

Małgorzata ZŁOTOŚ

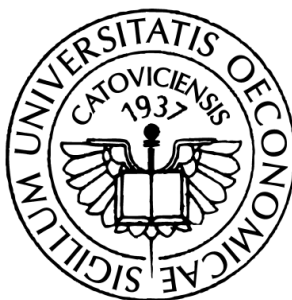
Wybrane metody planowania eksperymentów w badaniach ekonomicznych



Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego
w Katowicach

Małgorzata ZŁOTOŚ

**WYBRANE METODY
PLANOWANIA EKSPERYMENTÓW
W BADANIACH EKONOMICZNYCH**



Katowice 2025

Komitety redakcyjny

Tomasz Ingram (przewodniczący), Monika Ogrodnik (sekretarz),
Agata Austen, Monika Kulikowska-Pawlak, Małgorzata Pańkowska,
Aleksandra Pethe, Jacek Pietrucha, Anna Skórska, Marzena Strojek-Filus,
Edyta Szafranek-Stefaniuk, Tomasz Wachowicz, Ewa Ziemia

Recenzent

Stanisław Heilpern

Redakcja i korekta językowa

Beata Kwiecień

Skład tekstu

Marzena Safian

Projekt okładki

Emilia Gumulak

Ilustracja na okładce © kentoh – Photogenica

ISBN 978-83-7875-960-7

doi.org/10.22367/uekat.9788378759607

© Copyright by Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach 2025



Publikacja na licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 4.0 Międzynarodowa
(CC BY 4.0), <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/legalcode.pl>



WYDAWNICTWO UNIwersytetu Ekonomicznego w KATOWICACH

ul. 1 Maja 50, 40-287 Katowice, tel.: +48 32 257-76-33

www.wydawnictwo.ue.katowice.pl, e-mail: wydawnictwo@ue.katowice.pl

Facebook: @wydawnictwouekatowice



SPIS TREŚCI

WPROWADZENIE	5
1. WPROWADZENIE DO PLANOWANIA EKSPERYMENTÓW	9
1.1. Rys historyczny metod planowania eksperymentów	9
1.2. Procedura planowania eksperymentów w toku procesu produkcyjnego	14
1.3. Podstawy teoretyczne planowania eksperymentów	20
1.4. Wykorzystanie planowania eksperymentów w obszarach niezwiązanych z przemysłem produkcyjnym	24
1.4.1. Planowanie eksperymentów w przedsiębiorstwach usługowych	24
1.4.2. Eksperymenty w badaniach ekonomicznych	26
2. KONSTRUKCJA WYBRANYCH PLANÓW EKSPERYMENTÓW	30
2.1. Charakterystyka wybranych klasycznych planów eksperymentów ...	31
2.1.1. Plan jednoczynnikowy	31
2.1.2. Plan dwuczynnikowy	33
2.1.3. Plan bloków zrandomizowanych	36
2.1.4. Kwadrat łaciński i kwadrat grecko-łaciński	37
2.2. Charakterystyka wybranych planów eksperymentów czynnikowych	40
2.2.1. Całkowity eksperyment czynnikowy typu 2^m	41
2.2.2. Ułamkowy eksperyment czynnikowy typu 2^{m-k}	46
2.2.3. Całkowity eksperyment czynnikowy typu 3^m i jego modyfikacje	48

3. WYBRANE MODYFIKACJE PLANÓW EKSPERYMENTÓW CZYNNIKOWYCH	52
3.1. Alternatywne metody konstrukcji planów eksperymentów czynnikowych	52
3.1.1. Plan eksperymentu dla czynników nieprecyzyjnie ustalonych.....	53
3.1.2. Plany eksperymentów konstruowane na podstawie wartości pola losowego	58
3.1.3. Plan eksperymentu częściowego konstruowany z wykorzystaniem metody półprób zrównoważonych	64
3.2. Wybrane zagadnienia metodologii funkcji powierzchni odpowiedzi.....	70
3.2.1. Podstawy metodologii funkcji powierzchni odpowiedzi	70
3.2.2. Modyfikacja planu eksperymentu dla estymacji nieliniowej postaci funkcji powierzchni odpowiedzi	72
3.2.3. Wykorzystanie metody bootstrap w estymacji funkcji powierzchni odpowiedzi	85
3.3. Zastosowanie testów permutacyjnych w procedurze planowania eksperymentów	96
3.3.1. Konstrukcja testów permutacyjnych	96
3.3.2. Wykorzystanie testów permutacyjnych w analizie wyników eksperymentu	99
3.3.3. Wykorzystanie testów permutacyjnych w ocenie istotności parametrów funkcji powierzchni odpowiedzi	109
4. ZASTOSOWANIE PLANOWANIA EKSPERYMENTÓW W PROCESIE PRODUKCJI PELLETU DRZEWNEGO	116
4.1. Produkcja pelletu drzewnego w Polsce i w Europie	117
4.2. Proces produkcyjny pelletu drzewnego	120
4.3. Poprawa jakości produkowanego pelletu drzewnego. Zastosowanie proponowanych modyfikacji planów eksperymentów – studium przypadku.....	124
ZAKOŃCZENIE.....	137
BIBLIOGRAFIA	139
SPIS RYSUNKÓW	145
SPIS TABEL.....	147



WPROWADZENIE

Zgodnie z definicją Encyklopedii PWN eksperyment to „próba, doświadczenie naukowe; podstawowy, oprócz obserwacji i pomiaru naukowego, zabieg badawczy polegający na celowym wywoływaniu określonego zjawiska (lub jego zmiany) w warunkach sztucznie stworzonych (laboratoryjnych) oraz zbadaniu jego przebiegu, cech lub zależności; celem eksperymentu jest najczęściej sprawdzenie sformułowanej uprzednio hipotezy, która w wyniku eksperymentu zostaje potwierdzona (wzrasta jej prawdopodobieństwo) lub obalona” (PWN, 2024). W niniejszej pracy rozważane będą metody planowania eksperymentów, które należą do metod stosowanych w zakresie statystycznej kontroli jakości.

Na początku XX wieku nastąpił intensywny rozwój teorii rachunku prawdopodobieństwa. Pozwoliło to na wzrost znaczenia metod wnioskowania statystycznego. Równolegle miał miejsce postęp technologiczny, który służył poprawie możliwości produkcyjnych w przemyśle. Wtedy też metody wnioskowania statystycznego zostały zastosowane w kontroli jakości rezultatów procesu produkcyjnego. W.A. Shewhart wprowadził karty kontrolne, które pozwoliły na sterowanie jakością w toku produkcji. Z kolei H.F. Dodge oraz H.G. Roming przedstawili propozycje planów odbiorczych, które stanowią alternatywną metodę dla kontroli pełnej (Kończak, 2007). Wzrost liczby zastosowań metod statystycznych w kontroli jakości nastąpił w czasie II wojny światowej, gdy dążono do poprawy wyników procesów produkcyjnych związanych z działaniami armii Stanów Zjednoczonych (Montgomery, 2009). Po zakończeniu II wojny światowej metody statystyczne w toku produkcji oraz metody kontroli odbiorczej zostały wdrożone w praktyce przedsiębiorstw produkcyjnych w Japonii, dzięki działalności W.E. Deminga. Rozwój metod doskonalenia jakości przyczynił się do sformułowania koncepcji kompleksowego zarządzania jakością TQM (Total Quality Management), którą W.E. Deming przedstawił w postaci 14 postulatów (Wawrzynek, 2009). Sukces japońskich produktów wysokiej jakości był spowodowany w znacznej części

zastosowaniem metod zaproponowanych przez G. Taguchiego, który zauważył, że metody statystyczne można wykorzystać już na etapie konstrukcji wyrobu lub usługi oraz podczas projektowania procesu produkcyjnego. Metodologia Taguchiego jest sformułowana w postaci siedmiu postulatów, gdzie największe znaczenie odgrywają metody planowania eksperymentów (DOE – *design of experiments*) (Montgomery, 2009). Wykorzystanie metod planowania eksperymentów prowadzi do efektywnej poprawy rezultatów technologicznych procesu produkcyjnego, co istotnie wpływa na poprawę rezultatów ekonomicznych procesu. Do najnowszych metod zarządzania jakością wykorzystujących metody statystyczne zalicza się metodę Six Sigma, która polega na takim przygotowaniu procesu produkcyjnego, aby jego rezultaty w jak najmniejszym stopniu odbiegały od założeń projektowych (Kończak, 2007). Metodologia Six Sigma nie została jednoznacznie sformalizowana, jest nieustannie rozwijana i doskonalona.

Obecnie, w dobie dynamicznie rozwijającej się technologii procesów produkcyjnych, jednym z głównych celów przedsiębiorstwa jest uzyskanie produktu wysokiej jakości. Nierzadko ważne jest uzyskanie pożądanej lub ustalonej jakości produktu w możliwie krótkim przedziale czasowym. Ponadto realizacja procesu produkcyjnego jest uwarunkowana ograniczonymi lub zadanymi maksymalnymi kosztami produkcji. Wówczas metody statystycznej kontroli jakości, a w szczególności metody planowania eksperymentów, pozwalają na odpowiednie zaprojektowanie i przeprowadzenie procesu produkcyjnego. Rozwój metod statystycznych oraz wzrost mocy obliczeniowej komputerów przyczynia się do poszukiwania alternatywnych metod statystycznych, które pozwalają na przygotowanie i monitorowanie procesu produkcyjnego, gdy założenia klasycznych metod statystycznej kontroli jakości nie są spełnione.

Niniejsza praca dotyczy metod planowania eksperymentów wykorzystywanych w statystycznej kontroli jakości oraz ich modyfikacji. U podstaw planowania eksperymentów leżą klasyczne metody statystyczne, które mogą być stosowane tylko wtedy, gdy spełnione są założenia dotyczące postaci rozkładu zmiennej wynikowej oraz gdy poszczególne pomiary (doświadczenia) są wykonywane w sposób niezależny. Głównym celem pracy jest przedstawienie autorskich modyfikacji metod planowania eksperymentów z wykorzystaniem nieklasycznych metod statystycznych oraz wskazanie możliwości wykorzystania alternatywnych metod planowania eksperymentów wówczas, gdy założenia klasycznych metod analizy wyników eksperymentu nie są spełnione.

Praca składa się z czterech rozdziałów. Rozdział pierwszy rozpoczyna się od zarysu historycznego rozwoju metod planowania eksperymentów. Następnie przedstawiono poszczególne etapy procedury planowania eksperymentów oraz sformułowano cele i korzyści zastosowania metod planowania eksperymentów

w projektowaniu procesów produkcyjnych. Wprowadzono również szczegółowy opis teoretyczny planu eksperymentu, obszaru eksperymentowania oraz funkcji powierzchni odpowiedzi. Ostatnia część rozdziału dotyczy przeglądu możliwości wykorzystania metod planowania eksperymentów w obszarach, które nie są ściśle powiązane z przemysłem produkcyjnym.

W rozdziale drugim zostały wyróżnione dwie części. Pierwsza z nich dotyczy konstrukcji wybranych klasycznych planów eksperymentów, które zazwyczaj znajdują zastosowanie w naukach przyrodniczych. W drugiej części rozdziału przedstawiono zasady konstrukcji całkowitych i ułamkowych planów eksperymentów czynnikowych uwzględniających czynniki występujące na dwóch lub trzech poziomach.

W trzecim rozdziale zaprezentowano autorskie propozycje konstrukcji wybranych planów eksperymentów czynnikowych oraz zaproponowano metody analizy wyników zrealizowanych doświadczeń. W pierwszej części rozdziału opisano alternatywne metody konstrukcji planów eksperymentów czynnikowych, które między innymi uwzględniają możliwość realizacji doświadczeń przy ograniczonych kosztach eksperymentu. Druga część rozdziału dotyczy zagadnień z zakresu metodologii funkcji powierzchni odpowiedzi. W szczególności przedstawiono autorską propozycję konstrukcji planu eksperymentu dla estymacji nieliniowej postaci funkcji powierzchni odpowiedzi. Ponadto zaproponowano modyfikację alternatywnej metody poszukiwania optymalnych warunków analizy funkcji powierzchni odpowiedzi. W trzeciej części rozdziału rozważono możliwości zastosowania testów permutacyjnych w procedurach związanych z planowaniem eksperymentów. W tym celu omówiono konstrukcję testów permutacyjnych oraz autorskie propozycje wykorzystania tych testów w analizie wyników eksperymentu oraz w ocenie estymacji parametrów funkcji powierzchni odpowiedzi.

Rozdział czwarty ma charakter aplikacyjny. Zaprezentowano w nim możliwość wdrożenia metod planowania eksperymentów w toku produkcji pelletu drzewnego. Przedstawiono kolejne etapy procesu produkcji pelletu drzewnego oraz scharakteryzowano działalność przedsiębiorstwa, w którym zostało przeprowadzone badanie. Dla rozważanego procesu produkcyjnego zaproponowano konstrukcję planu eksperymentu oraz przedstawiono autorską metodę analizy wyników przeprowadzonych doświadczeń. Omówiono możliwości aplikacji wybranych autorskich metod planowania eksperymentów oraz sformułowano zalecenia technologiczne dla rozważanego procesu produkcji pelletu drzewnego.

Przedstawione w niniejszej pracy modyfikacje planów eksperymentów czynnikowych pozwalają na zaprojektowanie rezultatów procesu produkcyjnego wtedy, gdy wykorzystanie klasycznych planów eksperymentów nie jest uzasadnione. Zaproponowane metody analizy wyników doświadczeń znajdują zasto-

sowanie wtedy, gdy założenia klasycznych metod statystycznych nie są spełnione. Ponadto zaprezentowana alternatywna metoda konstrukcji planu eksperymentu dla rzeczywistego procesu produkcyjnego pelletu drzewnego pozwala na skuteczną analizę wyników przeprowadzonych doświadczeń.

Niniejszy rozdział stanowi wprowadzenie do metodologii planowania eksperymentów. W jego pierwszej części przedstawiono genezę teorii eksperymentu. Począwszy od rozważań filozofów dotyczących realizacji doświadczeń, przez schematy realizacji eksperymentów w ramach doświadczalnictwa rolniczego, aż po zastosowanie metod planowania eksperymentów w badaniach technologicznych. Za prekursora teorii planowania eksperymentów uważa się R.A. Fishera. W latach 20. XX wieku R.A. Fisher wprowadził metody pozwalające nie tylko na skuteczne zaprojektowanie doświadczeń rolniczych, ale również zaprezentował odpowiednie metody statystyczne, które umożliwiały analizę otrzymanych wyników doświadczeń. Sukces eksperymentów na gruncie doświadczalnictwa rolniczego przyczynił się do zastosowania planowania eksperymentów w badaniach przemysłowych, których celem było doskonalenie jakości produktów. Ugruntowanie procedury planowania eksperymentu w przebiegu procesu produkcyjnego przedstawia część druga rozdziału.

W części trzeciej scharakteryzowano sformalizowany zapis poszczególnych pojęć dotyczących eksperymentu. Zaprezentowano model statystyczny, który jest rozważany w metodologii planowania eksperymentów. Wprowadzono również pojęcie funkcji powierzchni odpowiedzi, która stanowi matematyczny opis badanego problemu.

1.1. Rys historyczny metod planowania eksperymentów

Początki teorii planowania eksperymentów są powiązane ze wzrostem znaczenia właściwego przygotowania i przeprowadzenia doświadczeń, które umożliwiały poznanie zachodzących zjawisk w przyrodzie. W XVI wieku filozof F. Bacon (1561-1628) podjął pierwsze rozważania dotyczące zasad realizacji

doświadczeń. Zauważył, że na wartość poznawczą eksperymentu wpływa świadome i celowe przeprowadzenie doświadczeń, a eksperyment powinien być realizowany zgodnie z ustalonym schematem. Ponadto wskazał zasady eksperymentu krzyżowego (łac. *experimentum crucis*), który prowadził do rozstrzygnięcia pomiędzy dwoma różnymi wynikami realizacji doświadczeń (Leciejewski, 2013). Rozważania F. Bacona stały się podstawami teorii indukcji eliminacyjnej, która została formalnie skodyfikowana przez J.S. Milla (1806-1873) w 1843 roku w książce *System logiki*. Sformułował on schematy wnioskowania indukcyjnego (tzw. kanony), w których rozważał między innymi przyczyny (okoliczności) występowania badanego zjawiska w różnych przypadkach. Można przyjąć, że J.S. Mill podjął próbę sformułowania pierwszych planów eksperymentów uwzględniających wpływ jednego czynnika na rezultat doświadczenia (Wawrzynek, 2009).

Właściwy początek rozwoju metod planowania eksperymentów datuje się na lata 20. i 30. XX wieku. To wtedy R.A. Fisher (1890-1962) pracował w Rothamsted Agricultural Experimental Station w okolicach Londynu, gdzie był odpowiedzialny za opracowanie danych zebranych w doświadczeniach polowych. Podczas analizy obszernych zbiorów danych R.A. Fisher zauważył, że nieprawidłowości w sposobie przeprowadzenia eksperymentu utrudniają analizę zebranych danych (Montgomery, 2013). W 1925 roku R.A. Fisher opublikował pracę *Statistical Methods for Research Workers*, w której zaprezentował metody statystyczne pozwalające na analizę danych pochodzących z przeprowadzonych doświadczeń rolniczych. W szczególności przedstawił metodę analizy wariancji (*analysis of variance*, ANOVA), która później stała się podstawową metodą stosowaną w celu analizy wyników eksperymentu. Przez kolejne lata R.A. Fisher w dalszym ciągu zajmował się rozważaniami związanymi z wykorzystaniem metod statystycznych w doświadczeniach rolniczych oraz formułował zasady przeprowadzania tych doświadczeń. Efektem jego badań była publikacja zatytułowana *The Design of Experiments*, wydana w 1935 roku. W pracy tej, będącej niejako wprowadzeniem do teorii planowania eksperymentów, R.A. Fisher przedstawił przykład eksperymentu obecnie nazywanego *The Lady Tasting Tea*. Inspiracją do przeprowadzenia tego eksperymentu było stwierdzenie pewnej kobiety (w rzeczywistości znajomej R.A. Fishera z Rothamsted – Mauriel Bristol), która uważała, że na podstawie smaku angielskiej herbaty z mlekiem potrafi rozpoznać sposób jej przygotowania i wskazać co w pierwszej kolejności wiano do filiżanki: mleko czy herbatę. R.A. Fisher zaproponował eksperyment, który pozwoli sprawdzić czy stwierdzenie kobiety jest prawdziwe. Przygotowano 8 filiżanek herbaty z mlekiem: do czterech w pierwszej kolejności wiano mleko, a do pozostałych czterech jako pierwszą wiano herbatę. Filiżanki z przygotowaną herbatą podawano w losowej kolejności, a kobieta na podstawie smaku wskazywała czy

do filiżanki w pierwszej kolejności wiano mleko czy herbatę. R.A. Fisher przedstawił obszerne objaśnienia eksperymentu z uwzględnieniem jego wszystkich możliwych rezultatów i ich prawdopodobieństw, ale rzeczywiste wyniki przeprowadzonego eksperymentu nie zostały opublikowane (Fisher, 1935; Salsburg, 2001). Warto nadmienić, że właśnie w kontekście eksperymentu *The Lady Tasting Tea* pojawia się pojęcie hipotezy zerowej, o której R.A. Fisher napisał, że jest to hipoteza, której nigdy nie można przyjąć ani udowodnić, jedynie na podstawie przeprowadzonego eksperymentu można ją odrzucić. Co więcej, stwierdził nawet, że eksperymenty są przeprowadzane tylko po to, aby można było odrzucić hipotezę zerową (Fisher, 1935). Pozostałe rozważania zawarte w *The Design of Experiments* dotyczą analizy eksperymentów związanych z doświadczeniami polowymi. R.A. Fisher badał wpływ między innymi światła słonecznego, rodzaju gleby, temperatury, obecności związków chemicznych, dawkowania nawozu i ilości nawodnienia na wielkość plonów odmian różnych roślin uprawnych. Badania te były przeprowadzane zgodnie z odpowiednim schematem, który zazwyczaj był ustalony na podstawie wnikliwej analizy aspektów i okoliczności, w jakich będą realizowane doświadczenia. R.A. Fisher dzielił teren, na którym zamierzał przeprowadzić eksperyment, na mniejsze, w miarę możliwości jednorodne części, które nazywał blokami. Następnie każdy z bloków dzielił na taką samą liczbę mniejszych poletek, którym w sposób losowy przypisywał rozważany zabieg (np. rodzaj nawozu, wielkość nawodnienia). Tym samym wprowadził zasadę tworzenia bloków i randomizacji w procedurze eksperymentu. Ponadto dopuszczał również możliwość replikacji eksperymentu, czyli jego powtarznej realizacji. Wyniki przeprowadzonych doświadczeń podlegały analizie z wykorzystaniem metod statystyki matematycznej, w szczególności analizy wariancji. Fisher przedstawił wówczas również schematy przeprowadzenia i analizy kwadratu łacińskiego, planu bloków randomizowanych oraz eksperymentu jednoczynnikowego (Fisher, 1935). Przytoczone, dwie najważniejsze publikacje R.A. Fishera przyczyniły się do rozwoju metod statystycznych oraz dały początek teorii planowania eksperymentów.

Na początku lat 20. XX wieku w Państwowym Naukowym Instytucie Rolniczym w Bydgoszczy jako starszy asystent statystyki został zatrudniony J. Sława-Neyman. W tym czasie intensywnie zajmował się metodami statystycznymi i ich zastosowaniem w doświadczeniach rolniczych. Jednym z pierwszych efektów przeprowadzonych przez niego badań była, wydana w 1923 roku w *Rocznikach Nauk Rolniczych*, praca zatytułowana *Próba uzasadnienia zastosowań rachunku prawdopodobieństwa do doświadczeń polowych*. J. Sława-Neyman przedstawił możliwość analizy wyników doświadczeń rolniczych z wykorzystaniem teorii rachunku prawdopodobieństwa, wprowadzając randomizację,

czyli losowy dobór odmian zboża i poletek, oraz określając prawdziwą wielkość plonów jako wartość oczekiwaną zmiennej losowej (Bednarski, 2013). Na podstawie prac z zakresu doświadczalnictwa rolniczego J. Spława-Neyman otrzymał w 1924 roku tytuł doktora nauk matematycznych (Krzyśko i in., red., 2018). W kolejnych latach udoskonalił swoje podejście probabilistyczne w teorii eksperymentów i zaprezentował je w formie wykładu pod tytułem *Statistical Problems in Agricultural Experimentation*, na posiedzeniu Sekcji Badawczej Przemysłu i Rolnictwa Królewskiego Towarzystwa Statystycznego w 1935 roku. Prezentacji wysłuchał również R.A. Fisher, który nie zgadzał się z teorią zaprezentowaną przez J. Spławę-Neymana (Lenhard, 2006). Mimo polemiki R.A. Fishera, model probabilistyczny J. Spławy-Neymana, który posłużył do analizy doświadczeń rolniczych, został powszechnie doceniony i stał się swego rodzaju podstawą statystycznej analizy przyczynowości (Bednarski, 2013). Warto zaznaczyć, że praca J. Spławy-Neymana z 1923 roku została przetłumaczona na język angielski i opublikowana w „Statistical Science” dopiero w 1990 roku przez D.M. Dąbrowską i T.P. Speeda (1990), wówczas potwierdzono, że to J. Spława-Neyman jako pierwszy w sposób formalny przedstawił pojęcie randomizacji w doświadczeniach rolniczych.

