki gazu leżące przy końcu B rury, mają zawsze gęstość i ciśnienie takie, jakie panuje w otoczeniu rury, czyli, że odbicie się fal od końca B odbywa się prawie tak samo, jak odbicie się od swobodnej powierzchni przewodnika (ust. 201), t. j. bez zmiany kierunku ruchu cząstek. Znaczy to, iż zgęszczenie odbija się jako rozrzedzenie i naodwrót.

Fala zgęszczenia, której bieg od A do B uważaliśmy, odbija się tedy od B jako rozrzedzenie, a przebiegłszy rurę wstecz od B do A, zostaje powtórnie odbitą do końca A, zamieniając się napowrót na falę zgęszczenia. Jeżeli więc ma nastąpić wzmocnienie tej fali, t. j. resonancya rury, potrzeba, żeby płytka drgająca rzuciła w tejże chwili ku końcowi A nową falę zgęszczenia. Z tego wynika, iż resonancya rury otwartej u obu końców zdarzy się wtenczas, gdy w ciągu jednego okresu drgania pobudzającego fala przebiega dwukrotnie długość rury (tam i napowrót).

Na tej zasadzie obliczymy wysokość tonu, który wywołuje resonancyę, zarazem wysokość tonu własnego rury. Oznaczmy odpowiednią częstość przez n, przez $T = \frac{1}{n}$ okres drgania, długość rury niech będzie L. Jeżeli c oznacza prędkość fal (głosu) w gazie znajdującym się w rurze, otrzymamy równanie:

$$2L = cT, \text{ albo } 2L = \frac{c}{n}, \text{ skąd: } n = \frac{c}{2L}.$$

Wzór powyższy orzeka, iż wysokość tonu własnego piszczałki otwartej jest proporcyonalna do prędkości głosu w gazie, odwrotnie proporcyonalna do długości piszczałki.

Zważywszy dalej, że iloczyn $c\,T = 2\,L$ wyraża długość fali λ w danym gazie, dla tegoż samego tonu n, możemy także powiedzieć: 1) *piszczałka otwarta jest nastrojona do tego tonu, którego długość fali równa się podwójnej długości piszczałki.*

Ton określony w ten sposób zowie się tonem zasadniczym. Obok niego taż sama piszczałka posiada cały szereg innych tonów własnych. Widocznem jest bowiem, że wzmocnienie drgania w rurze nastąpi nietylko wtenczas, gdy zewnętrzne źródło pobudzające wykonywa jedno drganie w ciągu czasu $\frac{2L}{c}$, którego fala potrzebuje do przebieżenia rury tam i z powrotem; nastąpi ono i wtedy, gdy ilość drgań wykonanych w ciągu tego czasu równa się jakiejkolwiek całkowitej liczbie i (n. p. 2, 3, 4 i t. d.). Mamy więc ogólniej:

$$\frac{2L}{c} = i\,T, \text{ albo } \frac{2L}{c} = \frac{i}{n}, \text{ skąd: } n = i\,.\,\frac{c}{2L}.$$

Podstawiając tu za i szereg liczb całkowitych, otrzymamy następujący szereg tonów własnych piszczałki otwartej:

$$n_1 = \frac{c}{2L}, \quad n_2 = 2\,.\,\frac{c}{2L}, \quad n_3 = 3\,.\,\frac{c}{2L} \text{ i t. d.}$$

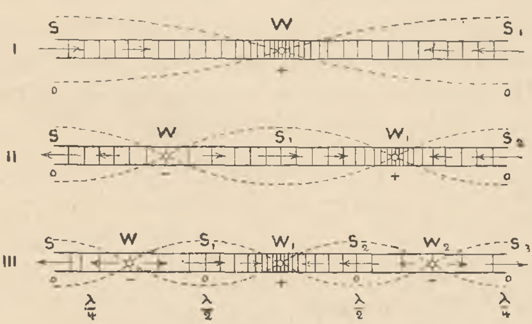
to znaczy: 2) *tony własne piszczałki otwartej tworzą szereg zupełny tonów harmonicznych, zbudowany na jej tonie zasadniczym.*

Do tych dwu praw dodać możemy jeszcze: 3) Wysokość tonu nie zależy ani od kształtu, ani od pola przekroju poprzecznego, byle przekrój ten był dość mały, w porównaniu z długością piszczałki; nie zależy wreszcie od materyału rury, byle ściany jej były tak sztywne, iżby nie brały udziału w drganiu.

Każdemu z tonów własnych piszczałki odpowiada inny sposób drgania gazu znajdującego się w rurze. Ruchy cząstek tego gazu stanowią w ogóle fale stojące. Są to bowiem ruchy wynikające ze spotkania się dwu szeregów fal, postępujących w kierunkach przeciwnych, mianowicie: szeregu fal wzbudzonych przez źródło pobudzające resonancyę u jednego końca (A, ryc. 194) i fal odbitych od końca przeciwnego (B).

Fale stojące dzielą się, jak wiadomo (ust. 202, ryc. 176), na odcinki mające naprzemian przeciwne fazy ruchu, poprzedzielane węzłami zostającymi trwale w spoczynku. Odległość dwu węzłów sąsiednich, n. p. W i W_1 (ryc. 195), albo dwu strzałek S i S_1 mierzy zawsze połowę długości fali; odległość ta jest największa dla tonu zasadniczego. Wyższym tonom piszczałki odpowiadają coraz krótsze odstępy węzłów.

Pamiętając, że miejsca najsilniejszego drgania S, S_1.... (strzałki) nie mają ani zgęszczeń, ani rozrzedzeń (ust. 202), zrozu-

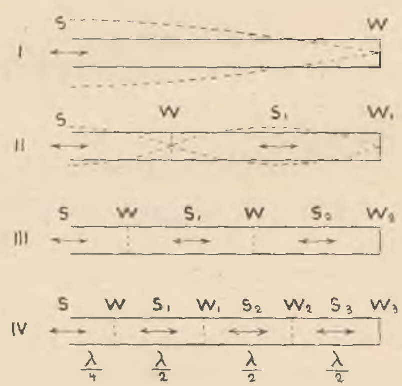


Ryc. 195.

miemy łatwo, że u obu końców piszczałki otwartej powstawać muszą strzałki, gdyż gęstość i ciśnienie gazu mają tam wartości stałe, takie jak otaczająca atmosfera. Węzły natomiast mogą tworzyć się tylko we wnętrzu rury. I tak, dla tonu zasadniczego ($\lambda = 2L$) tworzy się jeden węzeł, w połowie długości rury (ryc. 195, I). Dla drugiego tonu własnego ($\lambda = L$) znajdziemy dwa węzły W i W_1 (ryc. 195, II) i t. d. W każdym z tych przypadków odległość dwu sąsiednich węzłów równa się $\frac{\lambda}{2}$; odległość od końca rury do najbliższego węzła jest zawsze $= \frac{\lambda}{4}$.

Gdybyśmy zrobili otwór w ścianie rury, w miejscu najsilniejszego drgania, w S albo S_1, S_2..., drganie gazu nie doznałoby żadnej zmiany, gdyż w tych miejscach panuje wewnątrz rury stałe takież same ciśnienie, jak zewnątrz niej. Podobnież nie zmieniłaby się resonancya, gdybyśmy umieścili we wnętrzu rury stałą przegrodę poprzeczną, w miejscu któregokolwiek węzła, albowiem cząstki gazu w węzłach są nieruchome. Natomiast otwór, zrobiony w rurze około węzła, zmieniłby natychmiast wysokość tonu, albowiem węzeł, odznaczający się zmiennością ciśnienia, nie mógłby tam nadal istnieć.

b) **Piszczałki zamknięte (kryte).** Warunki resonancyi zmieniają się, jeżeli jeden koniec rury, n. p. *B*, jest zamknięty stałą przegrodą; fala zgęszczenia, zdążająca do *B*, odbija się tam jako zgęszczenie, a zarazem prędkość cząstek zmienia kierunek. Zosta-



Ryc. 196.

wiamy czytelnikowi wyprowadzenie praw resonancyi tą drogą, jakiej użyliśmy dla piszczałek otwartych. Tu zwrócimy uwagę, że gdybyśmy w piszczałce otwartej, wydającej ton zasadniczy, umieścili stałą przegrodę w węźle *W* (ryc 195, I), zamienilibyśmy ją na piszczałkę zamkniętą, o długości *SW*, nie zmieniając wysokości tonu. Wnosimy stąd, że piszczałka zamknięta wydaje ton tej samej wysokości, jak piszczałka otwarta, dwa razy dłuższa. Przy jednakowej przeto długości (ust. 220) p i s z c z a ł k a z a m k n i ę t a j e s t o o k t a w ę n i ż s z a o d o t w a r t e j. Ryc. 196 objaśnia rozmieszczenie w ę z ł ó w w piszczałce zamkniętej dla kolejnych jej tonów własnych. Przy końcu zamkniętym tworzy się zawsze węzeł, przy otwartym strzałka. Z tego wynika, iż długość ćwierci fali $\frac{\lambda}{4}$ mieści się w długości piszczałki (L): dla tonu zasadniczego (ryc. 196, I) jeden raz; dla drugiego tonu własnego 3 razy, dla trzeciego 5 razy i t. d.

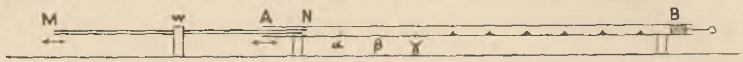
Zważywszy, że częstość tonu zasadniczego równą się częstości piszczałki otwartej o długości $2L$, otrzymamy następujący szereg tonów własnych piszczałki zamkniętej:

$$n_1 = \frac{c}{4L},\; n_2 = 3 \cdot \frac{c}{4L},\; n_3 = 5 \cdot \frac{c}{4L}, \ldots$$

Tony własne piszczałki zamkniętej tworzą szereg tonów harmonicznych nieparzystych. Długość fali tonu zasadniczego równa się czterokrotnej długości piszczałki.

Wyłożone wyżej prawa resonancyi piszczałek odkrył Daniel Bernouilli w r. 1762. One stosują się, ściśle biorąc, do piszczałek nieskończenie wązkich; do zwyczajnych ze znacznem przybliżeniem, ilekroć promień rury jest mały w porównaniu z długością fali. Doświadczenie okazuje, że wysokość tonu piszczałek jest wyraźnie niższa od obliczonej za pomocą powyższych wzorów. Widoczną jest rzeczą, że powyższe dowodzenie praw Bernouilliego byłoby zupełnie ścisłe, gdyby gaz we wnętrzu piszczałki był ograniczony na otwartym końcu rury powierzchnią swobodną i gdyby zewnątrz rury nie było wcale atmosfery gazowej. W rzeczywistości ruch drgający nie ogranicza się do wnętrza rury. Gaz drgający w rurze zmuszony jest ciągnąć za sobą bezwładną masę atmosfery zewnętrznej, co sprawia zniżenie tonu (ust. 218). Znaczniejszy ruch gazu zewnętrznego spotyka się zresztą tylko w pobliżu końców rury; w większej odległości amplituda jest nieznaczna. Wzory Bernouilliego dają więc rzeczywistą wysokość tonu, jeżeli zamiast L podstawimy L', cokolwiek większą, t. zw. teoretyczną długość piszczałki.

Doświadczenie Kundta. Węzły powstające w piszczałkach i w ogóle w drgających słupach gazowych można uwidocznić rozmaitymi sposobami. Najważniejszym jest sposób następujący, wskazany przez Kundta. Do poziomej rury szklanej AB (ryc. 197), zawierającej powietrze, albo jakikolwiek inny gaz, wsypuje się cokolwiek proszku lekkiego (lycopodium, opiłki korkowe lub krzemionkę) i wzbudza się w gazie silne fale stojące. Drganie cząsteczek gazu zmiata proszek z tych miejsc, gdzie tworzą się strzałki, a gromadzi go w węzłach; wskutek tego węzły odznaczają się wyraźnie szeregiem poprzecznych prążków α, β, γ,... Do wzbudzania fal służy pręt szklany MN, utwierdzony stale w połowie długości, w punkcie w i nie stykający się ze ścianami rury AB. Pocierając



Ryc. 197.

połowę Mw kawałkiem mokrego sukna, wprowadza się pręt w silne drganie podłużne, przyczem w szkle tworzy się fala stojąca, w której w jest węzłem, M i N są strzałkami. Na końcu N pręta naklejony jest krążek korka, albo papieru, stanowiący rodzaj tłoka drgającego w rurze AB. Krążek ten jest źródłem fal stojących w gazie. Drganie cząstek gazu w tem doświadczeniu nie jest drganiem swobodnem, lecz zależy od drgań pręta; wysokość tonu n nie zależy też od długości rury, lecz jest gazowi narzucona przez pręt drgający.

Doświadczenie Kundta bywa wykonywane: 1) celem wymierzenia częstości drgań (n) pręta szklanego. Mamy bowiem:

$$\alpha\beta = \beta\gamma = \ldots = \tfrac{1}{2}\lambda = \tfrac{1}{2}\frac{c}{n}, \text{ skąd oblicza się } n = \frac{c}{\lambda},$$

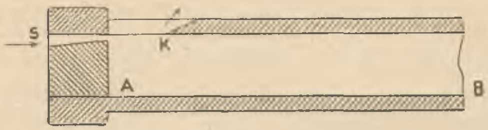
w czem c oznacza znaną prędkość głosu w powietrzu; 2) celem porównywania prędkości głosu w dwu gazach. Napełniwszy AB innym gazem, otrzymamy inną odległość węzłów $= \frac{1}{2}\lambda'$, odpowiednio do innej prędkości głosu c'; ponieważ n nie zmieniło się, przeto mamy $c : c' = \lambda : \lambda'$.

Resonatory. Jeżeli piszczałka zamknięta jest krótką, a przytem szeroką, wówczas powstawanie węzłów w jej wnętrzu jest bardzo utrudnione; wydaje ona niemal wyłącznie ton zasadniczy. Beczki próżne, pękate flaszki, tudzież resonatory Helmholtza (ust. 215) należy uważać jako odmiany piszczałki zamkniętej. Ryc. 198 objaśnia, jak się odbywa drganie powietrza w resonatorze kulistym, mającym jeden okrągły otwór SS; dno kuli WW stanowi powierzchnię węzłową. Amplitudy innych

Ryc. 198.

cząstek w kuli są zresztą tak małe, że całe wnętrze kuli można uważać jako objętość węzłową, która ulega peryodycznie zgęszczeniu i rozrzedzeniu, dostarczając przez to siły sprężystej regulującej drganie masy bezwładnej *SS*. Z tego wynika, że kształt naczynia nie ma wpływu na wysokość tonu, co doświadczenie istotnie wykazało. Zwiększenie objętości naczynia zniża wysokość tonu własnego; podobnie działa zmniejszenie otworu *S*.

226. Instrumenty muzyczne dęte. Zależnie od sposobu użytego do wzbudzania resonancyi odróżnia się piszczałki fletowe i stroikowe. Pierwszy z tych sposobów, stosowany w flecie, fujarce, gwizdawkach, w niektórych piszczałkach organowych i t. p., polega na tem, że na ostrą krawędź rury, służącej jako resonator, kieruje się bystry prąd powietrza. Prąd ten, łamiąc się na krawędzi, sprawia syczenie, które może być uważane jako bezładna mieszanina rozmaitych tonów. Między temi drganiami piszczałka wybiera te, które odpowiadają własnemu jej strojowi i zostaje przez nie wprowadzoną w prawidłowe drganie. Znany sposób gwizdania na kluczu stanowi dostateczne objaśnienie tego sposobu wzbudzania dźwięków. Ryc. 199 wyobraża przecięcie fujarki. Rura *AB* jest właściwą

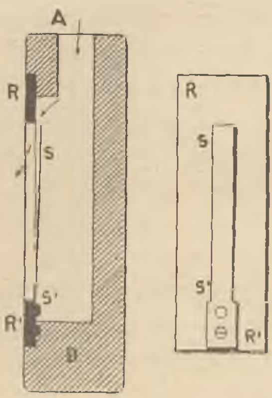


Ryc. 199.

ściwą piszczałką; prąd powietrza wstępuje przez szparę *S* i łamie się na krawędzi *K*. utworzonej przez klinowaty brzeg otworu wyciętego na końcu rury. Wzmacniając stopniowo prąd powietrza, można wywołać po kolei coraz wyższe tony własne piszczałki, gdyż wzmocnienie prądu podwyższa szelest pobudzający piszczałkę. W ogólności otrzymuje się dźwięki złożone z kilku tonów własnych.

Drugi sposób pobudzania piszczałek i innych resonatorów polega na zastosowaniu stroików. Stroikami nazywamy w ogóle ciała sprężyste, umieszczone przy ujściu przewodu przewodzącego prąd powietrza, które przez drganie swe naprzemian otwierają i zamykają ujście przewodu. Ciągły prąd powietrza zamienia się działaniem stroika na prąd przerywany peryodycznie, przez co staje się źródłem dźwięku.

Działanie stroika jest tedy zupełnie podobne do działania syreny (ust. 207). Bardzo pospolite urządzenie stroika spotykamy w t. zw. harmonice, której przyrząd głosowy wyobraża ryc. 200. Stroikiem jest tu sprężysta blaszka *S*, drgająca w otworze ramki *RR'*. Wązka szparka między blaszką a brzegiem otworu zamyka się przy każdem drganiu stroika. Drganie tej blaszki, jak wszystkich w ogóle stroików, wywołuje tenże sam prąd powietrza, który wskutek przerywania jest źródłem dźwięku. Dzwięk wywołany miernym prądem powietrza jest stosunkowo silny i pełny; obfituje w liczne tony harmoniczne. Stroik nadaje mu tylko cechę wysokości, zależną od sztywności i grubości blaszki. Barwa natomiast zależy od nagłości przerywania prądu.



Ryc. 200.

Stroik sam przez się wydaje tylko cichy i czysty ton; właściwem źródłem dźwięku jest prąd powietrza.

Jeżeli stroik jest bardzo sztywny, wówczas narzuca on drgania swe cząstkom powietrza w piszczałce, które wykonywają wówczas drgania podniecane. Częściej atoli dzieje się naodwrót; stroik bywa wiotki i przystosowuje się do okresu drgań swobodnych powietrza w piszczałce. Tak n. p. w trąbce myśliwskiej, albo sygnałowej, stroikiem są wargi trębacza; trąbki tego rodzaju wydają ograniczoną ilość tonów, mianowicie tony własne słupa gazowego, zawartego w trąbce. Napięcie warg niema wpływu na wysokość tonu, od napięcia tego zależy tylko to, który z tonów własnych przy zadęciu trąbki się odezwie. W klarnecie, oboju i fagocie stroik składa się z jednej, albo dwu drzazg drewnianych; tony nie zależą również od stroika, lecz od kształtu i rozmiarów rury.

W narządzie głosowym ludzkim natomiast wysokość tonu może być dowolnie zmienianą, przez większe lub mniejsze napięcie stroika, tudzież przez zmianę jego rozmiarów. Stroik stanowią tu t. zw. struny głosowe, umieszczone w krtani, na górnym końcu tchawicy. Przełyk i jama ustna służą jako resonator, który, zależnie od kształtu i wielkości, wzmacnia tony wydawane przez struny głosowe i nadaje głosowi ludzkiemu właściwą mu barwę.