W latach 30. i 40. XX wieku nastąpił rozwój teorii planowania eksperymentów zaproponowanych przez R.A. Fishera, w których kolumny (bloki), wiersze (poletka) i zabiegi były uwzględniane jako poszczególne czynniki. Opracowano procedury takich planów eksperymentów, jak: zrównoważone bloki niekompletne, kwadrat Youdena czy ułamkowe eksperymenty czynnikowe. Pojawiały się wówczas pierwsze zastosowania planów eksperymentów czynnikowych w procesach produkcyjnych, a szczególne znaczenie praktyczne zyskiwały ułamkowe plany eksperymentów czynnikowych, które pozwalały na redukcję liczby wymaganych doświadczeń (Wawrzynek, 2009).

Właściwy rozwój teorii i zastosowań metod planowania eksperymentów w przemyśle rozpoczął się w latach 50. XX wieku. Wówczas zwrócono uwagę na różnice pomiędzy doświadczeniami przeprowadzanymi w badaniach przemysłowych a tradycyjnymi doświadczeniami rolniczymi. Zauważono, że w doświadczeniach przemysłowych niemal natychmiast możliwe jest uzyskanie wartości zmiennej wynikowej. Ponadto stwierdzono, że na podstawie wyników niewielkiej liczby przeprowadzonych doświadczeń można sformułować wnioski, które pozwolą na właściwe zaprojektowanie kolejnego eksperymentu. Autorami tych stwierdzeń byli G.E.P. Box i K.G. Wilson, którzy w 1951 roku przedstawili koncepcję metodologii funkcji powierzchni odpowiedzi (Box, Wilson, 1951; Montgomery, 2013). Elementy metodologii funkcji powierzchni odpowiedzi zostały rozszerzone przez J. Kiefera i J. Wolfowitza (1959, 1960), którzy przed-

stawili formalne podstawy teorii planów optymalnych. Zostały wówczas sformułowane kryteria optymalności, mające ważne interpretacje statystyczne, oraz algorytmy i twierdzenia pozwalające na wyznaczenie planów optymalnych. Metodologia funkcji powierzchni odpowiedzi oraz teoria planów optymalnych przyczyniły się do licznych zastosowań planowania eksperymentów w praktyce przedsiębiorstw produkcyjnych, głównie w obszarach badawczo-rozwojowych (Montgomery, 2013).

Dynamiczny rozwój wykorzystania metod planowania eksperymentów w projektowaniu procesów produkcyjnych związany jest z działalnością badawczą G. Taguchiego. Jego badania miały istotny wpływ na spektakularny sukces w zakresie jakości osiągnięty przez Japończyków w latach 70. XX wieku. G. Taguchi odkrył, że wykorzystanie metod statystycznych na etapie konstrukcji wyrobu lub usługi oraz w trakcie projektowania przebiegu procesu produkcji przyczynia się do zmniejszenia kosztów związanych z jakością (Kończak, 2007). System metod opracowanych przez G. Taguchiego (tzw. metodologia Taguchiego) pozwalał na określenie optymalnych parametrów jakościowych wyrobu, które zapewniały wytworzenie produktu o ustalonych specyfikacjach. Metodologię Taguchiego można przedstawić w postaci poniższych postulatów (Wawrzynek, 2009):

1. Jakość produktu jest mierzona wielkością całkowitej straty społecznej spowodowanej przez ten produkt.
2. Ciągłe doskonalenie jakości i obniżka kosztów są niezbędnym warunkiem dobrej kondycji przedsiębiorstwa działającego w warunkach konkurencji ekonomicznej.
3. Ciągłe doskonalenie jakości polega na systematycznym zmniejszaniu zmienności cech produktu oraz stabilizacji zachowania się procesu w odniesieniu do wartości docelowych lub pożądanych.
4. Strata społeczna spowodowana zmiennością jest często proporcjonalna do kwadratu odchylenia charakterystyki jakościowej od wartości docelowej lub pożądanej.
5. Projektowanie produktu i procesu ma istotny wpływ na jakość produktu i na koszty.
6. Zmienność cech produktu może być zredukowana dzięki wykorzystaniu efektów nieliniowych pomiędzy parametrami procesu lub produktu a pożądanymi charakterystykami jakościowymi produktu.
7. Zbiór wartości parametrów procesu lub produktu redukujący zmienność cech produktu można wyznaczyć metodą planowania eksperymentów.

W swojej koncepcji G. Taguchi zalecał stosowanie ułamkowych planów eksperymentów czynnikowych oraz planów, których konstrukcja opiera się na wyko-

rzystaniu odpowiednich tablic ortogonalnych. Plany te pozwalały na uzyskanie optymalnej jakości produktu przy jednoczesnym zmniejszeniu kosztów badania.

Skuteczność metod zaproponowanych przez G. Taguchiego przyczyniła się do wzrostu zainteresowania metodami planowania eksperymentów zarówno wśród teoretyków, jak i praktyków. Metody planowania eksperymentów z powodzeniem zostały zaimplementowane w praktyce przedsiębiorstw produkcyjnych związanych między innymi z przemysłem motoryzacyjnym, elektronicznym i lotniczym. Ponadto na metody planowania eksperymentów zwrócili uwagę również zarządzający przedsiębiorstwami, w których dotychczas korzystano z tych metod w niewielkim stopniu (Montgomery, 2013). Proces ten spowodował pojawienie się nowych i użytecznych propozycji konstrukcji planów eksperymentów. Ponadto rozwój technologiczny oraz systematycznie rosnąca moc obliczeniowa komputerów pozwoliły na wdrożenie specjalistycznego oprogramowania, które umożliwiło konstrukcję planów eksperymentu oraz analizę jego wyników (Montgomery, 2013).

Metodologia planowania eksperymentów, która ugruntowała swoją pozycję w rolnictwie i przemyśle, przeniknęła do innych dziedzin nauki. Zastosowanie planowania eksperymentów w medycynie, farmacji, biologii, biotechnologii, genetyce, chemii i fizyce było następstwem wykorzystania planowania eksperymentów w doświadczałnictwie rolniczym (Dean i in., 2015). Sukces planów eksperymentów na etapie projektowania procesu produkcyjnego skłonił praktyków do przeniesienia tych metod w inne obszary zastosowań. Z powodzeniem podjęto próby wykorzystania planów eksperymentów w zagadnieniach związanych z marketingiem oraz sektorem usług finansowych (Montgomery, 2013; Dean i in., 2015).

1.2. Procedura planowania eksperymentów w toku procesu produkcyjnego

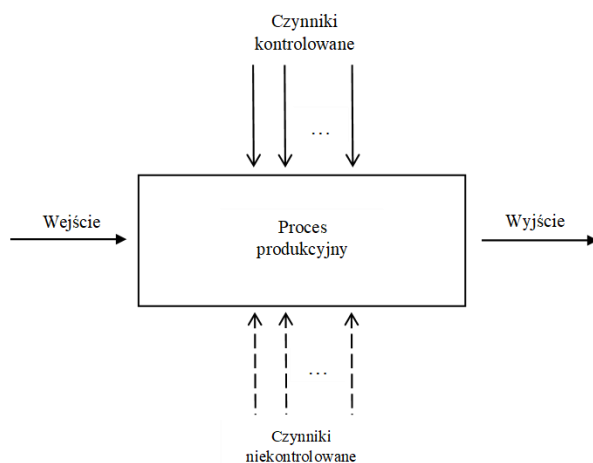
Dynamiczny rozwój technologiczny, masowa produkcja oraz szeroka dostępność towarów i usług spowodowały, że dla klienta czynnikiem, który decyduje o wyborze produktu lub usługi, jest wysoka jakość. Przedsiębiorstwa nieustannie dążą do uzyskania przewagi konkurencyjnej, która uwarunkowana jest między innymi systematycznym podnoszeniem jakości oferowanych wyrobów lub usług. Proces doskonalenia jakości jest procesem ciągłym i wiąże się z wdrożeniem w firmie systemu zarządzania jakością. Obok sformalizowanych systemów jakości ISO 9001, do nowoczesnych koncepcji zarządzania jakością należą: kompleksowe zarządzanie jakością (TQM – *Total Quality Management*) oraz

Six Sigma. Zarówno w koncepcji TQM, jak i w metodologii Six Sigma przyjmuje się, że wysoka jakość produktu lub usługi jest związana z zastosowaniem metod statystycznych w trakcie monitorowania procesu produkcyjnego oraz na etapie jego projektowania (Konarzewska-Gubała, red., 2003; Kończak, 2007; Wawrzynek, 2009).

Do metod statystycznych wykorzystywanych w monitorowaniu jakości procesu produkcyjnego zalicza się 7 narzędzi statystyczno-logicznych (Kończak, 2007; Wawrzynek, 2009): diagram przepływu, arkusz analityczny, diagram przyczynowo-skutkowy (diagram Ishikawy), wykres Pareto, histogram, diagram korelacyjny, kartę kontrolną. Wymienione metody statystycznego sterowania procesem są metodami pasywnymi, które dostarczają informacji o przebiegu bieżącego procesu produkcyjnego. Najczęściej metody pasywne utożsamia się z kartami kontrolnymi Shewharta, które pozwalają zidentyfikować rozregulowania występujące w trakcie procesu (Kończak, 2007). Metodą aktywną w statystycznej kontroli jakości jest planowanie eksperymentów, które może być stosowane przed rozpoczęciem procesu produkcyjnego lub w trakcie jego trwania (Wawrzynek, 2009).

Właściwe zrozumienie i zastosowanie metody planowania eksperymentów wiąże się z odpowiednim postrzeganiem złożoności procesu produkcyjnego. Pojęcie procesu produkcyjnego można utożsamiać z zespołem maszyn, procedur, metod, ludzi i zasobów, których działania pozwalają na przekształcenie wartości wejściowych (*inputs*) w produkt o określonych charakterystykach, które w kontekście planowania eksperymentów mogą być nazywane wartościami wyjściowymi (*output*) lub odpowiedzią (*response*) (Montgomery, 2013). Na proces produkcyjny mogą oddziaływać dwa rodzaje czynników: kontrolowane (*controllable factors*) i niekontrolowane (*uncontrollable factors*). Czynniki kontrolowane pozwalają na zmiany ich wartości w trakcie przeprowadzania eksperymentu oraz mają znaczący wpływ na charakterystykę procesu produkcyjnego. Modyfikacje czynników niekontrolowanych w trakcie eksperymentu są bardzo trudne lub niemożliwe. Schemat procesu produkcyjnego przedstawia rysunek 1.1.

Jednym z zadań stawianych przed planowaniem eksperymentów jest ograniczenie wpływu czynników niekontrolowanych (zakłócających) na przebieg procesu produkcyjnego. Zazwyczaj przyjmuje się, że czynniki niekontrolowane zmieniają się w sposób losowy (Wawrzynek, 2009). Jeżeli czynniki niekontrolowane zmieniają się nielosowo, to wyniki przeprowadzonego eksperymentu mogą ulegać zakłóceniom, a pojawiające się nieprawidłowości negatywnie wpływają na rezultaty procesu produkcyjnego. W celu redukcji oddziaływania na wyniki czynników niekontrolowanych, w trakcie realizacji eksperymentu wykorzystuje się trzy metody postępowania: randomizację, tworzenie bloków i replikację doświadczeń (Montgomery, 2013).



Rysunek 1.1. Schemat procesu produkcyjnego

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: Montgomery (2013).

Przyjmuje się, że pojęcie randomizacji zostało wprowadzone w metodologii planowania eksperymentów przez R.A. Fishera, który uważał, że poprawne przeprowadzenie eksperymentu bez wprowadzenia randomizacji nie jest możliwe. Randomizacja polega na losowym przyporządkowaniu ustawień poziomów czynników w kolejnych doświadczeniach, jak również na losowej kolejności realizacji poszczególnych doświadczeń. Poprawna randomizacja zastosowana w eksperymencie pozwala na ograniczenie efektu wpływu czynników zakłócających, które mogą oddziaływać na badany proces. Warto dodać, że w praktyce można napotkać sytuacje, w których właściwe wprowadzenie randomizacji w eksperymencie nie jest możliwe lub jest nieuzasadnione (np. ze względu na koszty czy czas realizacji eksperymentu) (Antony, 2003; Montgomery, 2013).

Replikacja polega na niezależnym powtarzaniu każdego z doświadczeń w eksperymencie z uwzględnieniem zasady randomizacji (Montgomery, 2013). Uwzględnienie replikacji w procedurze eksperymentu ma dwie ważne zalety: pozwala na oszacowanie wartości błędu losowego eksperymentu oraz umożliwia uzyskanie większej precyzji oszacowania badanej charakterystyki procesu lub efektu czynnika (Antony, 2003). W praktyce należy dostrzec różnicę pomiędzy wielokrotnymi pomiarami (*repeated measurements*) a replikacją eksperymentu. Wielokrotne pomiary w eksperymencie polegają na kolejnych powtórzeniach pomiaru dla ustalonych wartości czynników, natomiast replikacja prowadzi do powtórzenia całego eksperymentu (Ryan, 2007).

Tworzenie bloków utożsamiane jest z podziałem jednostek doświadczalnych w taki sposób, aby w poszczególnych grupach obiekty były możliwie jed-

norodne. W eksperymentach związanych z procesem produkcji blok może obejmować doświadczenia przeprowadzane dla ustalonej partii produktów lub przez ustalonego operatora maszyny. Podobnie jak w przypadku randomizacji, celem tworzenia bloków w eksperymencie jest eliminacja niepożądanego wpływu czynników zakłócających na wyniki doświadczeń.

Wdrożenie metod statystycznej kontroli jakości w praktyce przedsiębiorstw produkcyjnych jest ściśle związane z właściwym przygotowaniem metodologicznym pracowników. W szczególności metody planowania eksperymentów wymagają od eksperymentatora nie tylko znajomości szeroko pojętych metod statystycznych, ale również odpowiedniej wiedzy dotyczącej specyfikacji badanego procesu produkcyjnego. J. Antony (2003) wśród umiejętności osób odpowiedzialnych za właściwe przeprowadzenie eksperymentu w przedsiębiorstwach produkcyjnych wymienia:

- umiejętność planowania (*planning skill*), która odnosi się nie tylko do zaprojektowania eksperymentu, ale również polega na uwzględnieniu liczby osób, czasu i kosztów związanych z realizacją eksperymentu,
- umiejętności statystyczne (*statistical skills*), czyli znajomość metod statystycznych niezbędnych do realizacji eksperymentu oraz analizy jego wyników,
- umiejętność pracy w zespole (*teamwork skill*), która gwarantuje współpracę i komunikację pomiędzy osobami odpowiedzialnymi za przebieg procesu produkcyjnego, czego efektem powinno być właściwe przygotowanie i realizacja eksperymentu,
- umiejętności inżynierskie (*engineering skills*) obejmujące znajomość specyfikacji badanego procesu produkcyjnego, które pozwalają na właściwe określenie czynników uwzględnianych w eksperymencie.

Głównym celem wdrożenia metod planowania eksperymentów w praktyce przedsiębiorstw produkcyjnych jest doskonalenie jakości oferowanych wyrobów. Cele szczegółowe metod planowania eksperymentów można sformułować następująco (Wawrzynek, 2009; Montgomery, 2013):

- określenie, który z czynników kontrolowanych ma największy wpływ na wartości zmiennej wynikowej;
- określenie takich wartości czynników, dla których zmienna wynikowa osiąga pożądaną wartość;
- określenie wartości czynników, dla których zmienna objaśniana charakteryzuje się najmniejszą zmiennością;
- określenie poziomów czynników kontrolowanych tak, aby możliwe było wyeliminowanie wpływu czynników niekontrolowanych na zmienną wynikową.

Planowanie eksperymentów jest procedurą złożoną. Efektywne zastosowanie narzędzia planowania eksperymentów jest uwarunkowane postępowaniem zgodnie z określonym schematem, który można przedstawić w następujących etapach (Montgomery, 2009, 2013; Wawrzynek 2009):

1. Identyfikacja i sformułowanie problemu.
2. Wybór czynników i określenie ich poziomów.
3. Określenie zmiennej wynikowej.
4. Wybór odpowiedniego planu eksperymentu.
5. Realizacja eksperymentu.
6. Analiza otrzymanych wyników.
7. Wnioski i zalecenia.

Pierwszy etap planowania eksperymentów, czyli identyfikacja i sformułowanie problemu, polega na określeniu wszystkich aspektów, okoliczności i potencjalnych celów eksperymentu. W praktyce etap ten jest jednym z trudniejszych, ponieważ odpowiednie sformułowanie problemu wymaga wnikliwego zrozumienia istoty badanego procesu (zjawiska). Jeżeli rozważany problem zostanie właściwie zidentyfikowany, to rezultaty przeprowadzonego eksperymentu będą stanowić jego wiarygodne rozwiązanie. W związku z tym eksperymentator powinien dokonać wszechstronnej analizy procesu. Wówczas niezbędna jest współpraca i komunikacja pomiędzy działami przedsiębiorstwa związanymi z inżynierią, kontrolą jakości, marketingiem, zarządzaniem i produkcją. Ponadto należy uwzględnić zalecenia osób, które bezpośrednio są odpowiedzialne za proces produkcyjny (np. operatorzy maszyn, pracownicy linii produkcyjnej). Kluczowy wkład w identyfikację problemu może mieć również opinia lub wymagania sformułowane przez klienta.

Zazwyczaj zbiór czynników, które mają potencjalny wpływ na wyniki badanego procesu jest liczny. Wówczas czynniki uwzględnione w eksperymencie należy odpowiednio sklasyfikować. Jednym ze sposobów podziału zbioru czynników rozważanych w eksperymencie jest ich podział na czynniki planu, czynniki ustalone na stałym poziomie oraz czynniki o możliwie różnym poziomie. Przy czym zakłada się, że czynniki na stałym i możliwie różnym poziomie mają niewielki wpływ na zmienną wynikową. Najczęściej jednak wykorzystuje się podział czynników uwzględnianych w eksperymencie na czynniki kontrolowane i niekontrolowane (zakłócające). Poziomy czynników kontrolowanych mogą być indywidualnie ustalane i zmieniane przez eksperymentatora (np. wybór partii produktu, rodzaj materiału, wybór operatora maszyny). Natomiast eksperymentator nie ma bezpośredniego wpływu na poziomy czynników niekontrolowanych. Odpowiedni wybór czynników, które zostaną uwzględnione w eksperymencie jest zasadniczym etapem w procedurze planowania eksperymentów. Polega on

również na ustaleniu zakresu zmienności czynników oraz określeniu dopuszczalnej liczby ich poziomów. Stąd wybór czynników wymaga odpowiedniego poziomu wiedzy merytorycznej na temat badanego procesu oraz wiedzy teoretycznej dotyczącej planowania eksperymentów.

Trzeci etap planowania eksperymentów to wybór zmiennej objaśnianej, która najlepiej charakteryzuje badany proces produkcyjny. Zadaniem eksperymentatora jest ustalenie zmiennej wynikowej, która będzie dostarczać użytecznych i istotnych informacji o badanym procesie. W wielu przypadkach zmienna wynikowa jest wartością średnią lub odchyleniem standardowym poszczególnych pomiarów zmiennej objaśnianej. Ponadto dopuszczalne jest określenie zbioru zmiennych objaśnianych.

Jeżeli trzy pierwsze etapy procedury planowania eksperymentów zostały zrealizowane prawidłowo, to zasadniczo wybór właściwego planu eksperymentu nie powinien sprawiać trudności. Wybór planu eksperymentu polega na ustaleniu liczby poszczególnych doświadczeń oraz ich kolejności. W związku z tym należy określić liczbę replikacji doświadczeń oraz ich randomizację. Przy czym reguły randomizacji powinny uwzględniać ewentualne tworzenie bloków oraz sekwencji realizowanych doświadczeń. Warto zauważyć, że ważną rolę przy wyborze planu eksperymentu odgrywa również ustalony cel eksperymentu.

Realizacja eksperymentu polega na przeprowadzeniu kolejnych doświadczeń zgodnie z przyjętym planem eksperymentu. Etap ten wymaga od eksperymentatora uważnego monitorowania przebiegu eksperymentu. Wystąpienie ewentualnych niezgodności podczas realizacji poszczególnych doświadczeń zazwyczaj prowadzi do utraty ważności wyników lub do sformułowania niewłaściwych zaleceń dla analizowanego procesu produkcyjnego.

Obiektywna analiza wyników zrealizowanego eksperymentu jest możliwa dzięki wykorzystaniu odpowiednich metod statystycznych. Najczęściej analiza rezultatów eksperymentu sprowadza się do zastosowania estymacji przedziałowej oraz weryfikacji hipotez statystycznych. Ponadto w ramach analizy wyników eksperymentu możliwe jest oszacowanie i ocena postaci modelu statystycznego, który opisuje związek pomiędzy zmienną objaśnianą a czynnikami. Niejednokrotnie ważnym uzupełnieniem wymienionych metod analizy i interpretacji wyników eksperymentu jest odpowiednia prezentacja graficzna otrzymanych rezultatów.

Właściwie przygotowany i zrealizowany eksperyment, w połączeniu z analizą statystyczną jego wyników, prowadzi do sformułowania wniosków i zaleceń dla badanego procesu. Ostatni etap schematu planowania eksperymentów zawiera zalecenia praktyczne, które powinny dotyczyć ulepszenia już istniejących procedur produkcji lub sformułowania propozycji nowych rozwiązań technologicznych dla badanego procesu produkcyjnego.

Planowanie eksperymentów w praktyce przedsiębiorstw produkcyjnych stosowane jest przede wszystkim w projektowaniu i konstrukcji nowych wyrobów oraz w modernizacji produktów już wytwarzanych. W literaturze (Montgomery, 2009) wyróżnia się następujące korzyści wynikające z zastosowania planowania eksperymentów w badaniach przemysłowych:

- dobór odpowiednich materiałów i surowców;
- wskazanie najlepszego wyrobu spośród jego różnych prototypów;
- możliwość ustalenia poziomów czynników tak, aby zminimalizować rozproszenie wielkości wyjściowych i zapewnić odpowiednią dokładność;
- redukcja czasu wprowadzenia nowego wyrobu do produkcji;
- usprawnienie procesu produkcji oraz zwiększenie produktywności;
- poprawa niezawodności produktu;
- obniżenie kosztów ogólnych procesu.