227. Podłużne drgania prętów. Pręty sprężyste można wprowadzać w drgania podłużne przez pocieranie (jak w doświadczeniu Kundta ust. 225). Do fal stojących, które wówczas się tworzą, stosuje się dosłownie to samo rozumowanie, którego użyliśmy w przypadku drgania słupów powietrza w piszczałkach. Piszczałce otwartej odpowiada pręt, którego oba końce są swobodne. Pręt taki powinien być utwierdzony w tych miejscach, w których podczas drgania tworzą się węzły: dla tonu zasadniczego w środku, dla drugiego tonu własnego w przekrojach odległych o ćwierć długości pręta (L) od końców i t. d. Wysokość tonów własnych oblicza się, jak dla piszczałek otwartych, według wzoru:

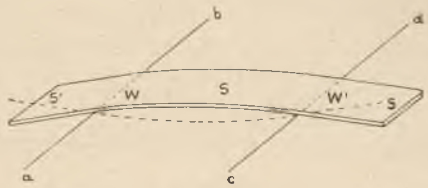
$$n = i \cdot \frac{c}{2L},$$

w którym c oznacza prędkość przewodzenia fal podłużnych wzdłuż pręta, i numer porządkowy tonu, a zarazem liczbę odpowiadających mu węzłów. Prędkość c zależy od gęstości pręta d, tudzież od spółczynnika (ε) sprężystości przy wydłużaniu; mianowicie jest (ust. 196):

$$c = \sqrt{\frac{\varepsilon}{d}}, \text{ zatem: } n = \frac{i}{2L}\sqrt{\frac{\varepsilon}{d}}.$$

Wzoru tego używa się niekiedy do obliczania spółczynnika ε, gdy n wyznaczono n. p. metodą Kundta. Podłużne dźwięki prętów (zwykle bardzo wysokie), nie bywają używane w muzyce, jakkolwiek są ściśle harmoniczne.

228. Poprzeczne drgania prętów i płyt mogą być wzbudzone za pomocą smyczka, albo przez uderzenie miękkim młoteczkiem. Ilość możliwych sposobów drgania jest bardzo znaczna, zależy bowiem nietylko od liczby tworzących się węzłów, lecz i od sposobu utwierdzenia pręta. Ryc. 187 wyobraża trzy sposoby drgania pręta utwierdzonego na jednym końcu; ryc. 201 przedstawia pręt wsparty luźnie na nitkach ab i cd, w węzłach W i W'. Prawo podziału na odcinki drgające między węzłami, dla prętów drgających poprzecznie, jest inne, znacznie zawilsze, aniżeli dla prętów drgających podłużnie, lub dla piszczałek. *Tony własne pręta nie tworzą szeregu harmonicznego*, wskutek czego pręt nie wydaje w ogóle mówiąc dźwięków, odpowiadających drganiom peryodycznym.



Ryc. 201.

Częstość drgań poprzecznych pręta, o przekroju prostokątnym, jest proporcyonalna do grubości (mierzonej w kierunku równoległym do płaszczyzny drgania), *nie zależy od szerokości* (t. j. od rozmiaru prostopadłego do płaszczyzny drgania: albowiem dwa pręty jednakowe, umieszczone jeden obok drugiego, nie zmieniłyby sposobu drgania, gdyby je spojono w jeden pręt, o szerokości podwójnej); nadto jest *wprost proporcyonalna do prędkości przewodzenia fal podłużnych, odwrotnie proporcyonalna do kwadratu długości.*

Oznaczając przez a grubość pręta, znaleziono następujący wzór ogólny na częstość drgań poprzecznych:

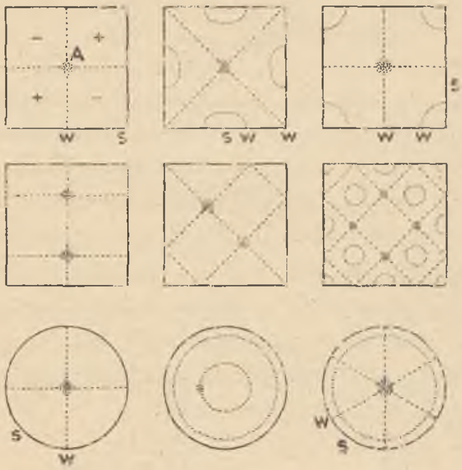
$$n = \nu \cdot \frac{a}{L^2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{d}}.$$

Litery L, ε, d mają toż samo znaczenie, jak w ustępie poprzedzającym: ν oznacza liczbę oderwaną, której wartość zależy od sposobu utwierdzenia pręta, tudzież od ilości węzłów. Tak n. p. dla trzech sposobów drgania, przedstawionych na ryc. 187, ν posiada po kolei wartości: 0·1616; 1·0124 i 2·8346.

W przypadku ryc. 201 jest $\nu = 1{\cdot}028$. Wzór powyższy stosuje się również do prętów okrągłych, o promieniu r, skoro zamiast a podstawimy: $r\sqrt{3}$.

O wiele więcej jeszcze zawiłemi są drgania poprzeczne płyt z materyałów sprężystych. Pręt zgina się bowiem w jednym tylko kierunku, gdy drganie płyty możemy uważać jako wynik jednoczesnych wygięć w dwu kierunkach prostopadłych.

Płyty dzielą się zwyczajnie na pola drgające unisono, przedzielone liniami węzłowemi. Linie te, odkryte przez Chladnego, można uwidocznić w następujący sposób. Płytę ustawioną poziomo i utwierdzoną w jednym punkcie (*A*, ryc. 202) posypuje się drobnym piaskiem, poczem wprowadza się ją w drganie, pociągając smyczkiem po krawędzi; piasek gromadzi się na liniach węzłowych, kreśląc t. zw. figury Chladnego. Rozmaitość tych figur jest nader wielka; jako przykład wyobrażone są niektóre na ryc. 202. Aby wywołać którą z tych figur, n. p. dwie średnice prostopadłe do siebie, na płycie okrągłej, utwierdzonej w środku, dotykamy

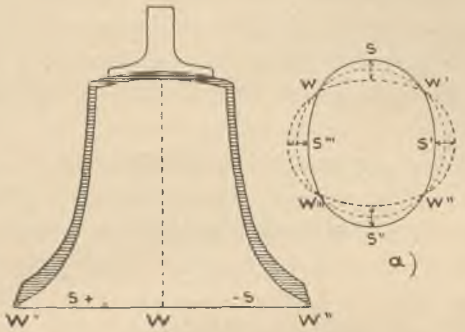


Ryc. 202.

palcem punktu *W*, przez który ma przejść jedna z linii węzłowych, a jednocześnie pociągamy smyczkiem w punkcie *S* (odległym o 45^0 od *W*). Tony własne płyt są w ogóle nieharmoniczne.

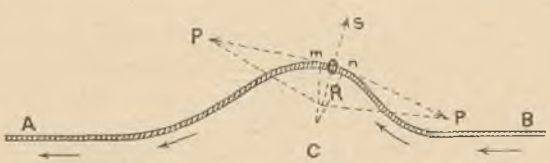
Dzwony (ryc. 203) można uważać jako płyty zakrzywione. Linie węzłowe przechodzą z góry na dół, od wierzchu do brzegu dolnego (wieńca). Tonowi zasadniczemu odpowiadają cztery takie linie węzłowe, przecinające wieniec w punktach $W\ W'\ W''\ W'''$ (ryc. 203 a), odległych od siebie o 90^0. Kolisty brzeg wieńca przemienia się wśród drgania na elipsę, wydłużającą się naprzemian w kierunku średnic SS'' i $S'\ S'''$.

229. Struny. Prędkość fal na strunie. Struną nazywamy w akustyce nić zupełnie wiotką (nie mającą sztywności), napiętą trwale, przez siły zewnętrzne działające na jej końce. Do określenia tego stosują się dość dokładnie cienkie sznury; struny kiszkowe używane w niektórych instrumentach muzycznych (skrzypce, wiolonczela, gitara i t. p.); nawet druty metalowe, jeżeli są cienkie, a długie (fortepian, arfa, cytra). Struna potrącona drga w kierunku poprzecznym.



Ryc. 203.

Przyjmuje się, że drgania mają tak małą amplitudę, a napięcie jest tak znaczne, iż można opuścić drobne wahania napięcia, wynikające stąd, że struna, prosta w stanie równowagi, drgając, wygina się, a wskutek tego staje się nieco dłuższą. Napięcie struny uważać będziemy jako s t a ł e i równe siłom działającym na jej końce; oznaczymy je znakiem *P*.



Ryc. 204.

Wstrząśnienie, udzielone którejkolwiek części struny, wzbudza falę wygięcia, rozchodzącą się w obie strony ze stałą prędkością c. Ażeby obliczyć wartość tej prędkości, na strunie jednostajnej, napiętej siłą P, weźmy pod uwagę wygięcie $AmnB$ (ryc. 204), biegnące wzdłuż struny, z prędkością c, n. p. w kierunku od A do B. Gdybyśmy strunę samą poruszali jednostajnie w kierunku przeciwnym, t. j. od B do A, z tą samą prędkością c, wówczas fala zajęłaby położenie nieruchome w przestrzeni. Weźmy pod uwagę nieskończenie małą cząstkę struny mon, w którejkolwiek części fali. Na końce jej m i n działają siły jednakowego natężenia P i P, równe napięciu struny. Siły te mają wypadkową OR, prostopadłą do mn, działającą ku wklęsłej stronie wygięcia, t. j. w stronę środka krzywizny łuku mn. Nadto, cząstka uważana, poruszając się po linii krzywej, podlega sile odśrodkowej OS, działającej ku stronie wypukłej wygięcia, w kierunku wprost przeciwnym sile OR. Siły te powinny znosić się wzajemnie, t. j. powinno być $OR = OS$; w przeciwnym razie fala nie zachowywałaby stałego kształtu.

Zważywszy, że kąty mCn i OPR są równe, mamy następującą proporcyę: $OR : OP = mn : mC$, albo, oznaczywszy $mC = r$ i zważywszy, że odcinek OP wyobraża napięcie P struny,

$$OR = \frac{P}{r} mn.$$

Celem obliczenia siły odśrodkowej, oznaczmy masę jednostki długości struny przez μ; masa odcinka o długości mn wynosić będzie: $\mu . mn$. Pamiętając, że masa ta porusza się z prędkością c, na kole o promieniu r, znajdziemy (ust. 48):

$$OS = \frac{\mu c^2}{r} mn.$$

Z porównania sił OR i OS wynika: $\frac{P}{r} . mn = \frac{\mu c^2}{r} . mn$, skąd:

$$c = \sqrt{\frac{P}{\mu}}.$$

Prędkość fal na strunie jest wprost proporcyonalna do pierwiastka z jej napięcia, odwrotnie proporcyonalna do pierwiastka z masy jednostki długości (gęstości linijnej).

230. Resonancya strun. Znając prędkość przewodzenia fal, znajdziemy z łatwością warunki resonancyi struny, a tem samem szereg własnych jej tonów. W tym celu zastosujemy toż samo rozumowanie, którego używaliśmy w ust. 225 do zbadania resonancyi piszczałek. Przyjmujemy strunę napiętą między dwoma stałymi punktami A i B. Dajmy na to, że jakakolwiek pobudka zewnętrzna wstrząsa peryodycznie którykolwiek punkt M struny. Pytamy, jaka powinna być częstość n tych wstrząśnień, aby one wprowadziły strunę w trwałe drganie, t. j. aby wzbudziły resonancyę. Zwróćmy uwagę n. p. na grzbiet fali, wzbudzonej w punkcie M.

Grzbiet ten biegnie do końca B, odbija się tam jako dolina (ust. 201, ryc. 173, I); przebiega wstecz od B do A; odbiwszy się powtórnie od końca A, zamienia się znowu na grzbiet i powraca w pierwotnej formie do punktu M. Oczywistą jest rzeczą, że warunkiem wzmocnienia tej fali będzie, żeby w chwili powrotu jej do punktu M, pobudka udzieliła strunie ponownego wstrząśnienia, w tym samym kierunku jak poprzednio. W ciągu czasu, którego fala użyła na przebycie drogi $MBAM$ (okres zasadniczy), pobudka mająca wywołać resonancyę powinna zatem wykonać jedno całkowite drganie, albo dwa, trzy, ogólnie mówiąc całkowitą liczbę (i) drgań. W pierwszym przypadku otrzymamy drganie zasadnicze struny; następne odnoszą się do dalszych jej tonów własnych.

Znajdujemy więc następujący warunek resonancyi, zupełnie jak dla piszczałki otwartej: *okres drgania zasadniczego struny równy jest czasowi, w ciągu którego fala przebiega dwukrotnie długość struny. Tony własne struny tworzą pełny szereg harmoniczny, zbudowany na jej tonie zasadniczym.*

Celem obliczenia wysokości tonu zasadniczego (n_1) oznaczmy długość struny przez L, przez c prędkość, z jaką przebiegają po niej fale; otrzymamy wtenczas następujące równanie, wyrażające warunek resonancyi: $n_1 = \frac{c}{2L}$. Wprowadziwszy tu za c wartość obliczoną w poprzedzającym ustępie, znajdziemy:

$$n_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{P}{\mu}}.$$

Jeżeli przekrój struny jest kolisty, jak to zwykle bywa, natenczas masę jednostki długości możemy wyrazić przez $\mu = \frac{\pi d^2 \rho}{4}$, w czem d oznacza średnicę, ρ gęstość materyału struny. Mamy przeto:

$$n_1 = \frac{1}{Ld}\sqrt{\frac{P}{\pi\rho}}.$$

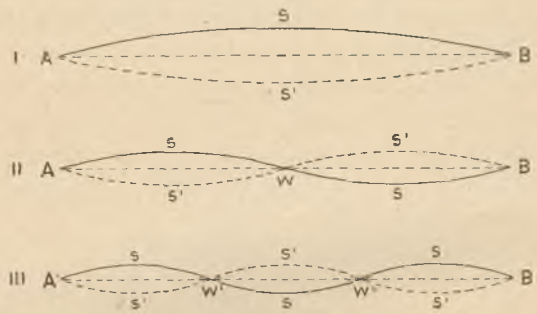
W równaniu tem zawarte są następujące prawa, odkryte doświadczalnie przez M e r s e n n e'a w początku siedmnastego stulecia:

Wysokość tonu zasadniczego struny jest: 1) wprost proporcyonalna do pierwiastka z napięcia, 2) odwrotnie proporcyonalna do długości, 3) i grubości, 4) odwrotnie proporcyonalna do pierwiastka z gęstości materyału struny.

Każdemu z tonów własnych odpowiada właściwy sposób drgania struny. Jeżeli struna jest potrącana peryodycznie, ruchem harmonicznym prostym, w okresie T, odpowiadającym jednemu z jej tonów własnych, wówczas powstają na niej fale wygięcia o długości $\lambda = cT = \frac{c}{n}$. Tak n. p. dla tonu i-go mamy:

$$n_i = i\,\frac{c}{2L},\ \text{zatem}\ \lambda = \frac{2L}{i}.$$

Fale te, spotykając się z falami odbitemi od końców (według wzoru ryc. 175), tworzą fale stojące, w których odległość dwu węzłów sąsiednich wynosi $\frac{\lambda}{2} = \frac{L}{i}$. Końce struny są oczywiście zawsze węzłami. Dla tonu zasadniczego ($i = 1$) mamy więc (ryc. 204, I)



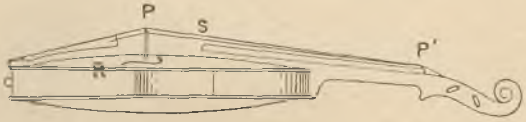
Ryc. 204.

dwa węzły w punktach końcowych; inne cząstki struny, wyginając się do góry i na dół, przechodzą jednocześnie przez położenia równowagi. Dla drugiego tonu własnego (ryc. 204, II) tworzy się nadto trzeci węzeł w połowie długości AB; dla trzeciego tonu (III) dwa węzły pośrednie i t. d.

Do sprawdzenia i objaśnienia praw ruchu drgającego struny używa się przyrządu zwanego m o n o c h o r d e m. Jest to pudełko resonansowe, na którem napięta jest struna, wsparta na dwu nieruchomych podstawkach. Do doświadczeń służy część struny ograniczona podstawkami; długość jej wskazuje podziałka, umieszczona na pudełku. Jeden koniec struny jest stale przywiązany do pudełka, na drugim wisi ciężar (*P*) dający jej napięcie.

Ażeby wywołać *i*-ty ton własny struny, dotykamy jej lekko palcem, w punkcie oddalonym od jednej z podstawek o $\frac{1}{i}$ długości (przez co punkt ten staje się węzłem) i pociągamy jednocześnie smyczkiem w połowie tej długości.

231. Dźwięk strun. Struna, której końce uwiązane są do ciał stałych i niepodatnych, wydaje dźwięk nader słaby, gdyż dzieli się ruchem swym z niewielką ilością cząstek powietrza. Celem wzmocnienia dźwięku napina się struny na pudełkach drewnianych, o cienkich, sprężystych ścianach, wypełnionych powietrzem i zaopatrzonych kilku otworami. One stają się wówczas właściwemi źródłami dźwięku, a struna jest poniekąd tylko regulatorem ruchu



Ryc. 205.

drgającego ścian pudełka resonansowego i powietrza w niem zawartego. Wiadomo, że dźwięk skrzypiec (ryc. 205) zależy przedewszystkiem od sprężystości i kształtu pudełka *R*. W przenoszeniu drgania struny *S* na pudełko resonansowe pośredniczy podstawka *P*. Dzieje się to w ten sposób, że struna wywiera na podstawkę ciśnienie, zmieniające się peryodycznie, a zgodnie z drganiem struny.

Struny bywają wprowadzane w drganie przez szarpnięcie palcem (arfa, gitara, cytra), przez uderzenie sprężystym młoteczkiem (fortepian), albo przez tarcie za pomocą smyczka (skrzypce, altówka, wiolonczela i t. p.). Przy każdym z tych sposobów podniecania drgań, struna wyprowadzona z położenia równowagi przyjmuje kształt linii łamanej, daleki od kształtu sinusoidy, odpowiadającego zasadniczym jej sposobom drgania (ryc. 204). Z tego wynika, że żaden z powyższych sposobów pobudzania struny nie wytwarza tonów pojedynczych. W ogólności zostają wywołane jednocześnie wszystkie tony własne struny, tworzące, jak wiemy, szereg harmoniczny; głos wydawany przez strunę jest wskutek tego dźwiękiem wielce złożonym. Na strunie poruszającej się w całości, odpowiednio do pierwszego sposobu drgania (ryc. 206, I), układają się jednocześnie (stosownie do prawa o składaniu małych ruchów), odchylenia odpowiadające sinusoidom o trzech, czterech i t. d. węzłach (jak ryc. 184). Barwa dźwięku, wywołanego przez ten ruch złożony, zależy od liczby i od natężenia drgań prostych, składowych. Zależy ona przeto od sposobu pobudzenia struny, od miejsca, w którem to czynimy, wreszcie od większej lub mniejszej giętkości, tudzież od grubości struny.