Wykorzystanie narzędzia planowania eksperymentów zazwyczaj nie powinno się ograniczać do przeprowadzenia pojedynczego i obszernego eksperymentu. Eksperymentowanie jest procedurą złożoną i ma charakter iteracyjny, co oznacza, że na podstawie przeprowadzonego eksperymentu formułowane są hipotezy, które stają się podstawą do zaprojektowania i realizacji kolejnych doświadczeń (Montgomery, 2009). Właściwe zaplanowanie i realizacja eksperymentów pozwalają na pogłębienie wiedzy dotyczącej badanego procesu oraz prowadzi do jego ciągłego doskonalenia. Stąd można stwierdzić, że narzędzie planowania eksperymentów jest wysoce użyteczne i niezbędne w praktyce przedsiębiorstw produkcyjnych.

1.3. Podstawy teoretyczne planowania eksperymentów

W celu wdrożenia metodologii planowania eksperymentów, zarówno w praktyce przedsiębiorstw produkcyjnych, jak i w innych obszarach zastosowań, niezbędne jest wprowadzenie odpowiedniego zapisu formalnego. Ponadto usystematyzowanie poszczególnych pojęć prowadzi do zrozumienia ogólnych zasad i metod wykorzystywanych w planowaniu eksperymentów.

Niniejsze rozważania będą dotyczyć eksperymentu polegającego na badaniu wpływu zbioru zmiennych objaśniających $X_1, X_2, \dots, X_m$ na zmienną objaśnianą Y . Zmienne objaśniające, w kontekście planowania eksperymentów, zazwyczaj nazywane są czynnikami lub zmiennymi wejściowymi. Natomiast zmienna objaśniana określana jest również jako zmienna wynikowa lub wyjściowa. Eksperyment obejmuje ciąg n kolejnych doświadczeń. Przy czym przez doświadczenie należy rozumieć uzyskanie pojedynczej obserwacji każdej zmien-

nej objaśnianej, przy jednoczesnej obserwacji wartości (stanów) poszczególnych zmiennych objaśniających.

Zmienne wejściowe $X_1, X_2, \dots, X_m$ przyjmują wartości odpowiednio ze zbiorów $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_m$. Obszarem eksperymentowania nazywany jest zbiór D_E , którego elementami są punkty $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, gdzie $x_i \in \mathbf{X}_i, i = 1, 2, \dots, m$.

Plan eksperymentu obejmujący n doświadczeń stanowi zbiór postaci:

$$P_n = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}, \quad (1.1)$$

gdzie $\mathbf{x}_i = (x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{mi}) \in D_E$, dla $i = 1, 2, \dots, n$. Elementy planu eksperymentu P_n jednoznacznie określają poziomy czynników w poszczególnych doświadczeniach. Ponadto dopuszcza się, że $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j$, dla $i \neq j$ oraz $i, j = 1, 2, \dots, n$. Oznacza to, że możliwe jest przeprowadzenie więcej niż jednego doświadczenia w danym punkcie obszaru eksperymentowania. Wartość indeksu dolnego elementu planu eksperymentu nie determinuje kolejności realizacji poszczególnych doświadczeń w eksperymencie, informuje jedynie o tym, że jedno z doświadczeń jest realizowane w danym punkcie obszaru eksperymentowania. Kolejność doświadczeń jest ustalana zgodnie z przyjętymi przez eksperymentatora regułami randomizacji (Wawrzynek, 1993). Zatem należy zauważyć, że plan eksperymentu, który jest dowolną permutacją elementów planu P_n , może być utożsamiany z planem P_n . Co więcej, każdy plan eksperymentu P_n definiuje odpowiadającą mu macierz planu postaci:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{m1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}.$$

Zachodzi również zależność odwrotna mówiąca, że dowolna macierz planu $\mathbf{X}$ definiuje odpowiadający jej plan eksperymentu (Wawrzynek, 2009).

Zazwyczaj badania eksperymentalne polegają na analizie wpływu pewnej liczby czynników kontrolowanych (nielosowych) $X_1, X_2, \dots, X_m$ na zmienną wynikową Y . Wiadomo również, że na zmienną wyjściową Y mogą wpływać czynniki niekontrolowane (losowe). Wówczas rozważaną zależność można przedstawić w postaci modelu statystycznego określonego równaniem (Wawrzynek, 2009):

$$Y(X_1, X_2, \dots, X_m) = y(X_1, X_2, \dots, X_m) + \varepsilon, \quad (1.2)$$

gdzie $EY(X_1, X_2, \dots, X_m) = y(X_1, X_2, \dots, X_m)$, $E\varepsilon = 0$ oraz $V\varepsilon = \sigma^2$, przy czym σ^2 jest wielkością stałą, niezależną od wartości poszczególnych czynników.

Przedmiotem badania statystycznego jest funkcja $y(X_1, X_2, \dots, X_m)$, nazywana funkcją powierzchni odpowiedzi lub po prostu powierzchnią odpowiedzi. Argumentami funkcji powierzchni odpowiedzi są realizacje m nielosowych zmiennych (czynników) $X_1, X_2, \dots, X_m$. W n wybranych punktach obszaru eksperymentowania D_E można obserwować wartości zmiennej objaśnianej postaci:

$$Y_i = y(x_1, x_2, \dots, x_m) + \varepsilon_i, \text{ dla } i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.3)$$

W rozważaniach przyjmuje się, że (Wawrzynek, 2009):

$$\begin{cases} E\varepsilon_i = 0 \\ V\varepsilon_i = \sigma^2 \\ \text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (1.4)$$

Ponadto zakłada się, że nieznana funkcja powierzchni odpowiedzi $y(x_1, x_2, \dots, x_m)$ należy do klasy funkcji postaci:

$$\begin{aligned} \tilde{y}(x_1, x_2, \dots, x_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k) = \\ = \beta_1 f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) + \dots + \beta_k f_k(x_1, x_2, \dots, x_m), \end{aligned} \quad (1.5)$$

gdzie $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ są nieznanymi rzeczywistymi parametrami, natomiast funkcje $f_j(x_1, x_2, \dots, x_m)$, dla $j = 1, 2, \dots, k$ są znane. Równanie (1.5) można przedstawić w postaci:

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1.6)$$

gdzie:

$$\mathbf{y}^T = [Y_1 \dots Y_n], \quad (1.7)$$

$$\boldsymbol{\beta}^T = [\beta_1 \dots \beta_k], \quad (1.8)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n], \quad (1.9)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_1(x_{11}, \dots, x_{1m}) & \dots & f_k(x_{11}, \dots, x_{1m}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_{n1}, \dots, x_{nm}) & \dots & f_k(x_{n1}, \dots, x_{nm}) \end{bmatrix}. \quad (1.10)$$

Model (1.6) wraz z warunkami (1.4) nazywany jest ogólnym modelem liniowym (Wawrzynek, 2009).

Wiadomo, że wielomian może być traktowany jako rozwinięcie pewnej zazwyczaj nieznannej funkcji w szereg Taylora. W związku z tym klasa funkcji $\tilde{y}(x_1, x_2, \dots, x_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$ jest utożsamiana z klasą wielomianów ustalonego stopnia (Wawrzynek, 2009). Stąd w teorii planowania eksperymentów rozważa się nieznane postaci funkcji powierzchni odpowiedzi $y(x_1, x_2, \dots, x_m)$, które wyrażane są za pomocą wielomianów m zmiennych stopnia d typu I danych wzorem:

$$\begin{aligned} \tilde{y}(x_1, x_2, \dots, x_m, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{m \dots m}) = & \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_m x_m + \\ & + \beta_{12} x_1 x_2 + \dots + \beta_{m-1m} x_{m-1} x_m + \beta_{11} x_1^2 + \dots + \beta_{mm} x_m^2 + \beta_{123} x_1 x_2 x_3 + \dots + \beta_{m \dots m} x_m^d \end{aligned} \quad (1.11)$$

lub wielomianów m zmiennych stopnia d typu II postaci:

$$\begin{aligned} \tilde{y}(x_1, x_2, \dots, x_m, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) = & \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_d x_1^d + \beta_{d+1} x_2 + \dots + \\ & \beta_{2d} x_2^d + \dots + \beta_{(m-1)d+1} x_m + \dots + \beta_{md} x_m^d + \dots + \beta_r x_1^d x_2^d + \dots + \beta_s x_1^d x_2^d \dots x_m^d. \end{aligned} \quad (1.12)$$

W zastosowaniach metod planowania eksperymentów ważną rolę odgrywa funkcja powierzchni odpowiedzi, która jest definiowana za pomocą wielomianów stopnia 1 typu I postaci:

$$\tilde{y}(x_1, x_2, \dots, x_m, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_m x_m \quad (1.13)$$

oraz wielomianów stopnia 1 typu II danych wzorem:

$$\begin{aligned} \tilde{y}(x_1, x_2, \dots, x_m, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m, \beta_{12}, \dots, \beta_{12 \dots m}) = \\ = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_m x_m + \beta_{12} x_1 x_2 + \dots + \beta_{12 \dots m} x_1 x_2 \dots x_m. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Funkcja postaci (1.13) nazywana jest funkcją powierzchni odpowiedzi nieuwzględniającą interakcji czynników $X_1, X_2, \dots, X_m$. Natomiast funkcja dana wzorem (1.14) określana jest funkcją powierzchni odpowiedzi z uwzględnieniem interakcji, gdzie interakcją poszczególnych zmiennych objaśniających nazywane są współczynniki $\beta_{12}, \dots, \beta_{12 \dots m}$.

Właściwie przygotowany eksperyment prowadzi do realizacji ustalonej liczby doświadczeń. Zgodnie ze schematem planowania eksperymentów uzyskane wyniki przeprowadzonych doświadczeń, będące wartościami zmiennej objaśnianej, podlegają analizie z wykorzystaniem wybranych metod statystycznych. Wśród najczęściej stosowanych metod statystycznych w analizie wyników eksperymentu wymienia się analizę regresji oraz analizę wariancji (Elandt, 1964; Aczel, 2000; Kończak, 2007; Gonzalez, 2009; Wawrzynek, 2009). Rezultatem eksperymentu niejednokrotnie jest również oszacowanie modelu funkcji powierzchni odpowiedzi charakteryzującej badany proces lub zjawisko. Wówczas analiza wyników eksperymentu polega między innymi na ocenie istotności oszacowanego modelu lub jego poszczególnych parametrów (Montgomery, 2013).

1.4. Wykorzystanie planowania eksperymentów w obszarach niezwiązanych z przemysłem produkcyjnym

Metodologia planowania eksperymentów w ostatnich dekadach wyszła już znacznie poza obszary jej typowych zastosowań w rolnictwie i procesach produkcyjnych. D.C. Montgomery (2013) wskazuje nawet, że nie ma dziedziny nauki czy inżynierii, w której z powodzeniem nie zostały zastosowane eksperymenty. W niniejszej części rozdziału zostaną wskazane obszary niezwiązane bezpośrednio z procesami produkcyjnymi, w których możliwe jest zastosowanie planowania eksperymentów.

1.4.1. Planowanie eksperymentów w przedsiębiorstwach usługowych

Osoby zarządzające przedsiębiorstwami z różnych branż zazwyczaj traktują metody planowania eksperymentów jako procedury, które można wykorzystywać głównie w ramach działalności przedsiębiorstw zajmujących się produkcją określonych wyrobów. Metodologia planowania eksperymentów jest wtedy realizowana jako metoda techniczna, której wykorzystanie przynosi wymierne efekty w zagadnieniach związanych z poprawą jakości produktów lub doskonaleniem procesów produkcyjnych.

W 1996 roku na łamach magazynu „Forbes” opublikowano artykuł pod tytułem *The new mantra: MVT*, którego autorem była R. Koselka (1996). Publikacja dotyczyła wdrożenia technik jednoczesnego testowania wielu zmiennych (MVT – *multivariable testing*), które odpowiadają statystycznemu planowaniu eksperymentów. R. Koselka przedstawiła przykłady wprowadzenia procedur planowania eksperymentów czynnikowych (określane jako MVT) w przedsiębiorstwach produkcyjnych (np. ekranów dotykowych, papieru czy nylonu), ale również w działalności szpitali czy sklepów. W artykule jasno wskazano rzeczywiste korzyści wynikające ze stosowania planowania eksperymentów, w tym: wzrost jakości i zwiększenie produkcji, poprawę rezultatów finansowych czy też zmianę preferencji pacjentów lub poprawę skuteczności reklamy. R. Koselka zaznacza, że bez względu na rodzaj branży, w jakiej prowadzona jest działalność, należy stosować planowanie eksperymentów, które doprowadzi do poprawy wydajności przedsiębiorstwa.

Od kilkudziesięciu lat planowanie eksperymentów jest szeroko stosowane w praktyce przedsiębiorstw produkcyjnych, natomiast metody te nie znalazły powszechnego zastosowania w działalności przedsiębiorstw usługowych. Wśród zagrożeń dla efektywnego stosowania metod planowania eksperymentów w praktyce przedsiębiorstw usługowych wymienia się między innymi (Antony i in., 2011):

- nieznaną podstaw teoretycznych i brak doświadczenia w zakresie metodologii planowania eksperymentów;
- trudności pomiarowe;
- zależność efektywności usług od indywidualnych preferencji i zachowań odbiorców;
- zwiększoną liczbę czynników zakłócających (np. cechy charakteru odbiorców, lokalizacja przedsiębiorstwa usługowego);
- specyfikę procesów usługowych (np. występowanie wartości niematerialnych).

Zarówno praktycy, jak i teoretycy dostrzegają coraz więcej możliwości dla wykorzystania metod planowania eksperymentów w przedsiębiorstwach niezwiązanych z produkcją. Wśród korzyści wynikających z wdrożenia metod planowania eksperymentów w praktyce przedsiębiorstw usługowych wskazuje się między innymi (Antony i in., 2011):

- możliwość oceny związku przyczynowo-skutkowego pomiędzy czynnikami a zmienną wynikową charakteryzującą usługę;
- ilościową charakterystykę procesów usługowych;
- identyfikację interakcji czynników.

J. Antony i in. (2020) przedstawili przegląd literatury dotyczącej wykorzystania technik planowania eksperymentów w szeroko pojętym sektorze usług (*service industry*). Spośród analizowanych publikacji z lat 1994-2019 wyodrębnili 26 artykułów, które przedstawiają praktyczne przykłady wykorzystania planowania doświadczeń w sektorze usług. Najwięcej publikacji dotyczyło zagadnień związanych z ochroną zdrowia, sprzedażą dóbr, logistyką i edukacją. Klasyczne plany eksperymentów czynnikowych, a w szczególności całkowite plany eksperymentów czynnikowych, były najczęściej wykorzystywanymi metodami badań. Wzrost zainteresowania zastosowaniem metod planowania doświadczeń w praktyce przedsiębiorstw usługowych potwierdza fakt, że większość publikacji uwzględnionych w badaniu powstała w ostatnim dziesięcioleciu. W 2020 roku przeprowadzono badanie ankietowe wśród 109 respondentów z ponad 20 krajów, którego celem była ocena aktualnych możliwości wykorzystania planowania eksperymentów w praktyce przedsiębiorstw usługowych (Antony i in., 2021). Na podstawie przeprowadzonego badania wyróżniono czynniki, które wpływają na efektywne wykorzystanie planowania eksperymentów w branży usług. Do najważniejszych należą: edukacja dotycząca planowania eksperymentów w za-

kresie przedsiębiorstw usługowych, przeznaczenie odpowiednich zasobów na rzecz planowania eksperymentów oraz właściwe przygotowanie i przeprowadzenie doświadczeń. Ponadto zaznaczono, że wykorzystanie planowania eksperymentów w praktyce przedsiębiorstw usługowych przynosi wymierne korzyści i pozwala na poprawę wydajności procesów związanych z usługami.

1.4.2. Eksperymenty w badaniach ekonomicznych

Do niedawna eksperyment w ekonomii nie był traktowany jako metoda badawcza, a sama ekonomia była uznawana jako nauka nieeksperymentalna. W ostatnich dekadach, wraz z rozpowszechnieniem zagadnień z zakresu ekonomii behawioralnej i związanej z nią ekonomii eksperymentalnej, zauważalny jest zwrot w kierunku stosowania badań eksperymentalnych w naukach ekonomicznych. Niejako potwierdzeniem tego nurtu i wyrazem uznania dla metodologii eksperymentu są Nagrody Banku Szwecji im. Alfreda Nobla w dziedzinie ekonomii przyznane w latach 2019 i 2021.

W 2019 roku laureatami Nagrody Nobla w dziedzinie ekonomii zostali: E. Duflo (Massachusetts Institute of Technology), A. Banerjee (Massachusetts Institute of Technology) i M. Kremer (Harvard University). Komitet Noblowski uhonorował uczonych za ich eksperymentalne podejście do łagodzenia globalnego ubóstwa. Badania noblistów związane są z ekonomią rozwoju, a w szczególności traktują o przeciwdziałaniu ubóstwu w krajach o niskim poziomie dochodu. Nowatorskim podejściem w prowadzonych badaniach z zakresu ekonomii rozwoju było zastosowanie metod eksperymentalnych, ze szczególnym uwzględnieniem randomizowanych badań kontrolowanych (RCT – *Randomized Controlled Trials*). Jako źródło podstaw teoretycznych randomizowanych badań kontrolnych podaje się badania eksperymentalne stosowane wcześniej w medycynie (Buttler, Szambelańczyk, 2020; Danowska-Prokop, Pęciak, Zagóra-Jonszta, 2022). Warto zauważyć, że pierwsze zastosowania eksperymentów randomizowanych dotyczą jednak badań z zakresu doświadczalnictwa rolniczego prowadzonych przez R.A. Fishera w latach 20. XX wieku.

A. Banerjee, E. Duflo i M. Kremer prowadzili badania od lat 90. XX wieku w ponad 12 krajach słabo rozwiniętych. Wykorzystywali randomizowane badania kontrolne, które w ujęciu ogólnym polegały na przypisaniu w sposób losowy osób biorących udział w badaniu do grupy badanej lub grupy kontrolnej. Osoby z grupy badanej były poddawane określonym działaniom (interwencjom). Efekty przeprowadzonych interwencji w grupie badanej były porównywane z odpowiadającymi im efektami w grupie kontrolnej, która nie została poddana rozważa-

nym interwencjom. Podmiotami przeprowadzonych badań były nie tylko osoby, ale również przedsiębiorstwa czy obszary (np. wioski). Badania prowadzone przez A. Banerjee, E. Duflo i M. Kremera dotyczyły problemów związanych z edukacją, ochroną zdrowia czy sferą finansową w krajach słabo rozwiniętych. Rozważane były w nich różnego rodzaju programy pomocowe czy interwencje, których głównym celem było łagodzenie ubóstwa, w tym między innymi: obecność nauczycieli, dostęp do darmowych podręczników, darmowe obiady w szkole, korepetycje dla słabych uczniów, programy szczepień, program odrobaczania dzieci w wieku szkolnym, udzielanie mikropożyczek, dostęp do nowoczesnych usług pośrednictwa pracy (Buttler, Szambelańczyk, 2020; Danowska-Prokop, Pęciak, Zagóra-Jonszta, 2022). Najważniejszym wynikiem badań prowadzonych przez A. Banerjee, E. Duflo i M. Kremera są empiryczne dowody na to, że interwencje mające na celu łagodzenie ubóstwa mogą być skuteczne wtedy, gdy przeciwdziałają konkretnym problemom w określonej grupie badawczej (Danowska-Prokop, Pęciak, Zagóra-Jonszta, 2022). Ponadto nobliści z 2019 roku przyczynili się do rozwoju metody eksperymentalnej, jaką są randomizowane badania kontrolne, poprzez wprowadzenie iteracji eksperymentów (powtórzenia eksperymentu dla określonej grupy badawczej), uwzględnienie efektu skali w przeprowadzonych interwencjach, szacowanie efektu rozprzestrzeniania się oraz wprowadzenie nowych miar efektu interwencji (Buttler, Szambelańczyk, 2020). Do najważniejszych publikacji podsumowujących efekty prowadzonych badań należą: *Poor Economics: A Radical Rethinking of the Way to Fight Global Poverty* (Banerjee, Duflo, 2011) oraz *Good Economics for Hard Times* (Banerjee, Duflo, 2019). Na uwagę zasługuje również działalność organizacji założonej przez E. Duflo i A. Banerjee w 2003 roku o nazwie Poverty Action Lab. Badania prowadzone przez organizację obejmują liczne eksperymenty dotyczące skuteczności interwencji, których wyniki stanowią podstawę do formułowania nowych ukierunkowanych programów pomocowych, które mogą być stosowane przez polityków.

Nagrodą Banku Szwecji im. Alfreda Nobla w dziedzinie ekonomii w 2021 roku uhonorowani zostali: D. Card (University of California), J.D. Angrist (Massachusetts Institute of Technology) oraz G.W. Imbens (Stanford University). Połowę nagrody otrzymał D. Card za wkład empiryczny w ekonomikę pracy, natomiast J.D. Angrist i G.W. Imbens otrzymali po ¼ nagrody za metodologiczny wkład w analizę zależności przyczynowych. Osiągnięcia badawcze laureatów są ze sobą powiązane. D. Card w swoich badaniach z zakresu ekonomiki pracy wykorzystywał metodykę analizy przyczynowości proponowaną i doskonaloną przez J.D. Angrista i G.W. Imbensa.

Uczni stosowali w swoich badaniach metodologię tak zwanego schematu quasi-eksperymentalnego, który umożliwiał jak najbliższe podobieństwo do ran-

domizowanych badań kontrolnych (RCT) uznawanych za złoty standard (Buttler, 2022). Wśród schematów quasi-eksperymentalnych jako najważniejsze wymienia się: model regresji nieciągłej (RDD – *regression discontinuity design*), parowanie statystyczne (PSM – *propensity score matching*), metodę różnicy w różnicach (DID – *difference in differences*) oraz wykorzystanie zmiennej instrumentalnej (IV – *instrumental variable*). Osiągnięcia D. Carda, J.D. Angrista i G.W. Imbensa w obszarze ekonomiki pracy dotyczą przede wszystkim ekonomii edukacji, skutków ekonomicznych wprowadzenia płacy minimalnej oraz wpływu imigrantów na rynek pracy (Buttler, 2022). Badania wykorzystujące metody quasi-eksperymentalne w zakresie szeroko pojętej edukacji, prowadzone przez J.D. Angrista, D. Carda i A.B. Kruegera w latach 90. XX wieku, pozwoliły na wykazanie istnienia związku przyczynowego pomiędzy poziomem wykształcenia a wynagrodzeniem oraz dowiodły pozytywnego wpływu jakości kształcenia na wynagrodzenia. Najważniejsze rezultaty badań D. Carda i A.B. Kruegera dotyczące efektów podniesienia płacy minimalnej doprowadziły do sformułowania wniosków, które były zupełnie odmienne niż dotychczasowy stan wiedzy ekonomicznej. D. Card i A.B. Krueger, wykorzystując teorię eksperymentów naturalnych, udowodnili między innymi, że zwiększenie płacy minimalnej nie stanowi przyczyny zmniejszenia liczby miejsc pracy. Najważniejsze wnioski w zakresie płacy minimalnej D. Card i A.B. Krueger opublikowali w monografii pod tytułem *Myth and Measurement. The New Economics of the Minimum Wage* (Card, Krueger, 1995). Trzeci obszar badań realizowany głównie przez D. Carda dotyczył wpływu imigrantów na zatrudnienie i poziom wynagrodzeń pracowników miejscowych. W wyniku przeprowadzonych eksperymentów D. Card dowiódł, że wzrost liczby imigrantów nie wpływa znacząco na liczbę miejsc pracy i poziom wynagrodzeń oraz nie prowadzi do odpływu pracowników miejscowych do innych miast.

J.D. Angrist i G.W. Imbens zostali uhonorowani przez Komitet Noblowski za znaczący wkład w rozwój metod quasi-eksperymentalnych. Laureaci sformulowali i rozwinęli metodologię badania przyczynowości z wykorzystaniem odpowiednio zdefiniowanej zmiennej instrumentalnej. J.D. Angrist i G.W. Imbens wskazali, jakie własności powinna spełniać zmienna instrumentalna (między innymi niezależność od zmiennej wynikowej i monotoniczność), która pozwala na właściwe oszacowanie lokalnego średniego efektu oddziaływania (LATE – *local average treatment effect*). Jedną z ważniejszych prac noblistów w tym zakresie był artykuł pod tytułem *Identification of Casual Effects Using Instrumental Variables* (Angrist, Imbens, Rubin, 1996). Ponadto G.W. Imbens wprowadził udoskonalenia pozostałych schematów realizacji badań quasi-eksperymentalnych oraz opublikował wnikliwe przeglądy metod quasi-eksperymentalnych, uwzględniając

w nich zalecenia dla praktyków. J.D. Angrist jest współautorem nowatorskiego podręcznika do ekonometrii pod tytułem *Mostly Harmless Econometrics* (Angrist, Pischke, 2009), w którym przedstawiono między innymi podejście wykorzystujące metody quasi-eksperymentalne w ekonomii.

Współpracownikiem i współautorem prac D. Carda, a później również J.W. Angrista, był A.B. Krueger. Prace badawcze A.B. Kruegera, wykorzystujące metodologię eksperymentów, dotyczyły przede wszystkim płacy minimalnej (współpraca z D. Cardem), edukacji (współpraca z J.W. Angristem), wpływu wzrostu gospodarczego na środowisko czy nierówności dochodowych. A.B. Krueger zmarł tragicznie w 2019 roku.

Metodologia wykorzystująca badania eksperymentalne w ekonomii spotyka się wciąż z krytyką. Jako główne ograniczenie metod proponowanych przez noblistów wymienia się zawężenie zakresu lub tematyki badań – skierowane są do grupy konkretnych osób (niewielka liczebność próby) lub przeprowadzane na określonym terenie (zasięg lokalny). Ponadto wskazuje się, że wyniki eksperymentów pozwalają na oszacowanie przeciętnego efektu przeprowadzonych działań, który może być niewiarygodny ze względu na obserwacje odstające (Buttler, Szambelańczyk, 2020; Buttler, 2022). Pomimo pojawiających się uwag krytycznych dotyczących badań eksperymentalnych w ekonomii, osiągnięcia noblistów z lat 2019 i 2021 doprowadziły do rozpowszechnienia i wzrostu zainteresowania metodologią eksperymentu wśród ekonomistów.



Rezultaty badań z zakresu doświadczalnictwa rolniczego uzyskane przez R.A. Fishera przyczyniły się do sformułowania nowych procedur konstrukcji eksperymentów. Już w trakcie własnych badań R.A. Fisher wprowadzał nowe procedury realizacji układów doświadczeń z wykorzystaniem metod randomizacji i replikacji. Plany eksperymentów konstruowane początkowo głównie w celu realizacji doświadczeń rolniczych w literaturze określane są jako klasyczne plany eksperymentów (Wawrzynek, 2009).

Niejako naturalnym następstwem wykorzystania metod planowania eksperymentów w doświadczeniach polowych było ich zastosowanie w biologii i medycynie, gdzie zazwyczaj wykorzystywano klasyczne procedury realizacji eksperymentów. W latach 30. XX wieku pierwsze procedury planowania eksperymentów zostały wdrożone w przedsiębiorstwach produkcyjnych. Etap ten zapoczątkował konstrukcję planów eksperymentów czynnikowych, które zazwyczaj uwzględniają czynniki występujące na dwóch lub trzech poziomach. W niniejszym rozdziale przedstawiono procedury konstrukcji klasycznych i czynnikowych planów eksperymentów.

Wykorzystanie planów eksperymentów w celu doskonalenia jakości produktów spowodowało dynamiczny rozwój metodologii planowania eksperymentów zarówno wśród praktyków, jak i teoretyków. Obecnie klasyczne oraz czynnikowe plany eksperymentów znajdują zastosowanie nie tylko w rolnictwie, biologii, medycynie lub inżynierii produkcji, ale również w psychologii, ekologii, ekonomii czy marketingu.

2.1. Charakterystyka wybranych klasycznych planów eksperymentów

Plany eksperymentów, które w większości zostały skonstruowane w ramach badań R.A. Fishera z zakresu doświadczalnictwa rolniczego, stanowią grupę klasycznych planów eksperymentów. W swej procedurze uwzględniają jeden lub kilka czynników oddziałujących na zmienną wynikową. Analiza rezultatów eksperymentu przeprowadzonego zgodnie z klasycznym planem doświadczeń polega na zastosowaniu odpowiednio sformułowanej metody analizy wariancji.

Pierwsze z przedstawionych planów eksperymentów – plan jednoczynnikowy i dwuczynnikowy – są w swojej strukturze najmniej złożonymi planami eksperymentów. Plany te polegają na losowej realizacji wszystkich możliwych doświadczeń. W drugiej grupie planów eksperymentów opisano plany, których konstrukcja wymaga utworzenia odpowiednich bloków. Wówczas doświadczenia są realizowane w sposób losowy w ramach poszczególnych bloków, jak również kolejność wyboru poszczególnych bloków jest losowa. Mowa tutaj o planie bloków zrandomizowanych, planie zrównoważonych bloków niekompletnych, kwadracie łacińskim oraz kwadracie grecko-łacińskim.

2.1.1. Plan jednoczynnikowy

Jednym z podstawowych i najmniej złożonym planem eksperymentu jest plan jednoczynnikowy. Uwzględnia on tylko jeden czynnik X występujący na p poziomach. Eksperyment, który ma być przeprowadzony zgodnie z planem jednoczynnikowym, obejmuje $n = n_1 + \dots + n_p$ doświadczeń, gdzie n_i stanowi liczbę doświadczeń zrealizowanych dla ustalonego na i -tym poziomie czynnika X , gdzie $i = 1, 2, \dots, p$. Wyniki przeprowadzonego eksperymentu jednoczynnikowego można przedstawić w postaci tabeli 2.1, gdzie y_{ij} jest wartością zmiennej wynikowej uzyskanej dla czynnika X ustalonego na i -tym poziomie w j -tym powtórzeniu doświadczenia, zaś $y_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}$ oraz $\bar{y}_{i\cdot} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}$, dla $i = 1, 2, \dots, p$.

Tabela 2.1. Wyniki eksperymentu jednoczynnikowego

Poziom czynnik X	Wartości zmiennej wynikowej w poszczególnych doświadczeniach						$y_{i\bullet}$	$\bar{y}_{i\bullet}$
1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1n_2}	...	y_{1n_1}	$y_{1\bullet}$	$\bar{y}_{1\bullet}$
2	y_{21}	y_{22}	...	y_{2n_2}			$y_{2\bullet}$	$\bar{y}_{2\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
p	y_{p1}	y_{p2}	...	y_{pn_2}	...	y_{pn_1}	$y_{p\bullet}$	$\bar{y}_{p\bullet}$

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: Montgomery (2013).

Wartości zmiennej wynikowej uzyskane w wyniku realizacji planu eksperymentu jednoczynnikowego można przedstawić za pomocą modelu postaci:

$$y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}, \quad (2.1)$$

gdzie μ_i jest przeciętną wartością zmiennej wynikowej dla czynnika X ustalonego na i -tym poziomie, μ jest ogólną wartością przeciętną zmiennej Y (stałą dla każdego z poziomów czynnika X), natomiast α_i jest odchyleniem wartości zmiennej wynikowej od średniej ogólnej na skutek działania czynnika X ustalonego na poziomie i -tym (tzw. efekt czynnika X), ponadto ε_{ij} jest błędem losowym j -tej obserwacji zmiennej Y , gdy czynnik X występuje na i -tym poziomie, przy czym $i = 1, 2, \dots, p$, $j = 1, 2, \dots, n_i$.

Celem eksperymentu jednoczynnikowego jest ocena wpływu czynnika X na wartość zmiennej wynikowej, a dokładniej wpływu zmian poziomów czynnika X na zmienną Y . Przy spełnieniu założeń (1.4) oraz gdy $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma)$, dla $i = 1, 2, \dots, p$, zagadnienie to sprowadza się do weryfikacji hipotez postaci:

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0, \quad (2.2)$$

$$H_1 : \exists_i \alpha_i \neq 0. \quad (2.3)$$

Hipoteza sprawdzana (2.2) mówi o braku wpływu efektów czynnika X na zmienną wynikową Y , natomiast hipoteza alternatywna głosi o istotności co najmniej jednego z efektów czynnika X . Prawdziwość hipotezy (2.2) sprawdzana jest z wykorzystaniem metody jednoczynnikowej analizy wariancji (por. Wawrzynek, 2009).

Realizacja planu eksperymentu jednoczynnikowego prowadzi również do oszacowania parametrów $\mu, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ rozważanego modelu (2.1). Oszacowania punktowego dokonuje się zazwyczaj z wykorzystaniem metody najmniej-

szych kwadratów (Montgomery, 2013). Jest to możliwe jedynie wtedy, gdy spełnione jest dodatkowe założenie $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 0$. Wówczas parametry modelu (2.1) można wyznaczyć za pomocą poniższych formuł (Montgomery, 2013):

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{..}, \quad (2.4)$$

$$\hat{\alpha}_i = \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}, \quad (2.5)$$

gdzie $\bar{y}_{..} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}$ oraz $i = 1, 2, \dots, p$. Przyjmując, że $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma)$, dla $i = 1, 2, \dots, p$, można skonstruować przedział, który z prawdopodobieństwem $1 - \alpha$ obejmuje wartość przeciętną μ_i i jest postaci:

$$\bar{y}_{i.} - t_{\frac{\alpha}{2}, n-p} \sqrt{\frac{SS_W}{n_i(n-p)}} \leq \mu_i \leq \bar{y}_{i.} + t_{\frac{\alpha}{2}, n-p} \sqrt{\frac{SS_W}{n_i(n-p)}}, \quad (2.6)$$

gdzie $t_{\frac{\alpha}{2}, n-p}$ jest wartością wyznaczoną z rozkładu t -Studenta o $n - p$ stop-

niach swobody, przy czym $SS_W = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2$, natomiast $\frac{SS_W}{(n-p)}$ jest oszacowaniem wartości σ^2 (Montgomery, 2013).

W literaturze (Miszczak, Ostasiewicz, Wawrzynek, 2008) plan eksperymentu jednoczynnikowego nazywany jest również planem eksperymentu kompletnie zrandomizowanego. Oznacza to, że doświadczenia w eksperymencie podlegają regułom randomizacji, czyli ich realizacja przebiega w sposób losowy. Ponadto kolejne doświadczenia są podzielone na bloki, które w przypadku eksperymentu jednoczynnikowego odpowiadają poszczególnym poziomom czynnika X .

2.1.2. Plan dwuczynnikowy

W planie eksperymentu dwuczynnikowego rozważa się czynnik X_1 występujący na p_1 poziomach oraz czynnik X_2 na p_2 poziomach. Najprostszym wariantem planu dwuczynnikowego jest plan, który uwzględnia pojedyncze pomiary wartości zmiennej wynikowej dla wszystkich możliwych kombinacji poziomów czynników X_1 oraz X_2 . Wtedy należy przeprowadzić $n = p_1 p_2$ doświadczeń, których wyniki można przedstawić w postaci odpowiedniej tabeli (tabela 2.2).

Tabela 2.2. Wartości zmiennej wynikowej dla eksperymentu dwuczynnikowego

Poziom czynnik X_1	Poziom czynnik X_2			
	1	2	...	p_2
1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1p_2}
2	y_{21}	y_{22}	...	y_{2p_2}
...	...	...	...	...
p_1	$y_{p_1 1}$	$y_{p_1 2}$	...	$y_{p_1 p_2}$

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: Montgomery (2013).

Celem eksperymentu dwuczynnikowego jest określenie wpływu indywidualnych zmian poziomów czynników X_1 oraz X_2 na wartości zmiennej wynikowej Y . Wartości zmiennej objaśnianej uzyskane na podstawie powyżej określonego planu eksperymentu dwuczynnikowego można przedstawić w postaci modelu klasyfikacji dwukierunkowej postaci:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}, \quad (2.7)$$

dla $i = 1, 2, \dots, p_1$, $j = 1, 2, \dots, p_2$. Schemat analizy wariancji modelu (2.7) można

przedstawić w postaci tabeli 2.3, gdzie $\bar{y}_{i\cdot} = \frac{1}{p_2} \sum_{j=1}^{p_2} y_{ij}$, $\bar{y}_{\cdot j} = \frac{1}{p_1} \sum_{i=1}^{p_1} y_{ij}$ oraz

$$\bar{y}_{..} = \frac{1}{p_1 p_2} \sum_{i=1}^{p_1} \sum_{j=1}^{p_2} y_{ij}.$$

Tabela 2.3. Tablica analizy wariancji dla planu dwuczynnikowego

Źródło zmienności	Suma kwadratów	Liczba stopni swobody	Średni kwadrat	Statystyka testowa
Poziomy czynnik X_1	$SS_{X_1} =$ $= p_2 \sum_{i=1}^{p_1} (\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{..})^2$	$p_1 - 1$	$\frac{SS_{X_1}}{p_1 - 1}$	$F_{p_1-1, (p_1-1)(p_2-1)} =$ $= \frac{SS_{X_1} (p_2 - 1)}{SS_E}$
Poziomy czynnik X_2	$SS_{X_2} =$ $= p_1 \sum_{j=1}^{p_2} (\bar{y}_{\cdot j} - \bar{y}_{..})^2$	$p_2 - 1$	$\frac{SS_{X_2}}{p_2 - 1}$	$F_{p_2-1, (p_1-1)(p_2-1)} =$ $= \frac{SS_{X_2} (p_1 - 1)}{SS_E}$
Błąd eksperymentalny	$SS_E =$ $= SS_C - SS_{X_1} - SS_{X_2}$	$(p_1 - 1)(p_2 - 1)$	$\frac{SS_E}{(p_1 - 1)(p_2 - 1)}$	–
Zmienność całkowita	$SS_C =$ $= \sum_{i=1}^{p_1} \sum_{j=1}^{p_2} (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2$	$p_1 p_2 - 1$	–	–

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: Wawrzynek (2009).

Analiza wariancji wyników eksperymentu dwuczynnikowego prowadzi do weryfikacji dwóch par hipotez statystycznych. Pierwsza para hipotez dotyczy wpływu efektów czynnika X_1 na wartości zmiennej Y i jest postaci:

$$H_0^{X_1} : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{p_1} = 0 \quad (2.8)$$

$$H_1^{X_1} : \exists_i \alpha_i \neq 0. \quad (2.9)$$

Druga para weryfikowanych hipotez dotyczy wpływu efektów czynnika X_2 na zmienną wynikową, co formalnie można zapisać jako:

$$H_0^{X_2} : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_{p_2} = 0 \quad (2.10)$$

$$H_1^{X_2} : \exists_i \beta_i \neq 0. \quad (2.11)$$

Jeżeli wartość statystyki testowej $F_{p_1-1, (p_1-1)(p_2-1)}$ jest większa od wartości krytycznej wyznaczonej z rozkładu Fishera-Snedecora o $p_1 - 1$ oraz $(p_1 - 1)(p_2 - 1)$ stopniach swobody, to na poziomie istotności α należy odrzucić hipotezę $H_0^{X_1}$ na korzyść hipotezy alternatywnej $H_1^{X_1}$. Ponadto hipoteza $H_0^{X_2}$ zostanie odrzucona na korzyść hipotezy alternatywnej $H_1^{X_2}$, gdy wartość statystyki testowej $F_{p_2-1, (p_1-1)(p_2-1)}$ przekracza wartość krytyczną wyznaczoną z rozkładu Fishera-Snedecora o $p_2 - 1$ oraz $(p_1 - 1)(p_2 - 1)$ stopniach swobody.

Parametry modelu (2.7) można oszacować z wykorzystaniem metody najmniejszych kwadratów. Wówczas estymatory parametrów $\mu, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p_1}, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{p_2}$ wyrażają się wzorami (Wawrzynek, 2009; Montgomery, 2013):

$$\mu = \bar{y}_{..}, \quad (2.12)$$

$$\hat{\alpha}_i = \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}, \quad (2.13)$$

$$\hat{\beta}_j = \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}. \quad (2.14)$$

Uwzględnienie interakcji czynników X_1 oraz X_2 w rozważanym eksperymencie dwuczynnikowym nie było możliwe ze względu na pojedyncze obserwacje zmiennej wynikowej w każdym doświadczeniu. W eksperymencie dwuczynnikowym interakcja czynników określa wpływ na zmienną wynikową Y ustalonego poziomu czynnika X_2 (lub X_1) przy zmianie poziomu czynnika X_1 (lub X_2). Interakcja czynników może być rozważana w eksperymencie dwuczynnikowym tylko wtedy, gdy doświadczenia dla poszczególnych kombinacji poziomów czynników zostaną powtórzone co najmniej dwa razy (Wawrzynek, 2009).

Stąd jeżeli celem eksperymentu dwuczynnikowego jest ocena interakcji czynników, to liczba replikacji w eksperymencie powinna być większa od 1 ($r > 1$). Schemat analizy wariancji planu eksperymentu dwuczynnikowego z uwzględnieniem interakcji czynników odpowiada schematowi obliczeń dwuczynnikowej analizy wariancji (por. Wawrzynek, 2009).

2.1.3. Plan bloków zrandomizowanych

W konstrukcji planu bloków zrandomizowanych rozważa się czynnik X_1 występujący na p_1 poziomach oraz czynnik X_2 występujący na p_2 poziomach. Celem tego eksperymentu jest zbadanie wpływu czynnika X_1 na zmienną wynikową, przy czym wpływ czynnika X_2 na zmienną wynikową nie jest uwzględniany. Czynnik X_2 nazywany jest czynnikiem bloków, a jego poziomyi blokami. Konstrukcja planu bloków zrandomizowanych polega na utworzeniu p_2 bloków, z których każdy obejmuje p_1 doświadczeń. Każdy z bloków odpowiada poszczególnym poziomom czynnika X_2 , natomiast każdemu doświadczeniu w bloku przyporządkowywany jest poziom czynnika X_1 zgodnie z regułą randomizacji. Przykład planu bloków zrandomizowanych dla czynnika X_1 występującego na trzech poziomach oraz czynnika X_2 występującego na czterech poziomach przedstawia tabela 2.4, gdzie wartość y_{ij} jest wartością zmiennej wynikowej uzyskaną dla czynnika X_1 ustalonego na i -tym poziomie w j -tym bloku.

Tabela 2.4. Rezultaty planu bloków zrandomizowanych dla $p_1 = 3$ oraz $p_2 = 4$

Poziomy czynnik X_2 (bloki)			
1	2	3	4
y_{21}	y_{12}	y_{33}	y_{24}
y_{11}	y_{32}	y_{13}	y_{14}
y_{31}	y_{22}	y_{23}	y_{34}

Źródło: Opracowanie własne.

Wartości zmiennej wynikowej uzyskane zgodnie z realizacją planu bloków zrandomizowanych można przedstawić za pomocą modelu klasyfikacji dwukierunkowej postaci (2.7). Zgodnie ze strukturą planu bloków zrandomizowanych należy rozważyć wyłącznie analizę wpływu czynnika X_1 na zmienną Y . Wtedy weryfikacji podlegają hipotezy dotyczące efektów czynnika X_1 postaci (2.8) oraz (2.9). Analizę wariancji planu bloków zrandomizowanych można przedstawić analogicznie jak w tabeli 2.3, przy czym uwzględnia się jedynie statystykę te-

stową postaci $F_{p_1-1, (p_1-1)(p_2-1)}$. Ponadto parametry modelu (2.7) $\mu, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p_1}, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{p_2}$ można oszacować za pomocą wzorów (2.12), (2.13) oraz (2.14).

2.1.4. Kwadrat łaciński i kwadrat grecko-łaciński

Kwadratem łacińskim nazywany jest plan eksperymentu, który uwzględnia trzy czynniki X_1, X_2, X_3 , przy czym każdy z czynników występuje na p poziomach. Zazwyczaj czynnik X_1 określany jest jako czynnik główny, natomiast czynniki X_2 oraz X_3 nazywane są odpowiednio czynnikiem bloków wierszowych oraz czynnikiem bloków kolumnowych. Konstrukcja kwadratu łacińskiego polega na ustaleniu poziomów czynników w poszczególnych doświadczeniach tak, aby każdy z możliwych układów poziomów czynników X_1, X_2, X_3 występował w eksperymencie tylko raz. Wtedy łączna liczba realizowanych doświadczeń wynosi $n = p^2$.

Plan eksperymentu utworzony zgodnie z kwadratem łacińskim zazwyczaj przedstawiany jest w postaci tabeli o wymiarach $p \times p$. Czynnik bloków wierszowych generuje wówczas p wierszy, natomiast czynnik bloków kolumnowych generuje p kolumn. Poziomy czynnika głównego w poszczególnych doświadczeniach oznaczane są za pomocą wielkich liter alfabetu łacińskiego. Konstrukcja kwadratu łacińskiego rozpoczyna się od utworzenia standardowego kwadratu łacińskiego – kwadratu, w którym pierwszy wiersz i pierwsza kolumna zawierają kolejne litery alfabetu. Następnie przeprowadzana jest jego randomizacja, czyli losowa permutacja kolumn i wierszy. Konstrukcję standardowego kwadratu łacińskiego oraz kwadratu łacińskiego po randomizacji, dla $p = 6$ poziomów czynników X_1, X_2, X_3 przedstawiają odpowiednio tabele 2.5 oraz 2.6.