Działanie smyczka polega na tarciu między włosieniem natartym żywicą, a struną. Gdy struna odchyla się w tę stronę, w którą ciągniemy smyczek, prędkość jej względem smyczka jest mała, albo zero: tarcie smyczka jest wówczas statyczne. Cząstka struny, uchwycona przez smyczek, porusza się jednostajnie, razem ze smyczkiem, dopóki zwiększone napięcie nie oderwie jej od smyczka; odskoczywszy następnie, porusza się przeciw ruchowi smyczka (tarcie przy zwiększonej prędkości względnej jest mniejsze) aż do chwili, gdy znowu zostanie przez smyczek uchwyconą. Drganie, wywołane tym sposobem, składa się ze skoków odbywających się tam i napowrót z prędkością jednostajną. Ruch ten wyobrażony jest na ryc. 22. Tam wyjaśniliśmy również, w jaki sposób można go otrzymać przez składanie szeregu ruchów drgających prostych. Zbytecznem byłoby dodawać, że każde z tych drgań składowych objawia się słuchowi jako odpowiedni ton i może być z ogólnej sumy dźwięków wydzielone, za pomocą odpowiednio dostrojonego resonatora.

Podobne, aczkolwiek mniej proste ruchy wywołuje szarpnięcie struny, albo uderzenie jej młotkiem. Miejsce, w którem strunę wstrząsamy, wywiera również wpływ na barwę dźwięku. Dostrzeżono mianowicie, że w dźwięku wywołanym brakują te tony własne struny, którym odpowiada węzeł w miejscu wstrząsanem. Jeżeli n. p. uderzymy strunę w połowie długości, wówczas odpadną wszystkie wyższe oktawy tonu zasadniczego.

Grubość i giętkość struny wpływają na barwę dźwięku o tyle, iż od tych czynników zależy większa lub mniejsza łatwość powstawania wysokich tonów własnych, to jest tych tonów, którym odpowiada większa ilość węzłów, dzielących strunę na odcinki krótkie, a wskutek tego ostro wygięte. Im cieńszą i bardziej giętką jest struna, tem łatwiej powstają owe tony, nadające dźwiękowi barwę ostrą, brzęczącą.

232. Sposoby badania ruchów drgających. (Wibrografia, wibroskopia, stroboskopia). Drgania ciał dźwięczących są tak szybkie, że celem dokładnego zbadania ich potrzeba uciekać się do szczególnych sposobów. Jeden z nich polega na wykreśleniu linii falowej danego ruchu (wibrografia), jak to objaśniliśmy na kilku przykładach w ust. 23. Sposoby wibroskopijny i stroboskopijny polegają na tej własności oka, iż otrzymane wrażenia świetlne trwają w niem przez pewien czas po zgaszeniu światła. Wrażenia przerywane, następujące szybko jedno po drugiem, łączy ono w jedno wrażenie ciągłe.

Patrząc n. p. na węgiel rozżarzony, poruszany szybko po kole, w ciemnym pokoju, nie dostrzeżemy wcale ruchu węgla, lecz obaczymy świecące koło. Wibroskopia polega właśnie na spostrzeganiu takich linii krzywych, uzyskanych przez złożenie nieznanego ruchu drgającego, po linii prostej, z innym ruchem drgającym znanym (zwykle z drganiem prostem, o tej samej częstości). Tu należy sposób optyczny porównywania wysokości tonu widełek strojowych, objaśniony w ust. 27 (ryc. 27).

Stroboskopia nakoniec polega na pozornem zwolnieniu drgania, na pozornem zmniejszeniu jego częstości. Wyobraźmy sobie ciało, drgające w pokoju zaciemnionym, który rozjaśnia się peryodycznie, przez krótkie błyski światła, następujące w równych odstępach czasu, m razy na sekundę. W chwili każdego rozjaśnienia obaczymy ciało w ogóle w innej fazie drgania; ono przedstawi się nam w ruchu, jednak ruch ten będzie różny od rzeczywistego.

Jeżeli położenia ciała, podczas kolejnych błysków, różnią się znacznie, wówczas ruch wydawać się będzie skaczącym. Jeżeli częstość n drgań ciała zgadza się dokładnie z częstością oświetleń m, wtenczas ciało będzie pozornie nieruchome. To samo mieć będzie miejsce, jeżeli liczba n będzie całkowitą wielokrotnością liczby m n. p. $n = am$, albowiem w ciągu przerwy między dwoma kolejnymi błyskami ciało wykonywa a drgań całkowitych i wraca w chwili każdego błysku do tego miejsca, jakie zajmowało w chwili błysku poprzedzającego.

Inaczej przedstawia się rzecz gdy $n = am + n'$, t. j. gdy z dzielenia liczby n przez m zostaje ułamek $\frac{n'}{m}$. W ciągu każdego okresu ciemności, trwającego $\frac{1}{m}$ sekundy, ciało wykonywa a drgań całkowitych, a nadto posuwa się jeszcze naprzód o $\frac{n'}{m}$-tą część drgania. Jeżeli n' jest małą, m stosunkowo wielką liczbą, wówczas ciało posuwać się będzie pozornie w drobnych skokach, które jednak wskutek trwałości wrażeń świetlnych, przedstawią się jako ruch ciągły. Ruch ten, zupełnie podobny do rzeczywistego drgania, różnić się będzie od niego tylko znacznie zmniejszoną częstością. Skoro na $\frac{1}{m}$ sekundy przypada $\frac{n'}{m}$-ta część tego zwolnionego drgania, przeto częstość jego będzie wyrażona liczbą:

$$n' = n - am.$$

Metoda stroboskopijna może być stosowaną zarówno do drgań prostolinijnych, jak i do ruchów peryodycznych, odbywających się po liniach krzywych. Zamiast peryodycznego oświetlenia ciała drgającego, można patrzeć na nie w pełnem świetle, przez krążek nieprzeźroczysty, wirujący jednostajnie, a opatrzony w pobliżu obwodu szeregiem otworów, umieszczonych w równych odstępach n. p. jak na ryc. 179.

Zadania.

388) Do pionowego, wązkiego walcowatego słoja wlewamy zwolna wodę, trzymając nad słojem drgające widełki, nastrojone na ton a'. Słój daje najsilniejszy oddźwięk, gdy odległość poziomu wody od brzegu słoja wynosi 193 *mm*. Obliczyć prędkość głosu w powietrzu.

Odp. 335·8 *m/sek*.

389) Znaleźć wysokość tonu piszczałki otwartej, o długości 80 *cm*, przyjmując 340 *m/sek* jako prędkość głosu w powietrzu.

Odp. $n = 212{\cdot}5$ na sek.

390) Wypisać szereg tonów własnych tej piszczałki, na skali temperowanej, jednostajnej.

Odp. a zniżone, a' zniżone, e'' zniżone i t. d.

391) Wypisać szereg tonów własnych piszczałki zamkniętej tej samej długości.

Odp. A zniżone, e' zniżone, c'' podwyższone i t. d.

392) Obliczyć długość piszczałek otwartych, nastrojonych na tony akordu C, E, G, c, w skali naturalnej ($C = 65$ na sek).

Odp. 261·5; 209·2; 174·3; 130·8 *cm*.

393) Obliczyć wysokość tonu piszczałki otwartej, o długości 50 *cm*, napełnionej i zadętej wodorem.

Odp. $n = \frac{340 \times 14{\cdot}44}{2 \times 0{\cdot}5} = dis''''$.

394) Piszczałka napełniona powietrzem daje ton e'': jaki ton otrzymamy, napełniwszy ją bezwodnikiem węglowym?

Odp. $\frac{651{\cdot}76}{1{\cdot}529} = a'$ zniżone.

395) Jaki ton wydaje piszczałka otwarta, o długości 30 *cm*, zanurzona pod wodę i zadęta wodą? *Odp.* 2390 (d'''' podwyż.).

396) Piszczałka daje w temperaturze 0^0 ton a'; obliczyć wysokość jej w temperaturach 20^0, 100^0, 273^0.

Odp. $n = 450{\cdot}7$; $508{\cdot}5$; $612{\cdot}2$.

397) Piszczałka daje w temperaturze 20^0 ton pewnej wysokości; do jakiej temperatury należałoby ogrzać ją, aby ton jej podniósł się o kwintę? *Odp.* 386^0.

398) Dzwonek ważący 50 *gr* wydaje ton c''''. Obliczyć wysokość tonu dzwonu ważącego 1000 *kg*, przyjmując dla obu ten sam kształt i materyał.

$$Odp. \quad n = 2069 \sqrt[3]{\frac{5}{100000}} = 76{\cdot}2 \text{ (Dis)}.$$

399) Resonator kulisty, pojemności 1 *l*, mający otwór 1 *cm* w średnicy, daje ton *dis* ($n = 156$). Obliczyć wysokość tonu beczki mającej pojemność 10 hektolitrów i otwór mierzący w średnicy 10 *cm*.

Odp. 15·6 (C_{11} zniżone).

400) Pręt stalowy, długości 1 *m*. utwierdzony w połowie długości, wprowadzamy w drganie zasadnicze, przez podłużne pocieranie. Obliczyć wysokość tonu.

$$Odp. \quad c = \sqrt{\frac{\varepsilon}{d}}\,; \quad n = \frac{c}{2L} =$$

$$= \frac{1}{200}\sqrt{\frac{2100 \times 10^6 \times 981}{7{\cdot}7}} = 2587 \text{ na } sek \; (e'''').$$

401) Pręt szklany, o długości 80 *cm*. utwierdzony jest w dwu punktach, oddalonych od końców o 20 *cm*. Jeden koniec wprowadzony jest w rurę szklaną, posypaną wewnątrz lekkim proszkiem (ryc. 197). Przy pocieraniu podłużnem części pręta, leżącej między punktami utwierdzonymi, tworzą się w rurze węzły, w odstępach wynoszących 25·48 *mm*. Obliczyć stosunek prędkości fal podłużnych w pręcie szklanym, do prędkości głosu w powietrzu.

Odp. $800 : 2 \times 25{\cdot}48 = 15{\cdot}7$.

402) Obliczyć stąd spółczynnik sprężystości szkła, na wydłużenie, przyjmując gęstość $= 2{\cdot}5\ gr/cm^3$. *Odp.* $726 \times 10^6\ Gr/cm^2$.