Tabela 2.5. Standardowy kwadrat łaciński dla $p = 6$

Poziom czynnika X_2	Poziom czynnika X_3					
	$x_1^{(3)}$	$x_2^{(3)}$	$x_3^{(3)}$	$x_4^{(3)}$	$x_5^{(3)}$	$x_6^{(3)}$
$x_1^{(2)}$	A	B	C	D	E	F
$x_2^{(2)}$	B	C	D	E	F	A
$x_3^{(2)}$	C	D	E	F	A	B
$x_4^{(2)}$	D	E	F	A	B	C
$x_5^{(2)}$	E	F	A	B	C	D
$x_6^{(2)}$	F	A	B	C	D	E

Źródło: Opracowanie własne.

Tabela 2.6. Kwadrat łaciński dla $p = 6$

Poziom czynnika X_2	Poziom czynnika X_3					
	$x_1^{(3)}$	$x_2^{(3)}$	$x_3^{(3)}$	$x_4^{(3)}$	$x_5^{(3)}$	$x_6^{(3)}$
$x_1^{(2)}$	A	D	C	F	B	E
$x_2^{(2)}$	B	E	D	A	C	F
$x_3^{(2)}$	E	B	A	D	F	C
$x_4^{(2)}$	C	F	E	B	D	A
$x_5^{(2)}$	D	A	F	C	E	B
$x_6^{(2)}$	F	C	B	E	A	D

Źródło: Opracowanie własne.

Wartości zmiennej wynikowej otrzymane w wyniku realizacji eksperymentu zgodnie z planem kwadratu łacińskiego można przedstawić w postaci następującego modelu:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \varepsilon_{ijk}, \quad (2.15)$$

dla $i = 1, 2, \dots, p, j = 1, 2, \dots, p, k = 1, 2, \dots, p$, gdzie:

- y_{ijk} – wartość zmiennej wynikowej uzyskana dla czynnika X_1 ustalonego na poziomie i -tym w j -tym wierszu i k -tej kolumnie,
- μ – wartość przeciętna,
- α_i – efekt czynnika X_1 na poziomie i ,
- β_j – efekt czynnika X_2 na poziomie j (efekt wiersza j),
- γ_k – efekt czynnika X_3 na poziomie k (efekt kolumny k),
- ε_{ijk} – błąd losowy.

Schemat analizy wariancji modelu (2.15) przedstawia tabela 2.7.

Podstawowym celem eksperymentu realizowanego zgodnie z kwadratem łacińskim jest ocena wpływu czynnika X_1 na zmienną wynikową Y , czyli weryfikacja hipotez postaci:

$$H_0^{X_1} : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0 \quad (2.16)$$

$$H_1^{X_1} : \exists_i \alpha_i \neq 0. \quad (2.17)$$

Jeżeli wartość statystyki testowej $F_{p-1, (p-1)(p-2)} = \frac{SS_{X_1}(p-2)}{SS_E}$ jest większa od wartości krytycznej wyznaczonej z rozkładu Fishera-Snedecora o $p - 1$ oraz

$(p-1)(p-2)$ stopniach swobody, to hipotezę zerową (2.16) należy odrzucić na korzyść hipotezy alternatywnej (2.17), na ustalonym poziomie istotności α .

Tabela 2.7. Tablica analizy wariancji kwadratu łańciskiego

Źródło zmienności	Suma kwadratów	Liczba stopni swobody	Średni kwadrat	Statystyka testowa
Poziomy czynnik X_1	$SS_{X_1} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p y_{i..}^2 - \left(\frac{y_{...}}{p} \right)^2$	$p-1$	$\frac{SS_{X_1}}{p-1}$	$F_{p-1, (p-1)(p-2)} = \frac{SS_{X_1} (p-2)}{SS_E}$
Poziomy czynnik X_2 (efekt wiersza)	$SS_{X_2} = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p y_{.j.}^2 - \left(\frac{y_{...}}{p} \right)^2$	$p-1$	$\frac{SS_{X_2}}{p-1}$	$F_{p-1, (p-1)(p-2)} = \frac{SS_{X_2} (p-2)}{SS_E}$
Poziomy czynnik X_3 (efekt kolumny)	$SS_{X_3} = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p y_{..k}^2 - \left(\frac{y_{...}}{p} \right)^2$	$p-1$	$\frac{SS_{X_3}}{p-1}$	$F_{p-1, (p-1)(p-2)} = \frac{SS_{X_3} (p-2)}{SS_E}$
Błąd eksperymentalny	$SS_E = SS_C - SS_{X_1} - SS_{X_2} - SS_{X_3}$	$(p-1) \cdot (p-2)$	$\frac{SS_E}{(p-1)(p-2)}$	–
Zmienność całkowita	$SS_C = \sum_{i,j,k} y_{ijk}^2 - \left(\frac{y_{...}}{p} \right)^2$	p^2-1	–	–

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: Wawrzynek (2009).

W uzasadnionych przypadkach należy zweryfikować istotność efektów wierszowych (czynnika X_2) oraz efektów kolumnowych (czynnika X_3) poprzez weryfikację hipotez określonych odpowiednio dla czynnika X_2 :

$$H_0^{X_2} : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_p = 0 \quad (2.18)$$

$$H_1^{X_2} : \exists_j \beta_j \neq 0 \quad (2.19)$$

oraz dla czynnika X_3 :

$$H_0^{X_3} : \gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_p = 0 \quad (2.20)$$

$$H_1^{X_3} : \exists_k \gamma_k \neq 0. \quad (2.21)$$

Wówczas, jeżeli wartość statystyki testowej $F_{p-1,(p-1)(p-2)} = \frac{SS_{X_2}(p-2)}{SS_E}$ lub sta-

tystyki $F_{p-1,(p-1)(p-2)} = \frac{SS_{X_3}(p-2)}{SS_E}$ przekracza wartość krytyczną wyznaczoną

z rozkładu Fishera-Snedecora dla $p-1$ oraz $(p-1)(p-2)$ stopni swobody, to należy odrzucić hipotezy (2.18) lub (2.20) na korzyść odpowiadających im hipotez alternatywnych (2.19) lub (2.21).

W eksperymencie zaplanowanym zgodnie z kwadratem grecko-łacińskim uwzględniane są cztery czynniki X_1, X_2, X_3, X_4 z jednakową liczbą poziomów p każdy. Czynniki X_1, X_2 są nazywane czynnikami głównymi, natomiast czynniki X_3, X_4 odpowiednio czynnikiem wierszowym i czynnikiem kolumnowym. W kwadracie grecko-łacińskim dany poziom i czynnika X_j występuje tylko jeden raz z każdym z p poziomów dowolnego z trzech pozostałych czynników. Stąd liczba doświadczeń wynosi $n = p^2$. Poziomy czynników głównych X_1 oraz X_2 oznacza się odpowiednio kolejnymi literami alfabetu łacińskiego oraz greckiego. Przykład kwadratu grecko-łacińskiego dla $p = 4$ przedstawia tabela 2.8.

Tabela 2.8. Kwadrat grecko-łaciński dla $p = 4$

Poziom czynnik X_3	Poziom czynnik X_4			
	$x_1^{(4)}$	$x_2^{(4)}$	$x_3^{(4)}$	$x_4^{(4)}$
$x_1^{(3)}$	C γ	A α	D δ	B β
$x_2^{(3)}$	D β	B δ	C α	A γ
$x_3^{(3)}$	A δ	C β	B γ	D α
$x_4^{(3)}$	B α	D γ	A β	C δ

Źródło: Opracowanie własne.

Celem eksperymentu przeprowadzonego zgodnie z kwadratem grecko-łacińskim jest określenie wpływu rozważanych czynników na zmienną objaśnianą Y . Analiza wyników zrealizowanego eksperymentu przeprowadzana jest zgodnie ze schematem analizy wariancji, podobnie jak w przypadku planu eksperymentu utworzonego zgodnie z kwadratem łacińskim.

2.2. Charakterystyka wybranych planów eksperymentów czynnikowych

Klasyczne plany eksperymentów przedstawione w poprzednim podrozdziale uwzględniały niewielką liczbę czynników, a ich analiza prowadziła do stwierdzenia czy rozważane czynniki mają istotny wpływ na wartość zmiennej obja-

śnianej Y . Niejednokrotnie realizacja eksperymentów wymaga uwzględnienia większej liczby czynników, a uzyskane wyniki powinny pozwolić na przeprowadzenie bardziej złożonej analizy badanego zjawiska.

W niniejszym podrozdziale przedmiotem badania będzie analiza wpływu m czynników $X_1, X_2, \dots, X_m$ na zmienną objaśnianą Y . Ponadto w przedstawionych rozważaniach zakłada się, że każdy z czynników $X_1, X_2, \dots, X_m$ występuje na skończonej liczbie poziomów odpowiednio $p_1, p_2, \dots, p_m$. Wówczas zależność zmiennej wynikowej od uwzględnianych czynników można określić za pomocą nieznanej funkcji powierzchni odpowiedzi, która jest elementem klasy funkcji postaci (1.5). W szczególności elementami klasy funkcji (1.5) są wielomiany stopnia 1 oraz stopnia 2 zmiennych objaśniających $X_1, X_2, \dots, X_m$ (Wawrzynek, 2009). W celu oszacowania nieznanej postaci funkcji powierzchni odpowiedzi eksperyment powinien obejmować co najmniej tyle doświadczeń, ile parametrów uwzględnia dana funkcja powierzchni odpowiedzi. Jeżeli zatem rozważana jest funkcja powierzchni odpowiedzi, będąca wielomianem 1 stopnia, to w eksperymencie powinny być uwzględnione czynniki występujące co najmniej na dwu poziomach. Rozważając wielomian stopnia 2, eksperyment powinien uwzględniać czynniki ustalane przynajmniej na trzech poziomach. W szczególnych przypadkach w eksperymencie można uwzględniać czynniki występujące na różnej liczbie poziomów.

2.2.1. Całkowity eksperyment czynnikowy typu 2^m

Eksperyment realizowany zgodnie z planem całkowitego eksperymentu czynnikowego typu 2^m uwzględnia m czynników $X_1, X_2, \dots, X_m$, z których każdy występuje na dwóch poziomach. Ustalone dwa poziomy każdego z czynników $X_1, X_2, \dots, X_m$ określa się jako poziom górny czynnika X_1 oraz poziom dolny czynnika X_i , dla $i = 1, 2, \dots, m$. Dla określenia poziomów czynników w poszczególnych doświadczeniach wykorzystuje się odpowiednią notację, w której liczbą +1 (lub symbolem „+”) oznaczany jest poziom górny danego czynnika, a liczbą -1 (lub symbolem „-”) – poziom dolny danego czynnika. W celu realizacji całkowitego eksperymentu czynnikowego typu 2^m należy przeprowadzić doświadczenia dla wszystkich 2^m kombinacji poziomów czynników $X_1, X_2, \dots, X_m$.

Plan całkowitego eksperymentu czynnikowego typu 2^m zazwyczaj wykorzystywany jest w celu estymacji parametrów nieznanej funkcji powierzchni odpowiedzi, będącej wielomianem stopnia pierwszego, postaci:

$$\begin{aligned} \tilde{y}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}) = & \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_m x_m + \beta_{12} x_1 x_2 + \dots + \beta_{m-1\ m} x_{m-1} x_m + \\ & + \beta_{123} x_1 x_2 x_3 + \dots + \beta_{m-2\ m-1\ m} x_{m-2} x_{m-1} x_m + \dots + \beta_{12\dots m} x_1 x_2 \dots x_m. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Współczynniki $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ funkcji powierzchni odpowiedzi (2.22) nazywane są efektami głównymi czynników $X_1, X_2, \dots, X_m$. Pozostałe współczynniki funkcji (2.22) określa się interakcjami ustalonych czynników. W szczególności współczynnik β_{12} jest interakcją czynników X_1 i X_2 , a współczynnik $\beta_{m-2\ m-1\ m}$ oznacza interakcję trzech czynników: X_{m-2}, X_{m-1}, X_m .

W uzasadnionych przypadkach zakłada się, że niektóre z interakcji czynników funkcji powierzchni odpowiedzi (2.22) są równe 0. Zatem przyjmując założenie, że interakcje co najmniej czwartego rzędu czynników $X_1, X_2, \dots, X_m$ nie są istotne, funkcja powierzchni odpowiedzi wyraża się równaniem:

$$\begin{aligned} \tilde{y}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}) = & \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_m x_m + \beta_{12} x_1 x_2 + \dots + \\ & + \beta_{m-1\ m} x_{m-1} x_m + \beta_{123} x_1 x_2 x_3 + \dots + \beta_{m-2\ m-1\ m} x_{m-2} x_{m-1} x_m. \end{aligned} \quad (2.23)$$

W szczególności, zakładając, że wszystkie możliwe współczynniki odpowiadające interakcjom czynników $X_1, X_2, \dots, X_m$ są równe 0, funkcja powierzchni odpowiedzi przyjmuje postać:

$$\tilde{y}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_m x_m, \quad (2.24)$$

gdzie uwzględniane są tylko współczynniki odpowiadające efektom głównym czynników $X_1, X_2, \dots, X_m$ oraz wyraz wolny.

Schemat planu całkowitego eksperymentu czynnikowego typu 2^m najczęściej przedstawiany jest w postaci tabeli zawierającej opis poszczególnych doświadczeń. Dla każdego doświadczenia poziomy ustalonych czynników określone są za pomocą odpowiednich oznaczeń: liczb +1 i -1 (lub symboli „+” i „-”). Ponadto przyjmuje się, że każdemu czynnikowi odpowiada kolejna litera alfabetu. Wówczas każdemu z doświadczeń przypisuje się sekwencję liter odpowiadających czynnikom, które w danym doświadczeniu występują na poziomie górnym, natomiast pomija się oznaczenia czynników znajdujących się na poziomie dolnym. Doświadczenie, w którym wszystkie czynniki występują na dolnym poziomie, oznacza się symbolem „(1)” lub „I”. W poszczególnych kolumnach tabeli znajdują się kolejno: oznaczenie doświadczenia, wartości zmiennej $X_0 \equiv 1$ stale równej „+” oraz wartości czynników lub ich interakcji odpowiadające jednomianom rozważanej funkcji powierzchni odpowiedzi. Należy zauważyć, że wartości w kolumnach dotyczących interakcji czynników stanowią wynik iloczynu wartości czynników uwzględnionych w danych interakcjach.

Niech eksperyment uwzględnia $m = 3$ czynniki X_1, X_2, X_3 występujące na dwóch poziomach. Wówczas można określić całkowity eksperyment czynnikowy

typu 2^3 , który pozwala na estymację parametrów nieznannej funkcji powierzchni odpowiedzi postaci:

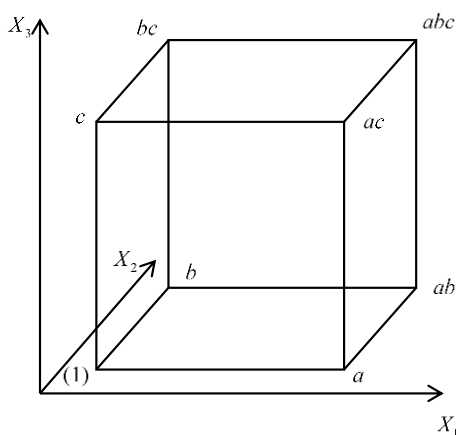
$$\begin{aligned}\tilde{y}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}) = & \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_{12} x_1 x_2 + \\ & + \beta_{13} x_1 x_3 + \beta_{23} x_2 x_3 + \beta_{123} x_1 x_2 x_3.\end{aligned}\quad (2.25)$$

Plan całkowitego eksperymentu czynnikowego typu 2^3 przedstawia tabela 2.9. Poza przedstawieniem w tabeli poszczególnych doświadczeń w całkowitym eksperymencie czynnikowym typu 2^m , można wykorzystać również jego prezentację graficzną. Plan całkowitego eksperymentu czynnikowego może być utożsamiany z wierzchołkami kostki m -wymiarowej (Wawrzynek, 2009). W szczególności plan całkowitego eksperymentu czynnikowego typu 2^3 można przedstawić w postaci trójwymiarowej kostki, gdzie każdy z jej wierzchołków odpowiada jednemu z ośmiu doświadczeń, co prezentuje rysunek 2.1.

Tabela 2.9. Całkowity eksperyment czynnikowy typu 2^3

Lp.	Oznaczenie doświadczenia	$X_0 \equiv 1$	X_1	X_2	X_3	$X_1 X_2$	$X_1 X_3$	$X_2 X_3$	$X_1 X_2 X_3$
1	(1)	+	−	−	−	+	+	+	−
2	<i>A</i>	+	+	−	−	−	−	+	+
3	<i>B</i>	+	−	+	−	−	+	−	+
4	<i>C</i>	+	−	−	+	+	−	−	+
5	<i>Ab</i>	+	+	+	−	+	−	−	−
6	<i>Ac</i>	+	+	−	+	−	+	−	−
7	<i>Bc</i>	+	−	+	+	−	−	+	−
8	<i>Abc</i>	+	+	+	+	+	+	+	+

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: Wawrzynek (2009).



Rysunek 2.1. Plan całkowitego eksperymentu czynnikowego typu 2^3

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: Montgomery (2013).

Na podstawie wyników doświadczeń zrealizowanych zgodnie z planem całkowitego eksperymentu czynnikowego typu 2^m , można oszacować parametry nieznanej funkcji powierzchni odpowiedzi postaci (2.22), wykorzystując metodę najmniejszych kwadratów (Wawrzynek, 1993). Wtedy elementy macierzy $\mathbf{F}$ postaci (1.10) przyjmują wartości odpowiednio:

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}) &\equiv 1, \\ f_2(\mathbf{x}) &= x_1, \\ &\dots \\ f_m(\mathbf{x}) &= x_{m-1}, \\ f_{m+1}(\mathbf{x}) &= x_m, \\ f_{m+2}(\mathbf{x}) &= x_1 x_2, \\ &\dots \\ f_{2^m}(\mathbf{x}) &= x_1 x_2 \dots x_m. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Zgodnie z przyjętymi wartościami $+1$ oraz -1 poziomów czynników można zauważyć, że dla planu całkowitego eksperymentu czynnikowego typu 2^m spełnione są równania:

$$\sum_{j=1}^n f_i(x_j) = 0, \text{ dla } i = 2, \dots, k, \tag{2.27}$$

$$\sum_{j=1}^n f_i^2(x_j) = n, \text{ dla } i = 1, 2, \dots, k, \tag{2.28}$$

$$\sum_{j=1}^n f_i(x_j) f_l(x_j) = 0, \text{ dla } i \neq l. \tag{2.29}$$

Równość (2.27) mówi o tym, że w każdej kolumnie całkowitego planu eksperymentu czynnikowego typu 2^m wartości sumują się do 0 (poza kolumną $X_0 \equiv 1$), natomiast równość (2.28) informuje, że kwadraty wartości w kolumnach sumują się do $n = 2^m$. Ponadto iloczyny skalarne dwóch dowolnych kolumn planu typu 2^m są równe 0, o czym informuje równość (2.29). Stąd $\mathbf{F}^T \mathbf{F} = n \mathbf{I}$. Zgodnie z metodą najmniejszych kwadratów można wyznaczyć postać estymatora parametrów nieznanej funkcji powierzchni odpowiedzi następująco:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{y} = \frac{1}{n} \mathbf{F}^T \mathbf{y}. \tag{2.30}$$

Zatem wyraz wolny funkcji powierzchni odpowiedzi (2.22) jest postaci:

$$\hat{\beta}_0 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j. \quad (2.31)$$

Pozostałe parametry funkcji powierzchni odpowiedzi (2.22) można oszacować zgodnie z poniższym wzorem:

$$\hat{\beta}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f_i(\mathbf{x}_j) y_j. \quad (2.32)$$

Oznacza to, że parametry funkcji powierzchni odpowiedzi postaci (2.22) stanowią kombinację liniową wartości $y_1, y_2, \dots, y_n$ zmiennej wynikowej uzyskanych w poszczególnych doświadczeniach. Macierz kowariancji estymatora parametrów funkcji powierzchni odpowiedzi (2.30) wyraża się wzorem:

$$\text{cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2 (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1} = \frac{\sigma^2}{n} \mathbf{I}. \quad (2.33)$$

Zatem macierz (2.33) jest macierzą diagonalną, co oznacza, że estymatory parametrów funkcji (2.22) dane wzorem (2.30) nie są wzajemnie skorelowane, a ponadto jeżeli $\varepsilon_j \sim N(0, \sigma)$, dla $j = 1, 2, \dots, n$, to estymatory $\hat{\beta}_i$, ($i = 1, 2, \dots, k$) są niezależne (Wawrzynek, 2009).

Analiza wyników przeprowadzonego eksperymentu sprowadza się do analizy wariancji oraz zbadania własności oszacowanej funkcji powierzchni odpowiedzi. Ogólny schemat analizy wariancji efektów głównych i interakcji dla całkowitego planu eksperymentu czynnikowego typu 2^m przedstawia się w postaci tabeli, która zazwyczaj wyznaczana jest z wykorzystaniem odpowiedniego oprogramowania komputerowego (por. Montgomery, 2013).

Jeżeli w całkowitym eksperymencie czynnikowym typu 2^m liczba uwzględnianych czynników wzrasta, to liczba realizowanych doświadczeń rośnie. Wówczas w celu zredukowania liczby doświadczeń można rozważać funkcje powierzchni odpowiedzi, na przykład postaci (2.23) lub (2.24), które nie uwzględniają ustalonych interakcji czynników. Ponadto poszukuje się takich planów eksperymentów, które przy znacznie mniejszej liczbie doświadczeń pozwalają na estymację parametrów ustalonej funkcji powierzchni odpowiedzi. Plany te nazywane są planami ułamkowych eksperymentów czynnikowych typu 2^{m-k} , a ich konstrukcja opiera się na schemacie planów całkowitych eksperymentów czynnikowych typu 2^m .

2.2.2. Ułamkowy eksperyment czynnikowy typu 2^{m-k}

Ułamkowy eksperyment czynnikowy typu 2^{m-k} uwzględnia m czynników, które występują na dwóch poziomach: górnym lub dolnym. Poziomy rozważanych czynników, podobnie jak w przypadku całkowitego eksperymentu czynnikowego typu 2^m , oznacza się liczbami +1 (poziom górny) oraz -1 (poziom dolny). Plan ułamkowego eksperymentu czynnikowego typu 2^{m-k} obejmuje $n = 2^{m-k}$ doświadczeń, gdzie $0 < k < m$. Liczba naturalna k ustalana jest tak, aby liczba realizowanych doświadczeń pozwoliła na estymację wszystkich parametrów rozważanej funkcji powierzchni odpowiedzi. Plan ułamkowego eksperymentu czynnikowego typu 2^{m-k} konstruowany jest na podstawie planu całkowitego eksperymentu czynnikowego typu 2^l , dla $l = m - k$, a procedura jego wyznaczania jest uzależniona od postaci ustalonej funkcji powierzchni odpowiedzi.