403) Do tego samego pręta przystawiono, na drugim końcu, drugą

rurę szklaną, napełnioną suchym bezwodnikiem węglowym. Znaleziono w tej rurze węzły w odstępie 19·9 *mm*. Obliczyć prędkość głosu w bezwodniku węglowym.

Odp. $\frac{19 \cdot 9 \times 340}{25 \cdot 48} = 265$ *m/sek.*

404) Obliczyć średnicę pręta stalowego o długości 1 *m*, który, utwierdzony stale jednym końcem, wykonywa 5 drgań poprzecznych na sekundę (prędkość fal podłużnych w pręcie stalowym = 5100 *m/sek.*).

Odp. 7 *mm.*

405) Jaką długość powinna mieć blaszka mosiężna stroika w harmonice, jeżeli przyjmiemy jej grubość = 0·1 *mm*, prędkość fal podłużnych w mosiądzu 10·9 razy większą niż w powietrzu, jeżeli nadto stroik daje ton *a'*. *Odp.* Około 12 *mm.*

406) Obliczyć długość ośmiu płytek szklanych (ryc. 206), jednakowej grubości, nastrojonych według skali diatonicznej naturalnej (dur), jeżeli najdłuższa mierzy 1 *dm* długości.

Odp. 1, $\sqrt{\frac{8}{9}}$, $\sqrt{\frac{4}{5}}$, $\sqrt{\frac{3}{4}}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{\frac{3}{5}}$, $\sqrt{\frac{8}{15}}$, $\sqrt{\frac{1}{2}}$ *dm.*

407) Walec kolisty, o promieniu 3 *cm*, opasany jest w około sznurkiem napiętym siłą 21 000 dyn. Obliczyć ciśnienie, jakie jednostka długości (*cm*) sznurka wywiera na walec.

Odp. 21 000 : 3 = 7000 *dyn/cm.*

408) Przyjąwszy, że walec ten obraca się jednostajnie około swej osi, znaleźć prędkość obrotu, przy której ciśnienie sznurka na powierzchnię walca stanie się równe zeru, wiedząc, iż 1 *cm* sznurka waży 0·2 *gr.*

Odp. $\sqrt{\frac{21000}{0 \cdot 2}} : 2\pi \times 3 = 17 \cdot 2$ obrotów na sek.

409) Struna mająca długość = 1 *m* daje ton zasadniczy *c*; o ile wypada skrócić ją, aby otrzymać kolejne tony *d*, *e*, *f*,... skali naturalnej? *Odp.* 11·2 *cm*; 20; 25; 33·4; 40; 46·7; 50.

410) Obliczyć szereg tonów własnych struny ważącej 2·1523 *gr*, długiej na 70 *cm*, napiętej siłą 4×10^6 *dyn.*

Odp. *E* (81·47), *e*, *h*, *e'*, *gis'*, *h'* i t. d.

411) Drut stalowy (gęstość = 7·76 gr/cm^3), długości 1 *m*, grubości 0·5 *mm*, napięty jest ciężarem 8 *Kg*. Obliczyć częstość drgań poprzecznych. *Odp.* 113·5 na *sek.*

412) Struna mierząca 80 *cm* długości, 1 *mm* grubości, daje 120 drgań na sek; ile drgań daje w równych warunkach struna mająca długość 60 *cm*, grubość $\frac{2}{3}$ *mm*? *Odp.* $120 \times \frac{8}{6} \times \frac{3}{2} = 240$.

413) Obliczyć całkowitą siłę, jaką wywierają struny skrzypcowe, nastrojone według skali naturalnej, z jednej strony na szyjkę, z drugiej na płużkę skrzypiec. Długość drgających części strun wynosi 33 *cm*, grubość strun *e''*, *a'*, *d'* po kolei: 0·64; 0·85; 1·1 *mm*, gęstość ich 1·34 gr/cm^3; metr struny *g* waży 3·27 *gr.*

Odp. Napięcia strun wynoszą kolejno 8·149; 6·389; 4·755; 5·427 *Kg.* Całkowita siła = 24·72 *Kg.*

WYKAZ NAZWISK

TOMU PIERWSZEGO.

(Liczby oznaczają stronice).

WYKAZ RZECZY

TOMU PIERWSZEGO,

(Liczby oznaczają stronice).

Zbiór oznaczeń

ważniejszych wielkości, tudzież ich wymiary *c. g. s.*

Część pierwsza.

u, v, V, prędkość . . . cm/sek
s, droga . . . . cm
t, czas . . . . sek
α, δ, kąty (faza) 0
γ, przyśpieszenie . . cm/sek^2
r, promień, odległość . . . cm
T, okres . . . . sek
n, częstość . . . . . $1/sek$
π, stosunek obwodu do średnicy 0
τ, czas . . . . sek
a, b, l, długości (amplituda) . cm
ε, ekscentryczność 0
λ, długość fali . . . . . . cm
ω, prędkość kątowa . . $1/sek$
φ, przyśpieszenie kątowe . $1/sek^2$
φ, λ, szerokość geograficzna . 0
m, M, masa . . . . . . gr
P, Q, R, S, F, siły, ciężary $gr\,cm/sek^2$
g, przyśpieszenie ciał spadających; natężenie ciężkości cm/sek^2

z, wysokość . . . . cm
H, moment ruchu . . $gr\,cm^2/sek$
M, moment siły . . $gr\,cm^2/sek^2$
B, moment bezwładności $gr\,cm^2$
k, ramię bezwładności . . . cm
R, promień ziemi . . . . cm
d, D, gęstość . . . . gr/cm^3
δ, ciężar właściwy . . gr/cm^2sek^2
ρ, gęstość względna . . . 0
D, moment kierujący $gr\,cm^2/sek^2$
L, praca . . . . $gr\,cm^2/sek^2$
T, energia kinetyczna $gr\,cm^2/sek^2$
U, energia potencyalna $gr\,cm^2/sek^2$
K, dzielność . . . $gr\,cm^2/sek^3$
J, równoważnik dynamiczny ciepła . . . . $cm^2/stop\,sek^2$
Q, ilość ciepła . . . . $gr\,stop$
albo . . $gr\,cm^2/sek^2$
C, stała grawitacyi . $cm^3/gr\,sek^2$
u, potencyał grawitacyi cm^2/sek^2

Część druga.

v, V, objętość . . . . . cm^3
λ, wydłużenie 0
θ, zgęszczenie 0
d, gęstość . . . . . . gr/cm^3
δ, ciężar właściwy . $gr/cm^2\,sek^2$
z, wysokość (głębokość) . . cm
α, skręcenie 0
p, ciśnienie . . . . $gr/cm\,sek^2$
σ, spółczynnik ściśliwości . . . . . . $gr/cm\,sek^2$
τ, spółczynnik sztywności . . . . . . $gr/cm\,sek^2$
s, S, pole, przekrój . . . cm^2
ε, spółczynnik wydłużenia . . . . . $gr/cm\,sek^2$

w, spółczynnik wytrzymałości . . . . $gr/cm\,sek^2$
f, spółczynnik tarcia . . . 0
μ, spółczynnik lepkości $gr/cm\,sek$
W, wydatek . . . . cm^3/sek
b, stan barometru . . . . cm
A, wysokość atmosfery jednolitej . . . . cm
c, prędkość fal . . . . cm/sek
λ, długość fali . . . . . . cm
T, okres . . . . sek
n, częstość . . . . . $1/sek$
n, spółczynnik załamania . . 0

Dostrzeżone omyłki i uzupełnienia.

Str. 40 w uwadze: J. C. Maxwell: Materya i ruch. Nowe wydanie wyszło jako tomik 6-ty Biblioteki Naukowej Wendego, Warszawa 1914.

Str. 40 w uwadze: M. A. Baraniecki. Tytuł dzieła brzmi: Początkowy wykład syntetyczny własności przecięć stożkowych. Bibl. matemat.-fizyczna, Ser. I, Nr. 1. Warszawa 1885.

Str. 42 wiersz ostatni: Jędrzejewicz: Kosmografia. Wydanie drugie. Bibl mat.-fizyczna, Ser. III, Nr. 2. Warszawa 1906.

Str. 44 wiersz 11 od góry: Powinno być: $r_1^3 : T_1^2 = r_2^3 : T_2^2$.

Str. 120 wiersz 7 od dołu: Popraw: Kepler zamiast Keppler.

Str. 174 wiersz 19 od góry: Zamknąć nawias prosty].

Str. 206 w uwadze: Huygens czytaj Heujchens (por. str. 145).

Str. 268 w uwadze: A. Hoborski: Przyczynek do nauki o potencyale w szkole średniej. Museum Rocznik XXVIII, T. 1. Z. 2. str. 119, (1912)

Str. 271 wiersz 2 od góry: Zamknąć nawias prosty].

Str. 293 wiersz 8 od dołu: Zadanie 255 oznaczono mylnie 225.

Str. 323 w nagłówku: Powinno być: własności nie własność.

Str. 325 wiersz 6 od góry: Powinno być: ślizki nie ślizgi.

Str. 331 w nagłówku: Powinno być: własności nie właściwości.

Str. 361 i następne: Popraw: Bernouilli zamiast Bernoulli.

Str. 402 wiersz 8 od dołu: Popraw: Ryc. zamiast Fig.

1915.

Dzieła wydane z zapomogi Kasy pomocy dla osób pracujących na polu naukowem imienia Dra med. Józefa Mianowskiego, lub ofiarowane na rzecz Kasy.

Nauki przyrodnicze.

Rb. kop.

Berdau Feliks dr. Flora Tatr, Pienin i Beskidu Zachodniego, 1890, VI+827+55 . . . . . 3 —

Braun Julian. Badania w dziedzinie azotowych związków organicznych i ich pochodnych (1900—1908), 1908, VII—238 . . . . . 1 —

Chmielewski Z. Podręcznik analizy chemiczno-rolniczej 1905, 169 . . 1 —

Dyakowski B. Zarys metodyki elementarnego kursu historyi naturalnej. Wyd. W. Jezierski. 1909, 38 . . . . . — 30

Dzieje myśli. Tom I. Zesz. 1. O rozwoju metod badań naukowych. Wiedza ludów pierwotnych. Dzieje astronomii. Rys rozwoju fizyki. W opr. Wł. Heinricha, Ludwika Krzywickiego, Stanisława Kramsztyka i Ludwika Brunera, 1907, XXXI+296, z 82 ilustr. w tekście . 1 50

— **Tom I. Zesz. 2.** Rozwój historyczny pojęć chemicznych. Szkic ewolucyi pojęć w mineralogii. Zarys rozwoju matematyki: a) rozwój matematyki do końca XVI w., b) zarys rozwoju geometryi w starożytności, wiekach średnich i w epoce odrodzenia, c) rozwój matematyki od początku w. XVII. W opr. Leona Marchlewskiego, Józefa Siomy, Michała Feldbluma, Władysława Smosarskiego i Stefana Kwietniewskiego, 1911, 279, z 33 ilustr. 1 50

— **Tom II. Zesz. 1.** Historya ogólnej nauki o ziemi (geografii — geologii). Dzieje nauk biologicznych. Dzieje antropologii. Dopełnienie do historyi fizyki. W opr. Wacława Nałkowskiego, Józefa Nusbauma, Ludw. Krzywickiego i L. Brunera, 1907, 471, 40 ilustr. w tekście, 2 tab. 2 —

— **Tom II. Zesz. 2.** Dzieje psychologii. Dzieje językoznawstwa. W opr. S. Lorii i J. Baudouina de Courtenay. Warszawa, 1909, str. 302 . 1 50

Faraday M. Dzieje świecy, przekład M. i St. Kalinowskich. Str. XXIII+105, 1914 . . . . . — 50

Filipowicz Kazimierz dr. Wiadomości początkowe z botaniki (podług dzieła dra **Le Maout**: »Leçons élémentaires de botanique«) z 194 drzeworytami w tekście, 1884, III+225+II (kart.) . . . . . — 25

Grzybowski J. prof. Przeglądowa mapa geologiczna ziem polskich z tekstem objaśniającym z trzema przekrojami, pod red. prof. J. Morozewicza, wyd. Żyg. Weyberg, 1912, 139, 1 mapa kol. . . . . . 1 —

Guenther Konrad. Zagadnienia życia w świetle darwinizmu. Z upoważ. autora spolszczyli Ad. Kudelski i Kaz. Kulwieć. 1906, XIX+425 2 —

Holleman A. F. prof. Podręcznik chemii nieorganicznej, z 3 niem. wyd. przeł., według 7 wyd. niem. poprawił K. Jabłczyński wyd. 2. 1910, X+410+1 . . . . . 1 50

Jędrzejewicz J. Kosmografia. Wyd. 2 oprac. przez dra M. Ernsta, z 246 fig. w tekście i 11 tabl. 1907, XVI—442 . . . . . 3 —

Kontkiewicz S. Krótki podręcznik mineralogii. 1907, V+226+3 tabl. (karton) . . . . . 1 —

Kozłowski Wł. M. Zasady przyrodoznawstwa w świetle teoryi poznania. 1905, 311 . . . . . 1 —

Kulwieć Kazimierz. Chrząszcze polskie. Klucz do określania owadów tęgopokrywych, dla użytku młodzieży, amatorów i ogrodników. 1907, 227 . . . . . — 60

Loth E. Wskazówki do badań antropologicznych na człowieku żywym. 1914 — 75

Malinowski Edmund dr. Świat roślin. O kształtach roślin, powstawaniu gatunków, krążeniu soków w roślinach. 1912, VI+2 nlb., 145+2 nlb.+108 rys.+2 tabl. barwne . . . . . — 30

Mendel G. Badania nad mieszańcami roślin, przeł. W. Wolska. 1915, II+67 — 50

Rb. kop.

Merczyng H. Teorya prądu elektrycznego. Zarys zasadniczych praw ustalonego i nieustalonego prądu elektrycznego i towarzyszących mu zakłóceń magnetycznych. Podstawy elektromagnetycznej teoryi światła. 1905, IX + 92 . . . . — 75

Miłobędzki Tadeusz. Szkoła analizy jakościowej. 1910, VIII – 271 (karton) 1 20

Mohn H. Zasady meteorologii, przełożył St. Kramsztyk. 1888, XVI + 218 + VI, z 45 drzeworytami i 25 tablicami litografowanemi . . . . 1 —

Neumayr M. prof. Dzieje ziemi, w opracowaniu prof. dra Wiktora Uhliga: I. Geologia ogólna. Wyd. 2 pod red. J. Morozewicza, opracował K. Koziorowski z dopełn. M. Limanowskiego. 1912, XX + 837, mapa barwna, 16 tabl., 300 rys. w tekście . . . . 4 —

— II. Geologia opisowa, przeł. z 2 niem. wyd. J. Lewiński i K. Koziorowski; dopełnienia poczynili: K. Bohdanowicz i J. Grzybowski. Wydal J. Morozewicz. 1908, XVI + 674 + 343 rys. w tekście, 2 mapy barwne, 9 tabl. (1 kolor.) . . . . 4 —

Nussbaum Józef dr. Zasady anatomii porównawczej. I. Wiadomości wstępne i anatomia porównawcza zwierząt bezkręgowych; 211 rys. w tekście oraz 5 tablic litografowanych. 1899, III + 744 + XXI.

— II. Anatomia porównawcza zwierząt kręgowych z 134 drzeworytami. 1903, X + 552 . . . . 4 —

— Zootomia praktyczna. Wyd. staraniem dra Jana Tura, ze 100 drzeworytami. 1908, VIII + 263 . . . . 2 —

Pamiętnik Fizyograficzny, wydany staraniem E. Dziewulskiego i B. Znatowicza: Tom III. Dział I. Meteorologia i hydrografia. II. Geologia z chemią. III. Botanika i zoologia. IV. Antropologia. V. Miscelanea. 1883, 536 + 2 + 213 tab., rys. lit., 21 drzeworytów w tekście.

— V. Dział I, II, III, IV, V. 1885, 4 nlb., 113 + 76 + 233 + 4 + 111 + 104.

— VIII. Dział I, II, III, IV, V. 1888, 2 nlb. + XIX + 191 + 55 + 389 + 17 + 32 + 4 nlb.; 27 tabl. rys., lit. i drzew. w tekście.

Wydawcy: A. Ślósarski i Br. Znatowicz.

— IX. Dział I, II, III, IV, V. 1888, 2 nlb. + XIX + 235 + 45 + 11 + 295 + 77 + IV, 24 tabl. rys. lit. i drzeworytów w tekście.

— X. Dział I, II, III, IV. 1890, 2 nlb. + XXI + 202 + 75 + 437 + 2 nlb. + 20 + II + II, 29 tabl. rys., lit. i drzewor. w tekście.

— XI. Dział I. II, III. 1891, 8 + 18 + 186 + 162 + 133 + II + II, 14 tabl. rys., lit. i drzewor. w tekście.

— XII. Dział II, III, IV. 1895, 17 + 214 + 235 + 23 + II + II + 12 tabl. rys., lit. i drzewor. w tekście.

— XIII. Dział I, II, III. 1895, 19 + 152 + 231 + I + 1 + 7 tabl. rys. lit.

— XIV. Dział I, II, III. 1896, 23 + 151 + 30 + 229 + I + I + 7 tabl. rys. lit. Wydawcy: W. Wróblewski i Br. Znatowicz.

— XV. Dział I. II, III. 1898, 19 + 183 + 285 + 39 + I + I + 4 mapy + 3 tabl. lit.

— XVI. Dział I, II, III. 1900, 13 + 139 + 31 + 44 + 208.

— XVII. Dział I, II, III, IV. 1902, 16 + 134 + 144 + 104 + 22 + I + I + 1 mapa i tabl. lit.

— XVIII. Dział I, II, III, IV, V. 1904, 61 + 193 + 147 + 104 + 244 + 2 + I + I.

— XIX. Dział I, II, III, IV. 1907, 79 + 183 + 59 + 82 + 7 + I + I.

— XX. Meteorologia i Miscelanea. 1910, XLI + 203 + 46, tom . . . 7 50

Wydawcy: K. Kulwieć i K. Stołyhwo.

— XXI. Dział I, II, III, IV, V. 1913, IX + XV + 155 + 30 + 25 + 117 + 48 + 41 + 4 mapy + 19 rys. + 24 tabl. fot.

— XXII. Dział I, II, III, IV, V. 1914, IX + XV + 155 + 30 + 25 + 117 + 48 + 41 + 4 mapy + 19 rys. + 24 tabl. fot.

Pol G. Słownik łacińsko-polski nazw gatunkowych roślin (12 + 17) 1904, 59 — 50

Pożaryski M. Podstawy naukowe elektrotechniki łącznie z zasadami pomiarów. 1915, X + 415, z 427 rys. w tekście 2 40

Siemiradzki I. Gąbczaki jurajskie ziem polskich (Paleontologia ziem polskich pod red. J. Lewińskiego Nr. 1). 1913, 49 + tabl. VIII . . . 1 50

Rb. kop.