Jeżeli w eksperymencie rozważana jest funkcja powierzchni odpowiedzi nieuwzględniająca interakcji czynników postaci (2.24), to eksperyment powinien obejmować $n = 2^{m-k}$ doświadczeń, tak aby możliwa była estymacja wszystkich parametrów funkcji (2.24), czyli tak, aby spełniony był warunek $n = 2^{m-k} > m$. Wówczas plan eksperymentu ułamkowego konstruowany jest na podstawie całkowitego planu eksperymentu typu 2^l , gdzie $l = m - k$. Kolejne kolumny tabeli ułamkowego eksperymentu czynnikowego typu 2^{m-k} to kolumny zawierające oznaczenie doświadczenia, wartości zmiennej $X_0 \equiv 1$ oraz wartości czynników $X_1, X_2, \dots, X_l$. Wartości pozostałych k czynników $X_{m-k+1}, X_{m-k+2}, \dots, X_m$ wyznacza się na podstawie dowolnie wybranych k kolumn, które odpowiadają interakcjom czynników.

Niech eksperyment uwzględnia trzy czynniki X_1, X_2, X_3 występujące na dwóch poziomach każdy oraz funkcję powierzchni odpowiedzi postaci:

$$\tilde{y}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3. \quad (2.34)$$

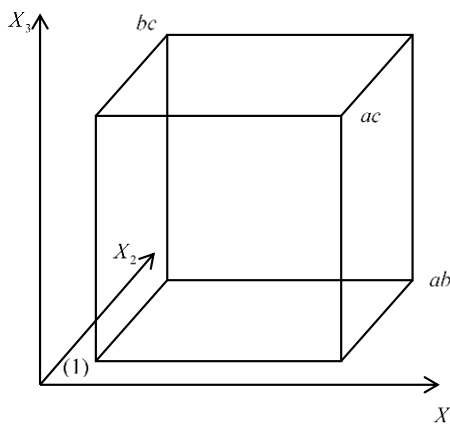
Wtedy całkowity eksperyment czynnikowy typu 2^m wymaga przeprowadzenia $n = 2^3 = 8$ doświadczeń. Wykorzystując tabelę 2.9, można wyznaczyć plan ułamkowego eksperymentu czynnikowego typu 2^{3-1} , który wymaga przeprowadzenia $n = 2^{3-1} = 4$ doświadczeń. Ponadto plan ten spełnia warunek $2^{m-k} = 2^{3-1} > 3 = m$, zatem pozwala na estymację wszystkich parametrów funkcji (2.34). Zgodnie z procedurą wyznaczania planu ułamkowego typu 2^{m-k} , poza kolumnami z oznaczeniem doświadczenia i z wartościami zmiennej pozornej, w tabeli tworzonego planu znajdują się kolumny wartości $l = 3 - 1 = 2$ czynników X_1, X_2 oraz $k = 1$ kolumn z ustalonymi (dowolnie wybranymi) interakcjami czynników. Jeden z możliwych ułamkowych planów eksperymentów dla powyższych założeń

przedstawia tabela 2.10. Alternatywnym planem ułamkowym typu 2^{3-1} dla planu przedstawionego w tabeli 2.10 jest plan, którego kolumna zawierająca wartości interakcji zostaje pomnożona przez wartość -1 (Wawrzynek, 2009). Graficzną prezentację ułamkowego eksperymentu czynnikowego typu 2^{3-1} przedstawiono w tabeli 2.10 zaprezentowano na rysunku 2.2.

Tabela 2.10. Ułamkowy eksperyment czynnikowy typu 2^{3-1}

Lp.	Oznaczenie doświadczenia	$X_0 \equiv 1$	X_1	X_2	$X_3 (\equiv X_1 X_2 X_3)$
1	(1)	+	–	–	–
2	ac	+	+	–	+
3	bc	+	–	+	+
4	ab	+	+	+	–

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: Wawrzynek (2009).



Rysunek 2.2. Plan ułamkowego eksperymentu czynnikowego typu 2^{3-1}

Źródło: Opracowanie własne.

Rozważając funkcję powierzchni odpowiedzi, która uwzględnia interakcje czynników ustalonego rzędu, czyli odpowiednio zredukowaną funkcję postaci (2.22), na podstawie całkowitego planu czynnikowego typu 2^m , można utworzyć podobnie plan ułamkowego eksperymentu czynnikowego typu 2^{m-k} . Przy czym należy zwrócić szczególną uwagę na odpowiednie ustalanie poszczególnych kolumn planu dla uwzględnianych interakcji czynników (Wawrzynek, 2009). Metody konstrukcji i układy doświadczeń dla ułamkowych eksperymentów czynnikowych typu 2^{m-k} , dla różnych postaci funkcji powierzchni odpowiedzi są licznie przedstawiane w literaturze (por. Wawrzynek, 1993, 2009; Antony, 2003; Montgomery, 2013).

Estymacja parametrów funkcji powierzchni odpowiedzi na podstawie wyników doświadczeń realizowanych zgodnie z planem ułamkowego eksperymentu czynnikowego typu 2^{m-k} przebiega analogicznie jak w przypadku zastosowania całkowitego eksperymentu czynnikowego typu 2^m . Zatem wartości estymatorów są odpowiednimi kombinacjami liniowymi wartości $y_1, y_2, \dots, y_n$ zmiennej wynikowej (Wawrzynek, 1993, 2009). Ponadto analiza wariancji otrzymanych rezultatów eksperymentu przeprowadzana jest podobnie jak w przypadku całkowitych eksperymentów czynnikowych typu 2^m (por. Montgomery, 2013).

2.2.3. Całkowity eksperyment czynnikowy typu 3^m i jego modyfikacje

Plan całkowitego eksperymentu czynnikowego typu 3^m uwzględnia m czynników $X_1, X_2, \dots, X_m$ występujących na trzech poziomach: górnym – oznaczanym symbolem „+” lub liczbą 1, środkowym – oznaczanym liczbą 0, oraz dolnym – oznaczanym symbolem „-” lub liczbą -1. Całkowity eksperyment czynnikowy typu 3^m obejmuje $n = 3^m$ doświadczeń określonych dla wszystkich możliwych kombinacji poziomów czynników $X_1, X_2, \dots, X_m$. Zazwyczaj całkowite eksperymenty typu 3^m wykorzystywane są w celu estymacji funkcji powierzchni odpowiedzi, będącej wielomianem drugiego stopnia postaci:

$$\begin{aligned} \tilde{y}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}) = & \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_m x_m + \beta_{12} x_1 x_2 + \dots + \\ & + \beta_{m-1m} x_{m-1} x_m + \beta_{11} x_1^2 + \beta_{22} x_2^2 + \dots + \beta_{mm} x_m^2. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Schemat realizacji doświadczeń rozważanego planu przedstawiany jest w postaci tabeli, w której początkowe kolumny zawierają kolejno: odpowiednie oznaczenie doświadczenia, wartości zmiennej pozornej oraz wartości poziomów czynników $X_1, X_2, \dots, X_m$. W następnych kolumnach wyznacza się wartości pozostałych interakcji czynników postaci $X_1 X_2, \dots, X_{m-1} X_m$ oraz $X_1^2, X_2^2, \dots, X_m^2$.

Jeżeli w eksperymencie rozważane są $m = 2$ czynniki występujące na trzech poziomach, to całkowity eksperyment czynnikowy typu 3^2 pozwala na estymację funkcji powierzchni odpowiedzi postaci:

$$\tilde{y}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{11} x_1^2 + \beta_{22} x_2^2. \quad (2.36)$$

W przypadku oznaczania poszczególnych doświadczeń w planie eksperymentu typu 3^m wykorzystuje się podobne podejście jak w przypadku planów eksperymentów czynnikowych typu 2^m . Poszczególnym doświadczeniom przypisywana jest sekwencja liter, które odpowiadają poziomom występowania czynników.

Jeżeli w doświadczeniu dany czynnik ustalony jest na poziomie górnym, to litera alfabetu odpowiadająca temu czynnikowi występuje w potęgze drugiej. Gdy w danym doświadczeniu czynnik występuje na poziomie środkowym, to litera alfabetu, która mu odpowiada, jest zapisywana w potęgze pierwszej. Jeśli w doświadczeniu czynnik występuje na poziomie dolnym, to odpowiadająca mu litera alfabetu jest pomijana w oznaczeniu doświadczenia. Zgodnie z przyjętymi regułami oznaczeń, plan realizacji doświadczeń całkowitego eksperymentu czynnikowego typu 3^2 można przedstawić w postaci tabeli 2.11.

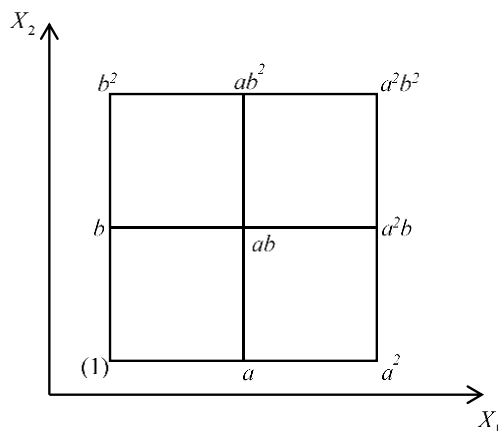
Tabela 2.11. Plan całkowitego eksperymentu czynnikowego typu 3^2

Lp.	Oznaczenie doświadczenia	$X_0 \equiv 1$	X_1	X_2	$X_1 X_2$	X_1^2	X_2^2
1	(1)	+	–	–	+	+	+
2	a	+	0	–	0	0	+
3	a^2	+	+	–	–	+	+
4	b	+	–	0	0	+	0
5	ab	+	0	0	0	0	0
6	$a^2 b$	+	+	0	0	+	0
7	b^2	+	–	+	–	+	+
8	ab^2	+	0	+	0	0	+
9	$a^2 b^2$	+	+	+	+	+	+

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: Wawrzynek (2009).

Plan całkowitego eksperymentu czynnikowego typu 3^m można również przedstawić w postaci graficznej jako zbiór odpowiednich punktów m -wymiarowej kostki. Graficzną prezentację planu zamieszczonego w tabeli 2.11 przedstawia rysunek 2.3.

Należy zauważyć, że plany całkowitych eksperymentów czynnikowych typu 3^m nie spełniają równości (2.29), w szczególności dla eksperymentu typu 3^2 (tabela 2.11) iloczyn skalarny kolumn X_1^2 oraz X_2^2 lub kolumn $X_0 \equiv 1$ oraz X_2^2 jest dodatni. Zatem wyznaczenie ogólnej postaci estymatorów parametrów funkcji powierzchni odpowiedzi postaci (2.35) z wykorzystaniem metody najmniejszych kwadratów jest bardziej złożone niż w przypadku eksperymentów typu 2^m (Wawrzynek, 2009).



Rysunek 2.3. Schemat planu całkowitego eksperymentu czynnikowego typu 3^2

Źródło: Opracowanie własne.

Liczba doświadczeń w eksperymentach typu 3^m , wraz ze wzrostem liczby uwzględnianych czynników, gwałtownie rośnie. Zatem uzasadnione jest poszukiwanie takich planów eksperymentów czynnikowych, które przy zadanej liczbie czynników na trzech poziomach pozwolą jednocześnie na redukcję liczby doświadczeń i umożliwią estymację wszystkich parametrów zadanej funkcji powierzchni odpowiedzi. Wtedy zazwyczaj konstruowane są ułamkowe eksperymenty czynnikowe typu 3^{m-k} .

Plan ułamkowego eksperymentu czynnikowego typu 3^{m-k} tworzony jest na podstawie całkowitego eksperymentu typu 3^l , gdzie $l = m - k$ oraz $0 < k < m$. Ponadto liczba k musi spełniać warunek $3^{m-k} \geq \binom{m+2}{2}$, tak aby była możliwa

estymacja wszystkich parametrów zadanej funkcji powierzchni odpowiedzi. Wyznaczenie tabeli planu ułamkowego eksperymentu czynnikowego typu 3^{m-k} , pozwalającego na estymację funkcji powierzchni odpowiedzi postaci (2.35), polega na przeniesieniu kolejnych kolumn tabeli całkowitego eksperymentu typu 3^l oznaczonych jako $X_0 \equiv 1, X_1, X_2, \dots, X_l, X_1 X_2, \dots, X_{l-1} X_l$ oraz $X_1^2, X_2^2, \dots, X_l^2$. Następnie na ich podstawie należy wyznaczyć odpowiednio wartości w kolumnach postaci $X_{m-k+1}, X_{m-k+2}, \dots, X_m, X_{m-k+1} X_{m-k+2}, \dots, X_{m-1} X_m$ oraz w kolumnach $X_{m-k+1}^2, X_{m-k+2}^2, \dots, X_m^2$ (por. Wawrzynek, 2009).

Poza ułamkowymi planami eksperymentów czynnikowych typu 3^{m-k} , w celu zmniejszenia liczby doświadczeń w praktyce wykorzystuje się również centralnie skomponowane plany eksperymentów, nasycone plany eksperymentów oraz plany Boxa-Behnkena dla czynników występujących na trzech poziomach

(por. Mason, Gunst, Hess, 2003; Miszczak, Ostasiewicz, Wawrzynek, 2008; Dean, Voss, Draguljić, 2017). W zastosowaniach dopuszcza się również eksperymenty, które uwzględniają czynniki występujące na niejednakowej liczbie poziomów. Konstrukcja planu eksperymentu dla czynników występujących na różnej liczbie poziomów zazwyczaj wymaga utworzenia pewnej tablicy ortogonalnej (Wawrzynek, 2009). W literaturze przedstawiane są liczne przykłady utworzonych tablic ortogonalnych dla planów eksperymentów z ustaloną liczbą czynników na różnej liczbie poziomów (Hedayat, Sloane, Stufken, 1999; Wawrzynek, 2009; Dean, Voss, Draguljić, 2017). Ponadto niektóre z programów statystycznych pozwalają na wyznaczenie tablic ortogonalnych dla ustalonej liczby czynników i ich poziomów.

Zastosowanie metodologii planowania eksperymentów w różnych obszarach nauki przyczyniły się do poszukiwania alternatywnych rozwiązań w procedurze konstrukcji i analizy wyników planów eksperymentów. Ponadto dynamiczny wzrost mocy obliczeniowej komputerów pozwolił na wykorzystanie specjalistycznego oprogramowania zarówno w projektowaniu eksperymentów, jak i w analizie otrzymanych rezultatów.

W pierwszej części niniejszego rozdziału przedstawiono autorskie propozycje alternatywnych konstrukcji planów eksperymentów czynnikowych. Procedury modyfikacji zostały zaproponowane dla wybranych uwarunkowań realizacji eksperymentów czynnikowych.

Druga część rozdziału została poświęcona zagadnieniom związanym z metodologią funkcji powierzchni odpowiedzi, która stanowi istotną część teorii planowania eksperymentów. Przedstawiono autorską propozycję planu eksperymentu, która uwzględnia nieliniową postać funkcji powierzchni odpowiedzi. Ponadto zaproponowano wykorzystanie metod symulacyjnych pozwalających na oszacowanie postaci funkcji powierzchni odpowiedzi.

W trzeciej części rozdziału podjęto rozważania dotyczące możliwości przeprowadzenia procedury planowania eksperymentów wtedy, gdy założenia klasycznych metod statystycznych nie są spełnione. Zaproponowano alternatywne metody analizy wyników klasycznych eksperymentów, jak również nieklasyczne metody oceny istotności funkcji powierzchni odpowiedzi.

3.1. Alternatywne metody konstrukcji planów eksperymentów czynnikowych

Plany eksperymentów czynnikowych wykorzystywane są w praktyce przedsiębiorstw produkcyjnych związanych z różnymi gałęziami przemysłu. Przyczynia się to do wprowadzania modyfikacji istniejących lub konstruowania nowych

procedur planowania eksperymentów. Wdrażanie nowych rozwiązań w projektowaniu eksperymentów może być związane ze specyfiką rozważanego procesu produkcyjnego lub warunkami realizacji eksperymentu. Ponadto wprowadzenie modyfikacji planów eksperymentów czynnikowych może doprowadzić do ograniczenia lub zmniejszenia kosztów realizacji eksperymentu.

3.1.1. Plan eksperymentu dla czynników nieprecyzyjnie ustalonych

Plany eksperymentów czynnikowych uwzględniają doświadczenia, w których czynniki występują na ustalonej liczbie poziomów. Właściwie przeprowadzony eksperyment wymaga dokładnego ustawienia rozważanych czynników na wskazanych poziomach, dla każdego z realizowanych doświadczeń. Wtedy analiza wyników przeprowadzonego eksperymentu jest wiarygodna i prowadzi do sformułowania właściwych zaleceń dla procesu produkcyjnego. Uzyskanie dokładnych ustawień poziomów czynników w realizowanych doświadczeniach wiąże się z koniecznością utrzymania procesu produkcyjnego w ściśle określonych warunkach. W praktyce nie zawsze jest to możliwe. Przyczyny nieprecyzyjnego ustalenia poziomów czynników mogą być związane z warunkami, w jakich przeprowadzany jest eksperyment, jego specyfiką, jak również z niedokładnością stosowanej aparatury.

W literaturze problem nieprecyzyjnie ustalonych poziomów czynników zazwyczaj rozważany jest w kontekście oceny efektu wpływu błędów na własności oszacowanej funkcji powierzchni odpowiedzi (Box, 1963; Donev, 2004). Ponadto analizy planów eksperymentów czynnikowych, dla których uzyskanie dokładnych wartości poziomów czynników nie jest możliwe, dotyczą oceny optymalności planu eksperymentu (Draper, Beggs, 1971; Donev, 2004).

D.C. Montgomery (2013), w przypadku uzyskania niedokładnych wartości poziomów czynników uwzględnianych w eksperymencie, wskazuje na możliwość wykorzystania analizy regresji. Wówczas w celu oszacowania postaci funkcji powierzchni odpowiedzi uwzględniane są wartości poziomów czynników wyznaczone na podstawie ich rzeczywistych pomiarów. Oszacowania te są możliwe wtedy, gdy wartości górnego i dolnego poziomu czynnika są ściśle ustalone. Jeżeli okoliczności realizacji eksperymentu prowadzą do nieprecyzyjnych wartości czynników w każdym doświadczeniu, to ustalenie górnego i dolnego poziomu czynnika może być niewłaściwe. Wówczas można wykorzystać oszacowanie górnych i dolnych poziomów czynników zaproponowane przez M. Szerszunowicz (2011).

Niech dany będzie proces produkcyjny, którego realizacja przebiega w niestabilnych warunkach. W celu określenia wpływu czynników $X_1, X_2, \dots, X_m$ na zmienną Y , charakteryzującą badany proces, zaproponowano przeprowadzenie całkowitego eksperymentu czynnikowego typu 2^m . Przy czym zauważono, że zmienne warunki realizacji eksperymentu nie pozwalają na uzyskanie precyzyjnych wartości czynników w poszczególnych doświadczeniach. Wtedy procedura realizacji całkowitego eksperymentu czynnikowego typu 2^m jest możliwa (doświadczenia mogą być zrealizowane zgodnie z planem typu 2^m), natomiast analiza wyników eksperymentu w takiej sytuacji będzie prowadzić do niewłaściwych wniosków. W trakcie realizacji doświadczeń należy każdorazowo dokonać pomiaru poziomów czynników. Wówczas, zgodnie z propozycją M. Szerszunowicz (2011), wartości poziomów czynników $X_1, X_2, \dots, X_m$ można określić symbolicznie jako $x_{i1}^+, x_{i2}^+, \dots, x_{ik}^+, x_{i1}^-, x_{i2}^-, \dots, x_{ik}^-$, gdzie x_{ij}^+, x_{ij}^- oznaczają wartości czynnika X_i odpowiednio na poziomie górnym lub dolnym, uzyskane w j -tym doświadczeniu, dla $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, k$ oraz $k = 2^{m-1}$. Plan tego eksperymentu, wraz z wartościami zmiennej wynikowej uzyskanymi w doświadczeniach, można przedstawić w postaci tabeli 3.1.

Tabela 3.1. Schemat planu eksperymentu z nieprecyzyjnymi poziomami czynników

Numer doświadczenia	X_1	X_2		X_m	Y
1	x_{11}^+	x_{21}^+	...	x_{m1}^+	y_1
2	x_{12}^+	x_{21}^-	...	x_{m1}^-	y_2
...	...	...	...	...	...
K	x_{1k}^+	$x_{2\ k/2}^-$	...	$x_{m\ k/2}^-$	y_k
$k+1$	x_{11}^-	$x_{2\ k/2+1}^+$	...	$x_{m\ k/2+1}^+$	y_{k+1}
...	...	...	...	...	...
$2k$	x_{1k}^-	x_{2k}^-	...	x_{mk}^-	y_{2k}

Źródło: Opracowanie własne.

W celu przeprowadzenia analizy wyników całkowitego eksperymentu czynnikowego typu 2^m , w przypadku wystąpienia nieprecyzyjnych poziomów czynników, M. Szerszunowicz (2011) proponuje oszacowanie wartości poziomów górnych i dolnych czynników uwzględnianych w eksperymencie. Wtedy poziom górny x_i^+ i dolny x_i^- czynnika X_i można oszacować zgodnie z poniższymi wzorami:

$$x_i^+ = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k x_{ij}^+, \quad (3.1)$$

$$x_i^- = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k x_{ij}^-. \quad (3.2)$$

Uzyskane oszacowania poziomów poszczególnych czynników pozwalają na przeprowadzenie analizy wyników całkowitego eksperymentu czynnikowego typu 2^m . W szczególności możliwe jest oszacowanie parametrów nieznanej funkcji powierzchni odpowiedzi postaci:

$$y(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k + \varepsilon. \quad (3.3)$$

Analizę regresji można wówczas przeprowadzić uwzględniając oszacowane wartości poziomów czynników postaci (3.1) i (3.2) (oznaczane odpowiednio symbolami „1” i „-1”). Ponadto w analizie regresji można uwzględnić wartości czynników wyznaczonych dla każdego z doświadczeń za pomocą wzorów (por. Montgomery, 2013):

$$\hat{x}_{ij}^+ = \frac{x_{ij}^+ - (x_i^+ + x_i^-) / 2}{(x_i^+ - x_i^-) / 2}, \quad (3.4)$$

$$\hat{x}_{ij}^- = \frac{x_{ij}^- - (x_i^+ + x_i^-) / 2}{(x_i^+ - x_i^-) / 2}, \quad (3.5)$$

gdzie:

- x_{ij}^+ – rzeczywista wartość czynnika X_i ustalonego na górnym poziomie w j -tym doświadczeniu,
- x_{ij}^- – rzeczywista wartość czynnika X_i ustalonego na dolnym poziomie w j -tym doświadczeniu,
- x_i^+ – oszacowana wartość czynnika X_i ustalonego na górnym poziomie,
- x_i^- – oszacowana wartość czynnika X_i ustalonego na dolnym poziomie.

M. Szerszunowicz (2011) zauważa ponadto, że dla ustalonej wartości $\tilde{x}$ czynnika X_i oraz wartości $x_\alpha \in \{x_{i1}^-, x_{i2}^-, \dots, x_{ik}^-\}$ i $x_\beta \in \{x_{i1}^+, x_{i2}^+, \dots, x_{ik}^+\}$ takich, że $x_\alpha < \tilde{x} < x_\beta$, można oszacować wartość $\tilde{y}$ zmiennej wynikowej Y , wykorzystując interpolację liniową postaci:

$$\tilde{y} = y_\alpha + \frac{(\tilde{x} - x_\alpha)(y_\beta - y_\alpha)}{x_\beta - x_\alpha}, \quad (3.6)$$

gdzie y_α, y_β są wartościami zmiennej wynikowej uzyskanymi w doświadczeniach, w których czynnik X_i występuje na poziomie x_α oraz x_β , odpowiednio.

D.C. Montgomery (2013) rozważa badanie pewnego procesu chemicznego. Celem badania jest analiza wpływu trzech czynników: temperatury (X_1), ciśnienia (X_2) oraz stężenia katalizatora (X_3) na wydajność rozważanego procesu (Y). Przyjęto, że każdy z czynników występuje na dwóch poziomach: górnym i dolnym. Ponadto ustalono funkcję powierzchni odpowiedzi postaci:

$$y(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \varepsilon. \tag{3.7}$$

W związku z tym podjęto decyzję o realizacji kolejnych doświadczeń zgodnie z całkowitym planem eksperymentu czynnikowego typu 2^3 . W trakcie realizacji poszczególnych doświadczeń uzyskanie precyzyjnych ustawień poziomów uwzględnionych czynników okazało się niemożliwe. Wyniki przeprowadzonych doświadczeń przedstawia tabela 3.2 (por. Montgomery, 2013).

Tabela 3.2. Wyniki zrealizowanych doświadczeń w badaniu procesu chemicznego

Numer doświadczenia	Temperatura X_1	Ciśnienie X_2	Stężenie katalizatora X_3	Wydajność Y
1	125	41	14	32
2	158	40	15	46
3	121	82	15	57
4	160	80	15	65
5	118	39	33	36
6	163	40	30	48
7	122	80	30	57
8	165	83	30	68
9	140	60	22,5	50
10	140	60	22,5	44
11	140	60	22,5	53
12	140	60	22,5	56

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: Montgomery (2013).

Przedstawiona w niniejszym rozdziale procedura utworzenia alternatywnego planu eksperymentu pozwala na oszacowanie wartości górnego i dolnego poziomu dla każdego z czynników, zgodnie ze wzorami (3.1) oraz (3.2). Rezultaty obliczeń przedstawia tabela 3.3.

Tabela 3.3. Wartości oszacowanych poziomów czynników

Poziom czynnika	Temperatura X_1	Ciśnienie X_2	Stężenie katalizatora X_3
górny	161,50	81,25	30,75
dolny	121,50	40,00	14,75

Źródło: Opracowanie własne.

Na podstawie ustalonych poziomów czynników można wyznaczyć wartości czynników w poszczególnych doświadczeniach, zgodnie z formułami (3.4) i (3.5). Utworzony alternatywny plan doświadczeń wraz z wartościami zmiennej wynikowej przedstawia tabela 3.4.

Tabela 3.4. Alternatywny plan eksperymentu dla rozważanego procesu chemicznego

Numer doświadczenia	X_1	X_2	X_3	Y
1	-0,825	-0,952	-1,094	32
2	0,825	-1,000	-0,969	46
3	-1,025	1,036	-0,969	57
4	0,925	0,939	-0,969	65
5	-1,175	-1,048	1,281	36
6	1,075	-1,000	0,906	48
7	-0,975	0,939	0,906	57
8	1,175	1,084	0,906	68
9	-0,075	-0,030	-0,031	50
10	-0,075	-0,030	-0,031	44
11	-0,075	-0,030	-0,031	53
12	-0,075	-0,030	-0,031	56

Źródło: Opracowanie własne.

Wykorzystując analizę regresji dla planu przedstawionego w tabeli 3.4, uzyskano oszacowanie funkcji powierzchni odpowiedzi (3.7) postaci:

$$\tilde{y}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}) = 51,25 + 5,41x_1 + 10,48x_2 + 1,14x_3. \quad (3.8)$$

Dla oszacowanego modelu funkcji powierzchni odpowiedzi przeprowadzono analizę wariancji, której wyniki przedstawia tabela 3.5. Wartość statystyki testowej F przekracza wartość krytyczną $F_{0,05;3;8} = 4,07$, zatem na poziomie istotności 0,05 należy odrzucić hipotezę zerową, głoszącą, że parametry oszacowanego modelu są nieistotne. W celu oceny istotności poszczególnych parametrów

modelu (3.8) przeprowadzono testy wykorzystujące statystykę testową t . Wyniki przedstawia tabela 3.6.

Tabela 3.5. Analiza wariancji modelu funkcji powierzchni odpowiedzi postaci (3.8)

Źródło zmienności	Suma kwadratów	Liczba stopni swobody	Średni kwadrat	Statystyka testowa
Model	1153,78	3	384,59	30,10
Reszty modelu	102,22	8	12,78	–
Całkowita zmienność	1256,00	11	–	–

Źródło: Opracowanie własne.

Tabela 3.6. Oszacowanie i istotność parametrów modelu (3.8)

Parametr	Oszacowanie	Statystyka t	p -wartość
β_0	51,25	49,64	0,0000
β_1	5,41	4,32	0,0026
β_2	10,48	8,29	0,00003
β_3	1,14	0,91	0,3889

Źródło: Opracowanie własne.

Na podstawie otrzymanych wyników można stwierdzić, że jedynie stężenie katalizatora (czynnik X_3) nie wpływa istotnie na wartości zmiennej wynikowej. Zatem przedstawiona alternatywna konstrukcja planu eksperymentu czynnikowego, wykorzystująca jednocześnie oszacowania poziomów czynników zaproponowane przez M. Szerszunowicz (2011) oraz oszacowania postaci (3.4), (3.5), pozwoliła na przeprowadzenie właściwej analizy wyników badania wydajności procesu chemicznego.

3.1.2. Plany eksperymentów konstruowane na podstawie wartości pola losowego

Konstrukcja planu eksperymentu wymaga od eksperymentatora właściwego określenia schematu i warunków realizacji doświadczeń. Na ten etap składa się odpowiednie scharakteryzowanie punktów obszaru eksperymentowania. Zgodnie z procedurą planowania eksperymentów poszczególne doświadczenia w ustalonych punktach obszaru eksperymentowania powinny być zrealizowane w sposób losowy (Montgomery, 2013). W zależności od ustalonego planu eksperymentu uwzględniane są wszystkie punkty obszaru eksperymentowania (np. dla całko-

witych eksperymentów czynnikowych) lub ich odpowiednia część (ułamkowe eksperymenty czynnikowe). Niejednokrotnie, ze względu na specyfikę badanego procesu lub zjawiska, przeprowadzenie eksperymentu zgodnie z klasycznym schematem nie jest uzasadnione (może prowadzić do niewiarygodnych wyników) lub nawet nie jest możliwe. Sytuacja taka występuje wtedy, gdy warunki realizacji eksperymentu są zmienne, badane materiały charakteryzują się niejednorodną strukturą lub koszty przeprowadzenia eksperymentu są ograniczone. Wówczas poszukuje się takich planów eksperymentów, które pozwolą na realizację doświadczeń tak, aby możliwa była właściwa analiza otrzymanych wyników. W szczególności M. Szerszunowicz (2014d) przedstawia propozycję konstrukcji planu eksperymentu na podstawie wartości pola losowego.

Niech dana będzie przestrzeń probabilistyczna (Ω, A, P) . Polem losowym n -wymiarowym określaną jest funkcja $U: R^n \times \Omega \rightarrow R^1$, taka że dla każdego $t \in R^n$ odwzorowanie $\omega \mapsto U(t, \omega)$ jest zmienną losową w Ω . Łączna dystrybuenta postaci:

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_m}(u_1, u_2, \dots, u_m) = P(U(t_1) < u_1, U(t_2) < u_2, \dots, U(t_m) < u_m), \quad (3.9)$$

określona dla zmiennych losowych $U(t_1), U(t_2), \dots, U(t_m)$ definiuje n -wymiarowe pole losowe $U(t)$, przy czym $t_1, t_2, \dots, t_m$ są wartościami parametru t . Pole losowe $U(t)$ jest typu ciągłego, jeżeli funkcja $U: R^n \times \Omega \rightarrow R^1$ jest ciągła w $R^n \times \Omega$. Ważnymi wielkościami opisującymi pola losowe są momenty: zwykły oraz centralny. Wyrażenie postaci:

$$\begin{aligned} m_{j_1, j_2, \dots, j_s}(t_1, t_2, \dots, t_s) &= E((U(t_1))^{j_1} (U(t_2))^{j_2} \dots (U(t_s))^{j_s}) = \\ &= \int_{\Omega} (u(t_1))^{j_1} (u(t_2))^{j_2} \dots (u(t_s))^{j_s} dP(u) \end{aligned} \quad (3.10)$$

określa moment zwykły rzędu $j_1 + \dots + j_s$ w punktach $t_1, \dots, t_s$, dla $j_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, s$ oraz $s \geq 1$, gdzie $u(t)$ jest realizacją pola losowego $U(t)$. Moment centralny rzędu $j_1 + \dots + j_s$ w punktach $t_1, \dots, t_s$ dany jest jako:

$$\begin{aligned} \mu_{j_1, j_2, \dots, j_s}(t_1, t_2, \dots, t_s) &= E([U(t_1) - E(U(t_1))]^{j_1} \dots [U(t_s) - E(U(t_s))]^{j_s}) = \\ &= \int_{\Omega} [u(t_1) - E(U(t_1))]^{j_1} \dots [u(t_s) - E(U(t_s))]^{j_s} dP(u) \end{aligned} \quad (3.11)$$

gdzie $j_k > 0, k = 1, 2, \dots, s, s \geq 1$. Dla wartości t_1, t_2 parametru $t \in R^n$ funkcję korelacji pola losowego $U(t)$ w zbiorze $I \subset R^n$ dla $t_1, t_2 \in I$ definiuje się za pomocą wyrażenia:

$$R(U(t_1), U(t_2)) = R(t_1, t_2) = \frac{\text{cov}(U(t_1), U(t_2))}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)}, \quad (3.12)$$

gdzie $\text{cov}(U(t_1), U(t_2))$ oznacza kowariancję zmiennych losowych $U(t_1)$ i $U(t_2)$, natomiast $\sigma^2(t_1)$ i $\sigma^2(t_2)$ odpowiednie wariancje tych zmiennych. Jeżeli funkcja korelacji pola losowego nie zależy od wyboru punktu $t_1 \in R^n$, to pole losowe $U(t)$ nazywane jest polem jednorodnym. Pole losowe $U(t)$ określa się polem stacjonarnym w szerszym sensie, jeżeli dla każdego $t \in R^n$ wartość oczekiwana i wariancja funkcji $U(t)$ przyjmują skończone wartości oraz dla każdych $t_1, t_2 \in R^n$ spełniona jest równość:

$$R(U(t_1), U(t_2)) = R(t_1, t_2) = \overline{R(t_1 t_2)}, \quad (3.13)$$

która oznacza, że funkcja korelacji zależy tylko od wektora $\overline{t_1 t_2}$ łączącego punkty t_1 oraz t_2 . Z kolei pole losowe stacjonarne w szerszym sensie nazywane jest izotropowym, jeśli $R(t_1, s_1) = R(t_2, s_2)$, zakładając, że odległości punktów t_1 i s_1 oraz punktów t_2 i s_2 są równe. Jeżeli rozkłady zmiennych losowych opisujących pole losowe są rozkładami normalnymi, to pole losowe nazywane jest gaussowskim.

Teoria pól losowych znajduje szerokie zastosowanie w statystyce przestrzennej. Należy tutaj wyróżnić modele pól losowych wykorzystywane w badaniach: parametrów złóż geologicznych (np. model Zubrzyckiego), struktury zbiorników wodnych (np. model Wolfcamp) lub jakości powietrza (np. model transportu i dyfuzji zanieczyszczenia gazowego) (Przybycin, 2004). Ponadto E. Szczepankiewicz (1985) przedstawia modele pól losowych, które mogą być wykorzystane w badaniach dotyczących struktury gruntu lub gleby, oceny upraw czy opadów atmosferycznych. Modele pól losowych stosowane są również w badaniach technologicznych dotyczących między innymi oceny wytrzymałości materiałów lub własności procesu filtracji (Szczepankiewicz, 1985). Najczęściej w praktyce w ocenie badanych zjawisk i procesów, ze względu na własności, wykorzystuje się gaussowskie pola losowe (Przybycin, 2004).

M. Szerszunowicz (2014d) proponuje wykorzystanie modeli pól losowych w przypadku eksperymentów dotyczących badania wytrzymałości materiału. Wtedy jeśli $D \subset R^2$ jest częścią materiału, która podlega badaniu, to pole losowe $w(p)$ określone w zbiorze D opisuje jedną z cech wytrzymałościowych badanego materiału w punkcie $p \in D$. Ponadto w ocenie cech wytrzymałościowych materiałów, dla których niemożliwe jest wyróżnienie kierunków zmienności cechy, wykorzystuje się pola losowe stacjonarne w szerszym sensie, izotropowe (Szczepankiewicz, 1985). Niech zbiór D będzie obszarem eksperymentowania. Ponadto zakłada się, że realizacja doświadczeń we wszystkich punktach obszaru D

nie jest możliwa. Wówczas plan eksperymentu może zostać skonstruowany na podstawie wartości pola losowego. Konstrukcję takiego planu doświadczeń można przedstawić w następujących etapach (Szerszunowicz, 2014d):

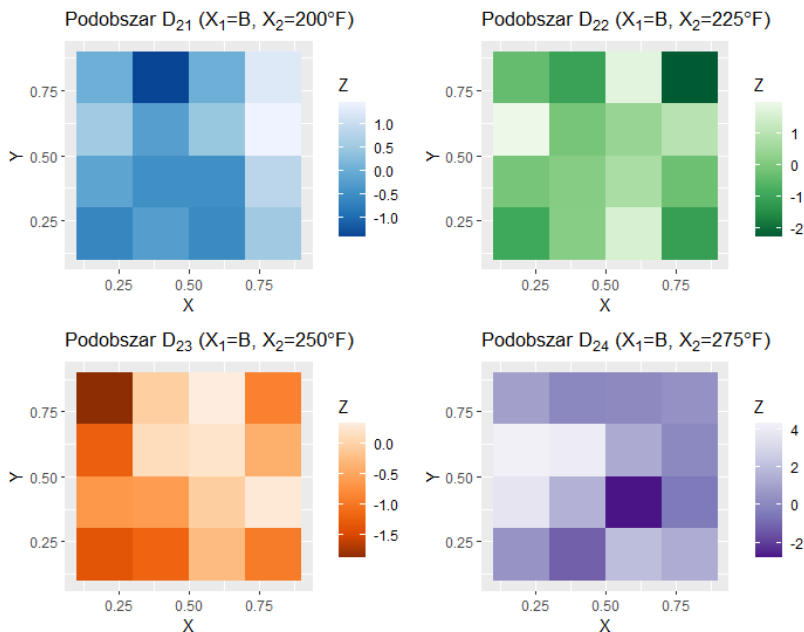
1. Określenie wszystkich możliwych punktów obszaru eksperymentowania.
2. Wyznaczenie wartości pola losowego $w(p)$ dla każdego z określonych punktów obszaru eksperymentowania.
3. Wskazanie punktów obszaru eksperymentowania na podstawie realizacji pola losowego $w(p)$, w których zostaną przeprowadzone doświadczenia.
4. Losowa realizacja doświadczeń w wybranych punktach obszaru eksperymentowania.

Eksperyment przeprowadzony zgodnie z przedstawionym schematem pozwala na uwzględnienie w badaniu wybranych właściwości wytrzymałościowych materiału. W przedstawionym przez M. Szerszunowicz (2014d) eksperymencie rozważano konstrukcję planu, dla którego obszar eksperymentowania został określony na podstawie zakresów zmienności uwzględnionych czynników. Zaprezentowany plan doświadczeń pozwolił na przeprowadzenie eksperymentu przy ograniczonych kosztach realizacji doświadczeń.

D.C. Montgomery (2013) rozważa eksperyment polegający na badaniu wytrzymałości na rozciąganie arkusza papieru (zmienna wynikowa Y) w zależności od dwóch czynników: rodzaju wytwarzanej miazgi (czynnik X_1) oraz temperatury gotowania (czynnik X_2). Ustalono trzy metody produkcji miazgi oraz cztery poziomy temperatury gotowania. Stąd czynnik X_1 ustalono na trzech poziomach oznaczonych symbolami A, B, C, natomiast czynnik X_2 osiągał cztery poziomy: 200°F, 225°F, 250°F, 275°F. Eksperyment ten nie może być przeprowadzony zgodnie z klasycznym schematem, ponieważ realizacja doświadczeń dla losowo ustalonych poziomów czynników wiąże się z wielokrotną produkcją miazgi, co prowadzi do istotnego wzrostu kosztów eksperymentu. Stąd przebieg eksperymentu podzielony został na etapy: produkcja miazgi zgodnie z ustaloną metodą wytwarzania oraz podział miazgi na cztery części, z których każda poddana została działaniu innej temperatury (jednej z czterech). Wówczas dokonany zostaje pomiar wytrzymałości na rozciąganie dwunastu wytworzonych arkuszy papieru. Ponadto dla rozważanego eksperymentu ustalono trzy replikacje (pojedyncza replikacja w jednym dniu), zatem trzykrotnie należy dokonać pomiaru wytrzymałości dwunastu (ponownie wytworzonych) arkuszy papieru. Tak określony schemat eksperymentu nazywany jest eksperymentem typu *split-plot* (Elandt, 1964; Cox, Reid, 2000; Montgomery, 2013). Łącznie eksperyment wymaga przeprowadzenia 36 doświadczeń, przy czym należy zauważyć, że ich realizacja jest czasochłonna oraz wiąże się ze zwiększeniem kosztów produkcji.

Zakładając, że wytrzymałość arkusza papieru na rozciąganie może być opisana za pomocą gaussowskiego pola losowego stacjonarnego, w szerszym sensie

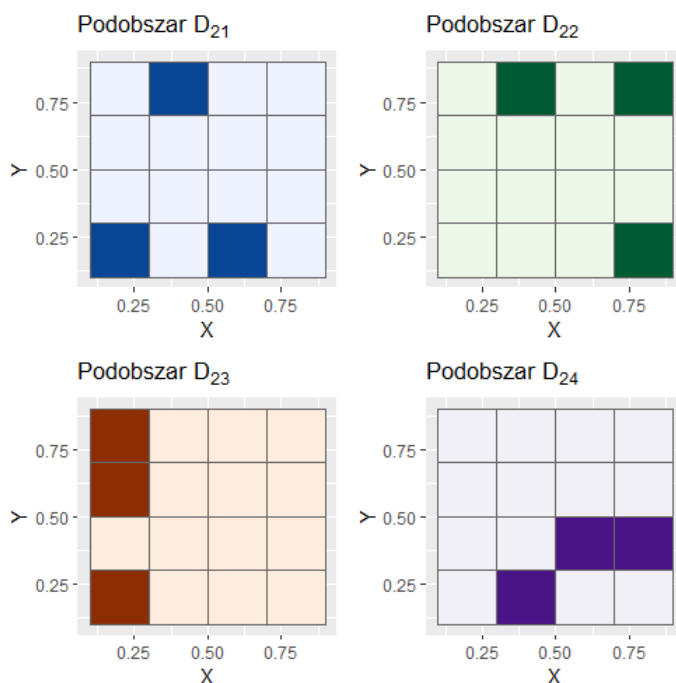
izotropowego, można wykorzystać elementy konstrukcji planu eksperymentu zaproponowanej przez M. Szerszunowicz (2014d). Niech zatem obszar eksperymentowania D składa się z dwunastu podobszarów D_{ij} odpowiadających powierzchniom arkuszy papieru wytworzonych z ustalonych miazg ($i = 1, 2, 3$) poddanych działaniu określonych temperatur ($j = 1, 2, 3, 4$). Zgodnie z konstrukcją eksperymentu wykorzystującego wartości pola losowego, w pierwszym etapie należy wyznaczyć wszystkie możliwe punkty obszaru eksperymentowania. W przedstawionym eksperymencie zakłada się, że każdy z podobszarów D_{ij} ($i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, 4$) został podzielony na 16 równych części, stąd pojedynczy punkt obszaru eksperymentowania odpowiada współrzędnym środka jednej części podobszaru D_{ij} ($i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, 4$). Zatem w pierwszym etapie eksperymentu rozważa się 192 punkty obszaru eksperymentowania. Następnie dla każdego punktu obszaru eksperymentowania zostały wyznaczone wartości gaussowskiego pola losowego $w_{ij}(\mathbf{p})$ ($i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, 4$) charakteryzującego wytrzymałość na rozciąganie arkusza papieru odpowiadającego podobszarowi D_{ij} ($i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, 4$). Graficzną prezentację wartości pola losowego dla arkuszy papieru wytworzonych z miazgi typu B poddanej działaniu poszczególnych temperatur, czyli podobszarów D_{2j} , dla $j = 1, 2, 3, 4$, przedstawia rysunek 3.1, gdzie X i Y odpowiadają współrzędnym szerokości i długości arkuszy papieru, a Z charakteryzuje wartości rozważanego pola losowego.



Rysunek 3.1. Wartości pól losowych dla podobszarów $D_{21}, D_{22}, D_{23}, D_{24}$

Źródło: Opracowanie własne.

W trzecim etapie konstrukcji eksperymentu należy wskazać, na podstawie wartości pola losowego, w których punktach obszaru eksperymentowania konieczne jest przeprowadzenie doświadczenia. Ze względu na specyfikę badania stwierdzono, że uzasadnione będzie wskazanie dla każdego z podobszarów trzech punktów, w których należy zbadać wytrzymałość na rozciąganie. Jako kryterium wyboru punktów przyjęto trzy najmniejsze wartości poszczególnych pól losowych. Wówczas w każdym ze wskazanych punktów obszaru eksperymentowania należy przeprowadzić doświadczenia (dokonać pomiaru wytrzymałości na rozciąganie) w sposób losowy. Rysunek 3.2 przedstawia ustalone punkty podobszarów D_{2j} , dla $j = 1, 2, 3, 4$.



Rysunek 3.2. Graficzna prezentacja punktów, w których należy przeprowadzić doświadczenia dla podobszarów D_{21} , D_{22} , D_{23} , D_{24}

Źródło: Opracowanie własne.