Silberstein Ludwik. Elektryczność i magnetyzm. I. 1908, VIII + 366 . 3 50
II. 1910, 304 . . . . 3 —
III. cz. I, 193, 173 . . 1 80

Słownik Geograficzny Królestwa Polskiego i innych krajów słowiańskich. Wyd. pod red. Filipa Sulimierskiego, red. »Wędrowca« mag. n. fil.-hist. b. Szk. Gł. W.; Władysława Walewskiego ob. ziem. kand. n. dypl. Uniw. Dorp. nakł. F. Sulimierskiego i W. Walewskiego. I (A—Der) 1880, str. 960; II (Der—Fż) 1881, s. 927—XVI; III (H—Kę) 1882, s. 967, nakład W. Walewskiego; IV (Kę—Ku) 1883, s. 963; V (Ku—Ma) 1884, s. 960, pod red. B. Chlebowskiego i W. Walewskiego; według planu F. Sulimierskiego i z pomocą zgromadzonych przez niego materyałów: VI (Mal—Net) 1885, s. 960; VII (Net—Per) 1886, s. 960; VIII (Per—Poż) 1887, s. 960; IX (Poż—Ruk) 1888, s. 960; X (Ruk—Soc) 1889, s. 960; XI (Soch—Szi) 1890, s. 960; pod red. B. Chlebowskiego, według planu F. Sulimierskiego, nakł. Władysława Walewskiego do końca X, od XI z zasiłku kasy im. Mianowskiego: XII (Szi—War) 1892, s. 960; XIII (War—Wor) 1893, s. 960; XIV (Wor—Ży) 1895, s. 960—8; przy współudziale od połowy VI Józefa Krzywickiego: XV Dopełnienia (A—Jan), 1900, s. 640; XV cz. 2 (Jan—Żyż). Dodatek (Al Wola J.) 1902, s. 741 + 1 nlb. Zeszyt —52 Tom 450. Komplet . . . . 60 —

Strasburger J. dr., Jost L. dr., Schenk K. dr., Karsten G. dr. Podręcznik botaniki dla szkół wyższych (z XI wyd. niem. przełożyli Jadwiga i Karol Szteinbokowie). Zeszyt I 1913, str. 160. Zeszyt II 1914, s. 161—320. Zeszyt III 1915 . . . . 3 —

Świat i człowiek. Zeszyt I, wyd. 2. Pojęcie rozwoju. Wszechświat i jego rozwój. Rozwój ziemi. Opracowali I. Wasserberg, S. Kramsztyk, W. Nałkowski. 1908, s. XVI + 215 + 82 ilustr. + 3 tabl. kolor. . . 1 35
— Zeszyt II, wyd. 2. Rozwój życia organicznego. Genealogia roślin. Genealogia zwierząt. Pochodzenie człowieka. Rozwój człowieka. Opr. J. Nussbaum, Z. Wóycicki, J. Eismond, K. Stołyhwo, L. Krzywicki. 1912, s. 321 + 73 ilustr. + 1 tabl. 1 60
— Zeszyt III, wyd. 2. Rozwój kultury. Rozwój mowy. Rozwój stosunków gospodarczych. W opr. L. Krzywickiego i K. Appela. Warszawa 1912, s. 356 + 65 ilustr. 1 80
— Zeszyt IV, wyd. 2. Rozwój społeczny. Rozwój psychiczny. Rozwój w dziejach sztuki. Znaczenie rozwoju. W opr. L. Krzywickiego, M. Borowskiego, Wł. Tatarkiewicza i F. Znanieckiego. Warszawa 1913, s. 355 + 5 ilustr. 2 —

Szokalski W. T. Początek i rozwój umysłowości w przyrodzie. 1885, s. VIII + 468 . . . . — 60

Tombeck D. i Gouard E. Chemia przemysłowa, przełożył J. Harabaszewski. 1915, s. XI + 422 . . . . 1 80

Warming E. Zbiorowiska roślinne. Zarys ekologicznej geografii roślin. Z wydania niem. E. Knoblaucha przełożyli z upoważnienia autora E. Strumpf i J. Trzebiński. 1900, s. XV + 450 . . . . 1 50

Witkowski Aug., prof. Uniw. Jagiell. Zasady fizyki. Tom II, wyd. 2. (Ciepło. Fizyka cząsteczkowa. Promieniowanie). 1908, s. X + 651 + 285 fig. + 2 tabl. kolor. 2 40
— Tom III. (Elektryczność i magnetyzm). 1914, s. IX + 1 nlb. + 656 + 326 fig. 2 40

W. K. Rzeki i jeziora, tekst objaśniający do mapy hydrograf. dawnej słowiańszczyzny, część północno-zachodnia. 1883, s. II + 125 + 1 nlb. — 5

Wóycicki Z. Obrazy roślinności Królestwa Polskiego. Zeszyt I. Roślinność niziny Ciechocińskiej. 1911, s. 12 nlb. + tabl. 10 + 20 nlb. objaśnień 1 —
— Zeszyt II. Roślinność wyżyny Kielecko-Sandomierskiej. 1912, s. 36 + 10 tabl. . . . . 1 —
— Zeszyt III. Roślinność wyżyny Kielecko-Sandomirskiej. 1912, s. 32 + 10 tabl. . . . . 1 —

	Rb.	kop
Wóycicki Z. Zeszyt IV. Roślinność Ojcowa. 1913, s. 32 + 10 tabl. . .	1	—
— Zeszyt V. Roślinność Ojcowa. 1913, s. 39 + 10 tabl.	1	—
— Zeszyt VI. Roślinność Ojcowa. 1913, s. 26 + 10 tabl.	1	—

Matematyka.

	Rb.	kop
Autenrieth Ed. Mechanika techniczna. Podręcznik nauki statyki i dynamiki dla inż. mech. i inż. budow. Przełożył z upoważ. autora St. Patschke. 1900, str. XI + 613, z 327 fig. w tekście	2	40
Baraniecki M. A. Początkowy wykład syntentyczny własności przecięć stożkowych, na podstawie ich pokrewieństwa harmonicznego z kołem. 1885, s. XVI + 131, z 63 drzewor.	—	40
Danielewicz A. B. Metoda najmniejszych kwadratów. 1904, s. X + 185 + X	1	20
— Podstawy matematyczn eubezpieczeń życiowych. 1895, s. 335, tab. X	2	—
Danielewicz Bolesław. Z dziedziny statystyki matematycznej. 1884 . .	—	10
Dedekind Ryszard. Ciągłość a liczby niewymierne; z 4 niezmienionemi wyd. przełożył St. Straszewicz. 1914, s. VII + 17	—	45
Dzieje myśli. T. I. Zesz. 2. Rozwój historyczny pojęć chemicznych. Szkic ewolucyi pojęć w mineralogii. Zarys rozwoju matematyki: a) rozwój arytmetyki do końca XVI w.; b) zarys rozwoju geometryi w starożytności, wiekach średnich i w epoce odrodzenia; c) rozwój matematyki od początku w. XVIII. W opracowaniu Leona Marchlewskiego, Józefa Siomy, Michała Feldbluma, Władysława Smosarskiego i Stefana Kwietniewskiego. 1911, s. 279, z 33 ilustr. . .	1	50
Enriques F. Zagadnienia dotyczące geometryi elementarnej. Przełożyli S. Kwietniewski i W. Wojtowicz 1915. Część I, s. 331	1	50
Feldblum M. Geometrya wykreślna. 1902, s. XVI + 325, z 172 rys. w tekście	2	—
Folkierski Wł. Zasady rachunku różniczkowego i całkowego, wydanie 2 znacznie zmienione. Tom I, 1904, s. XII + 574 i 55 figur. Tom II, 1909, s. XI + 630 i 101 figur . . . . po	2	40
Gauss K. F. Rozważania ogólne o powierzchniach krzywych. Z oryg. łac. tłum. S. Finkelkraut, objaśnił J. Rudnicki, przedmowa K. Zorawskiego. 1913	—	75
Gosiewski Wł. Zasady rachunku prawdopodobieństwa. 1906, s. X + 265	2	—
Kowalczyk J. O sposobach obliczania przeszkód biegu ciał niebieskich. 1901, s. XII + 614 i 2 tabl.	7	50
Majewski Wincenty. Geometrya praktyczna. Podzęcznik dla rzemieślników. 1903, s. 301 (karton)	—	75
Malanowicz J. Kreślenie i zdobienie geometryczne. Kurs pierwszy, wyd. 2. 1912, s. VIII + 110 + II + 45 tab. i 215 rys. (karton)	—	60
— Rzuty geometryczne. (Geometrya wykreślna, dostosowana do potrzeb przemysłu i rzemiosł). 1913, s. II + 110 + 2 i rys. 269	—	75
Rozmarynowicz Teofil. Matematyczne podstawy ubezpieczeń na wypadek niezdolności do pracy w zastosowaniu do urządzenia kas emer. Wydał Bolesław Danielewicz. 1886, s. IV + 53	—	10
Schur F. Podręcznik geometryi analitycznej, przeł. T. Łopuszański. 1901, s. X + 246 + 1 nlb. i 76 figur	1	—
Sierpiński Wacław dr. Zarys teoryi mnogości. 1912, s. XIII + 158 . .	—	90
— Teorya liczb niewymiernych. Wykłady uniw. 1910, s. 4 nlb. + 140	—	75
— Teorya liczb, kurs uniwersytecki. 1914, s. 10 nlb. + 412	1	80
Steiner J. Konstrukcye geometryczne wykonane zapomocą linii prostej i stałego koła. Przełożył Stefan Kwietniewski. Warszawa, 1915, str. VIII + 69	—	45
Szczepański Józef. Stopień wyższy matematyki elementarnej i początki rachunku nieskończonostkowego. Podręcznik dla klas wyższych szkół średnich i dla samouków. 1906 rb. 1·50, (karton)	1	60
Wektor. Czasopismo matem.-fiz. (red. Władysław Wojtowicz w Warszawie)	5	—
— z przesyłką rb. 6, zeszyt pojedynczy	—	75
Zaremba St. Wstęp do analizy. 1915. Cz. I str. 124	—	60

Do nabycia we wszystkich księgarniach.