Skonstruowany na podstawie wartości pól losowych eksperyment wymaga wykonania łącznie 36 doświadczeń. Zatem liczba doświadczeń w przedstawionym planie jest równa liczbie doświadczeń planu pierwotnego. Przy czym należy zauważyć, że w zaproponowanym planie eksperymentu wyniki doświadczeń zostały uzyskane na podstawie jednorazowej produkcji dwunastu arkuszy papieru, co istotnie wpłynie na zmniejszenie kosztów przeprowadzenia eksperymentu.

Ponadto plan eksperymentu wykorzystujący wartości pól losowych umożliwia realizację doświadczeń przy zachowaniu względnie jednorodnych warunków eksperymentu oraz pozwala na skrócenie czasu realizacji wszystkich doświadczeń (nie wymaga replikacji eksperymentu rozłożonych w czasie).

Dla przedstawionego badania wytrzymałości na rozciąganie arkuszy papieru można rozważać alternatywne warianty planu eksperymentu skonstruowanego na podstawie wartości pola losowego, uwzględniając jako kryterium wyboru punktów obszaru eksperymentowania największe lub środkowe wartości pola losowego. Przedstawiona propozycja planu eksperymentu stanowi alternatywne podejście w projektowaniu planów eksperymentów typu *split-plot*. Może ona znaleźć zastosowanie nie tylko w eksperymentach dotyczących badania cech wytrzymałościowych materiału. W podobny sposób można określić plany doświadczeń dla modeli geologicznych, gleboznawczych czy służących jakości upraw.

3.1.3. Plan eksperymentu częściowego konstruowany z wykorzystaniem metody półprób zrównoważonych

W badaniach ekonomicznych poszukuje się metod, które przy określonych ograniczonych nakładach finansowych zapewnią uzyskanie wiarygodnych i poprawnych wniosków. W szczególności badania prowadzone przez urzędy statystyczne powinny jak najlepiej charakteryzować badane zjawisko. Jedną z takich praktyk jest wykorzystanie metody półprób zrównoważonych w badaniach ekonomicznych dotyczących gospodarstw domowych. Metodę tą pierwszy raz wykorzystano w biurze spisów USA, a jej formalny zapis przedstawił P.J. McCarthy (McCarthy, 1966; Wolter, 1985).

Schemat metody półprób zrównoważonych wykorzystywany jest w procedurze losowania warstwowego w celu oszacowania wariancji ustalonego estymatora. Rozważana jest próba składająca się z L warstw, przy czym z każdej warstwy losowane są dokładnie $n_h = 2$ elementy. Wtedy utworzona próba postaci:

$$s = \bigcup_{h=1}^L s_h, \quad (3.14)$$

również złożona jest z L warstw, natomiast każda z poszczególnych warstw s_h składa się z dwóch elementów: y_{h1}, y_{h2} . Półpróba tworzona jest przez dobór dokładnie jednego elementu z każdej warstwy s_h . Elementom półpróby przypisywana jest jedna z wartości 1 lub -1 , zgodnie z formułą:

$$\varepsilon_{ah} = \begin{cases} 1, & y_{h1} \in s_h, \\ -1, & y_{h2} \in s_h \end{cases}, \quad (3.15)$$

gdzie k oznacza liczbę rozważanych półprób oraz $\alpha = 1, 2, \dots, k$. Poszczególne półpróby mogą być opisane za pomocą wektora postaci $(\varepsilon_{\alpha 1}, \varepsilon_{\alpha 2}, \dots, \varepsilon_{\alpha L})$, dla $\alpha = 1, 2, \dots, k$. W przedstawiony sposób możliwe jest utworzenie 2^L różnych półprób. Procedury obliczeniowe wariancji estymatora ustalonego parametru z uwzględnieniem wszystkich półprób są skomplikowane i czasochłonne. Wykazano, że wykorzystanie zbioru półprób zrównoważonych pozwala na redukcję trudności obliczeniowych, przy jednoczesnym zachowaniu nieobciążoności estymatora wariancji ustalonego parametru (Jakubowski, 1999). Zbiór k półprób nazywany jest zbiorem półprób zrównoważonych, gdy dla każdej pary różnych warstw $h, h' \in \{1, 2, \dots, L\}$ spełniony jest warunek:

$$\sum_{\alpha=1}^k \varepsilon_{ah} \varepsilon_{ah'} = 0. \quad (3.16)$$

Uogólnieniem metody półprób zrównoważonych dla prób składających się z L warstw, z których losowanych jest $n_h > 2$ elementów, jest metoda zgrupowanych półprób zrównoważonych (*grouped balanced half-samples*, Jakubowski, 1999). Metoda ta polega na podziale każdej warstwy w sposób losowy na dwie grupy: g_{h1} oraz g_{h2} , o liczebnościach odpowiednio $m_{h1} = \left\lfloor \frac{n_h}{2} \right\rfloor$ oraz $m_{h2} = n_h - m_{h1}$,

gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x . Wówczas półpróby tworzone są analogicznie jak w przypadku metody półprób zrównoważonych: z każdej nowo określonej warstwy pobierany jest do próby dokładnie jeden element, przy czym elementy półprób oznaczane są zgodnie z formułą:

$$\gamma_{ah} = \begin{cases} 1, & g_{h1} \in s_h, \\ -1, & g_{h2} \in s_h \end{cases}. \quad (3.17)$$

Wtedy zbiór k półprób nazywany jest zrównoważonym, gdy zachodzi:

$$\sum_{\alpha=1}^k \gamma_{ah} \gamma_{ah'} = 0, \quad (3.18)$$

dla każdej pary różnych warstw $h, h' \in \{1, 2, \dots, L\}$. J.N.K. Rao oraz J. Shao (1996) zaproponowali metodę powtórzeń zgrupowanych półprób zrównoważonych (*repeatedly grouped balanced half-samples*). Metoda ta stanowi uogólnienie metody grupowanych półprób zrównoważonych i polega na niezależnych powtórzeniach podziału elementów warstw na dwie grupy.

Wśród metod planowania eksperymentów znaczącą rolę odgrywają eksperymenty, które pozwalają na przeprowadzenie jak najmniejszej liczby doświadczeń przy założeniu, że uzyskane wyniki będą pozwalały na właściwą analizę procesu produkcyjnego. Najczęściej wykorzystywanymi planami eksperymentów, które pozwalają na istotne zredukowanie liczby doświadczeń, są ułamkowe plany eksperymentów czynnikowych typu 2^{m-k} oraz typu 3^{m-k} . Dla tych planów rozważa się czynniki występujące na dwóch lub trzech poziomach. W praktyce czynniki mogą być uwzględniane na większej liczbie poziomów. Wówczas należy poszukiwać alternatywnych planów eksperymentów, które w uzasadniony sposób pozwolą na przeprowadzenie mniejszej liczby doświadczeń, niż wynika to z eksperymentu obejmującego cały obszar eksperymentowania.

Jeden z alternatywnych sposobów tworzenia planu częściowego przedstawia M. Szerszunowicz (2014c). Zaproponowany częściowy plan eksperymentu jest skonstruowany na podstawie planu całkowitego eksperymentu czynnikowego i wykorzystuje schemat metody półprób zrównoważonych. Rozważany jest całkowity plan eksperymentu czynnikowego typu 2^m , uwzględniający m czynników $X_1, X_2, \dots, X_m$ występujących na dwóch poziomach: górnym (+1) oraz dolnym (-1). Czynniki $X_1, X_2, \dots, X_m$ utożsamiane są z warstwami, natomiast punkty obszaru eksperymentowania $\mathbf{x}_j$, dla $j = 1, 2, \dots, n$, odpowiadają kolejnym półpróbom. Wtedy poziomy czynników $X_1, X_2, \dots, X_m$ opisują wartości przypisywane elementom w kolejnych warstwach, zgodnie z formułą (3.15). Konstrukcja częściowego planu eksperymentu z wykorzystaniem metody półprób zrównoważonych jest opisana w następujących etapach (Szerszunowicz, 2014c):

1. Określenie całkowitego planu eksperymentu czynnikowego obejmującego n doświadczeń.
2. Utworzenie zbioru k półprób zrównoważonych postaci $\mathbf{x}_{bhs}^{(j)} = \{\mathbf{x}_{(1)}^j, \mathbf{x}_{(2)}^j, \dots, \mathbf{x}_{(k)}^j\}$ dla każdego punktu obszaru eksperymentowania $\mathbf{x}_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$), zgodnie z warunkiem (3.16).
3. Wyeliminowanie z całkowitego planu eksperymentu czynnikowego punktów obszaru eksperymentowania wskazanych przez ustalony zbiór półprób zrównoważonych $\mathbf{x}_{bhs}^*$, taki że $\mathbf{x}_{bhs}^* \in \{\mathbf{x}_{bhs}^{(1)}, \mathbf{x}_{bhs}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}_{bhs}^{(n)}\}$.
4. Wybór planu eksperymentu na podstawie wyników analiz wskazanych planów eksperymentów w poprzednim etapie.
5. Przeprowadzenie doświadczeń zgodnie z wyznaczonym planem eksperymentu. Utworzony, zgodnie z powyższymi etapami, plan eksperymentu obejmuje $n - k$ doświadczeń. Wobec czego pozwala na ograniczenie czasu i kosztów realizacji eksperymentu. Ponadto zaprezentowany częściowy plan eksperymentu pozwala na ustalenie liczebności zbioru półprób zrównoważonych, co umożliwia zdet-

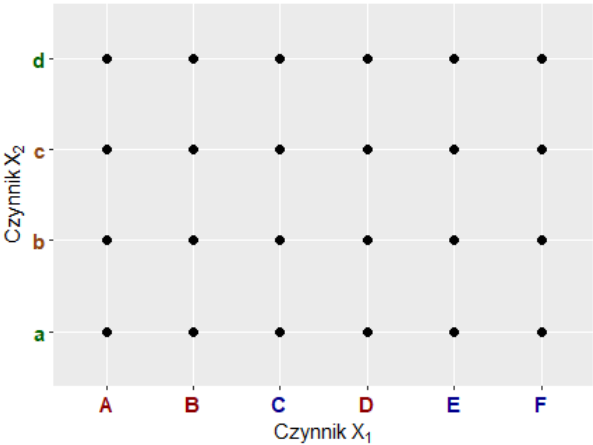
minowanie liczby realizowanych doświadczeń. Taka własność konstrukcji planu eksperymentu jest istotna między innymi ze względu na możliwość estymacji ustalonych postaci funkcji powierzchni odpowiedzi (Szerszunowicz, 2014c).

Na podstawie przedstawionego planu eksperymentu oraz uogólnienia metody półprób zrównoważonych można utworzyć częściowy plan eksperymentu czynnikowego, który uwzględnia czynniki występujące na różnej liczbie poziomów. Niech dany będzie plan całkowitego eksperymentu czynnikowego uwzględniający m czynników $X_1, X_2, \dots, X_m$ występujących na $n_i > 2$ poziomach, dla $i = 1, 2, \dots, m$. Wówczas zgodnie z procedurą metody zgrupowanych półprób zrównoważonych, należy podzielić poziomy każdego z czynników na dwie grupy $g_{h1}^{(i)}$ i $g_{h2}^{(i)}$ o liczebnościach odpowiednio $m_{h1}^{(i)} = \left\lfloor \frac{n_i}{2} \right\rfloor$ oraz $m_{h2}^{(i)} = n_i - m_{h1}^{(i)}$, dla $i = 1, 2, \dots, m$.

Zgodnie z metodą zgrupowanych półprób zrównoważonych podział poziomów czynników powinien zostać określony w sposób losowy. Ze względu na specyfikę badanego zjawiska lub procesu, eksperymentator może dokonać celowego podziału poziomów poszczególnych czynników, uwzględniając wyższe i niższe poziomy czynników lub koszty osiągnięcia (utrzymania) poszczególnych poziomów czynników. Wtedy utworzone zgodnie z formułą (3.17) półpróby odpowiadają grupom punktów obszaru eksperymentowania zdeterminowanym przez przyjęty podział poziomów czynników. Dla poszczególnych grup punktów obszaru eksperymentowania można wyodrębnić zbiory półprób zrównoważonych spełniające własność (3.18). Spośród wyznaczonych zbiorów półprób zrównoważonych należy wybrać zbiór o najmniejszej liczebności. W ten sposób możliwe jest skonstruowanie częściowego planu eksperymentu dla m czynników $X_1, X_2, \dots, X_m$ występujących na $n_i > 2$ poziomach, dla $i = 1, 2, \dots, m$.

W celu przedstawienia konstrukcji częściowego planu eksperymentu czynnikowego rozważono badanie dotyczące wpływu na zmienną wynikową dwóch czynników X_1 i X_2 występujących odpowiednio na $n_1 = 6$ oraz $n_2 = 4$ poziomach. Wówczas całkowity plan eksperymentu czynnikowego obejmuje $n = 24$ doświadczenia. Dla poziomów czynnika X_1 przyjęto oznaczenia: A, B, C, D, E, F , a dla poziomów czynnika X_2 oznaczenia: a, b, c, d . Zgodnie z proponowaną metodą dokonano podziału poziomów czynników X_1 i X_2 na grupy: $g_{h1}^{(1)}$ i $g_{h2}^{(1)}$ oraz $g_{h1}^{(2)}$ i $g_{h2}^{(2)}$ o liczebnościach odpowiednio $m_{h1}^{(1)} = m_{h2}^{(1)} = 3$ oraz $m_{h1}^{(2)} = m_{h2}^{(2)} = 2$, następująco $g_{h1}^{(1)} = \{A, B, D\}$, $g_{h2}^{(1)} = \{C, E, F\}$, $g_{h1}^{(2)} = \{a, d\}$, $g_{h2}^{(2)} = \{b, c\}$. Graficzną prezentację obszaru eksperymentowania wraz z wyróżnionym podziałem poziomów czynników na grupy przedstawia rysunek 3.3. Wówczas możliwe do utworzenia półpróby wraz przypisanymi oznaczeniami, zgodnie z (3.17), przed-

stawia tabela 3.7. Na podstawie uzyskanych półprób oraz korzystając z warunku (3.18) można utworzyć cztery dwuelementowe zbiory półprób zrównoważonych postaci $\{I, II\}$, $\{I, III\}$, $\{II, IV\}$, $\{III, IV\}$. Każdy ze zbiorów wskazuje 12 punktów obszaru eksperymentowania, w których należy przeprowadzić kolejne doświadczenia.



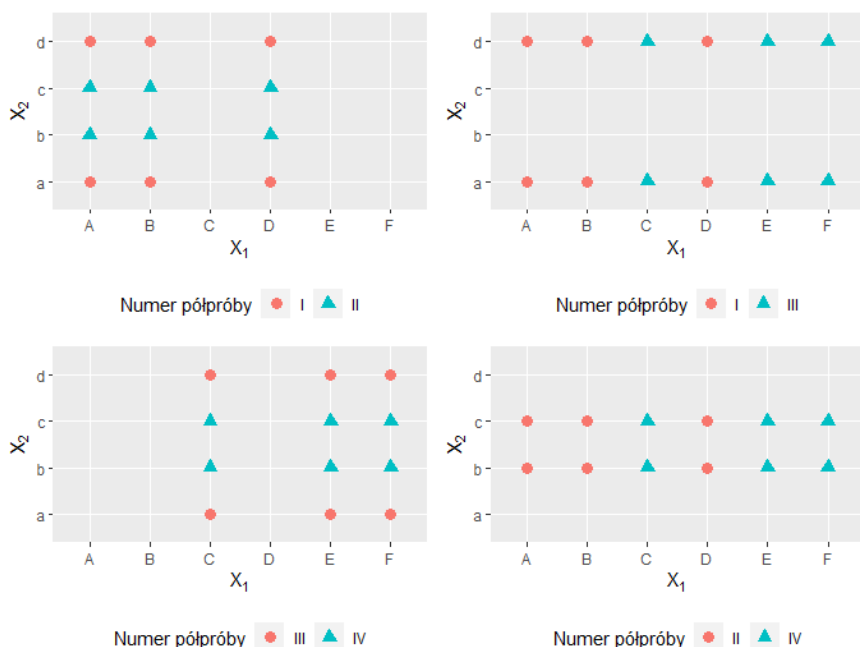
Rysunek 3.3. Obszar eksperymentowania całkowitego eksperymentu czynnikowego
 Źródło: Opracowanie własne.

Tabela 3.7. Wyznaczone półpróby

Numer półpróby (α)	Postać półpróby	Symboliczny zapis elementów półpróby $\{\gamma_{\alpha}^{(1)}, \gamma_{\alpha}^{(2)}\}$
<i>I</i>	$\{g_{h1}^{(1)}, g_{h1}^{(2)}\} = \{\{A, B, D\}, \{a, d\}\}$	$\{1, 1\}$
<i>II</i>	$\{g_{h1}^{(1)}, g_{h2}^{(2)}\} = \{\{A, B, D\}, \{b, c\}\}$	$\{1, -1\}$
<i>III</i>	$\{g_{h2}^{(1)}, g_{h1}^{(2)}\} = \{\{C, E, F\}, \{a, d\}\}$	$\{-1, 1\}$
<i>IV</i>	$\{g_{h2}^{(1)}, g_{h2}^{(2)}\} = \{\{C, E, F\}, \{b, c\}\}$	$\{-1, -1\}$

Źródło: Opracowanie własne.

Wyznaczone obszary eksperymentowania przedstawia rysunek 3.4. Wykorzystanie proponowanej konstrukcji planu eksperymentu częściowego prowadzi do istotnego zmniejszenia liczby realizowanych doświadczeń: z 24 doświadczeń ustalonych dla planu całkowitego do 12 doświadczeń określonych w planie częściowym.



Rysunek 3.4. Obszary eksperymentowania dla wyznaczonych zbiorów półprób zrównoważonych

Źródło: Opracowanie własne.

Spośród wyznaczonych częściowych planów eksperymentów należy wybrać jeden, zgodnie z którym zostaną zrealizowane kolejne doświadczenia. Można tego dokonać w sposób losowy lub na podstawie oceny możliwości realizacji doświadczeń w zadanych punktach obszaru eksperymentowania.

Przedstawiona propozycja konstrukcji częściowych planów eksperymentów stanowi rozszerzenie metody zaproponowanej przez M. Szerszunowicz (2014c) i dzięki wykorzystaniu uogólnienia metody półprób zrównoważonych umożliwia uwzględnienie czynników występujących na różnej liczbie poziomów. Utworzone częściowe plany eksperymentów pozwalają na redukcję liczby doświadczeń całkowitego eksperymentu czynnikowego, który uwzględnia czynniki na wielu poziomach. Postać planu eksperymentu zdeterminowana jest przez podział poziomów czynników na dwie grupy. Stąd można rozważyć konstrukcję planu częściowego wykorzystującą metodę powtórzeń zgrupowanych półprób zrównoważonych, czyli wielokrotny podział poziomów czynników na dwie grupy.

3.2. Wybrane zagadnienia metodologii funkcji powierzchni odpowiedzi

Liczne zastosowania metod planowania eksperymentów przyczyniły się do rozwoju metod analizy otrzymanych rezultatów. Początkowo klasyczne plany eksperymentów opierały się na analizie wariancji z jej odpowiednimi modyfikacjami. Następnie całkowite i ułamkowe plany eksperymentów czynnikowych uwzględniały już postać funkcji powierzchni odpowiedzi, która w sposób formalny opisywała badane zjawisko. Własności ustalonej funkcji powierzchni odpowiedzi stanowiły podstawę konstruowania planów optymalnych.

W teorii planowania eksperymentów funkcja powierzchni odpowiedzi, która jak najlepiej charakteryzuje badany problem, zyskała istotne znaczenie. Ponadto jednym z ważniejszych zagadnień jest odpowiednie oszacowanie funkcji powierzchni odpowiedzi oraz konstrukcja planów eksperymentów opierająca się na jej własnościach.

3.2.1. Podstawy metodologii funkcji powierzchni odpowiedzi

W teorii planowania eksperymentów istotne znaczenie ma funkcja powierzchni odpowiedzi, która stanowi matematyczny opis badanego zjawiska. Właściwe ustalenie postaci funkcji powierzchni odpowiedzi oraz poprawna estymacja jej parametrów prowadzą do sformułowania odpowiednich wniosków lub zaleceń dla badanego problemu. Analizą funkcji powierzchni odpowiedzi oraz konstrukcją planów eksperymentów w oparciu o jej własności, w ramach teorii planowania eksperymentów, zajmuje się metodologia powierzchni odpowiedzi (RSM – *Response Surface Methodology*, Montgomery, 2013).

Zazwyczaj postać funkcji powierzchni odpowiedzi, opisująca związek pomiędzy zmienną wynikową a czynnikami (zmiennymi niezależnymi), jest nieznana. Wówczas pierwszym z etapów w ramach stosowania metodologii powierzchni odpowiedzi jest określenie właściwej postaci funkcji powierzchni odpowiedzi. W tym celu wykorzystuje się wybrane postaci funkcji wielomianowych, które określane są dla ustalonych zakresów zmiennych niezależnych. Jeżeli związek pomiędzy zmienną wynikową i czynnikami można opisać za pomocą funkcji liniowej, to funkcja powierzchni odpowiedzi jest wielomianem stopnia pierwszego typu I (*first-order model*) postaci:

$$\tilde{y}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_m x_m \quad (3.19)$$

Natomiast jeżeli związek zmiennej zależnej i zmiennych niezależnych nie jest liniowy, to w metodologii powierzchni odpowiedzi funkcję powierzchni odpowiedzi definiuje się jako wielomian stopnia drugiego typu I (*second-order model*):

$$\tilde{y}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}) = \beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i x_i + \sum_{i=1}^m \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i < j} \beta_{ij} x_i x_j. \quad (3.20)$$

Dla niewielkich obszarów oszacowane wielomiany charakteryzują się dobrymi możliwościami aproksymacyjnymi, co uzasadnia ich wykorzystanie w określeniu postaci funkcji powierzchni odpowiedzi. W większości zastosowań metodologii powierzchni odpowiedzi uwzględniane są jednocześnie dwa modele (3.19) i (3.20) lub tylko jeden z nich, przy czym nie wyklucza się zastosowania wielomianów wyższych stopni.

W celu oszacowania nieznanej postaci funkcji powierzchni odpowiedzi najczęściej wykorzystuje się metodę najmniejszych kwadratów (Box, Draper, 2007; Montgomery, 2013). Oszacowana postać funkcji powierzchni odpowiedzi, która charakteryzuje się odpowiednio dobrym dopasowaniem, stanowi model opisujący badany problem, który jest niemal równoważny z jego rzeczywistą postacią. Wówczas analiza oszacowanej funkcji powierzchni odpowiedzi jest zbliżona do analizy rzeczywistego, nieznanego modelu charakteryzującego badany proces.

Metody związane z przeprowadzeniem analizy powierzchni odpowiedzi w większości swoich zastosowań są procedurami sekwencyjnymi (Myers, Montgomery, Anderson-Cook, 2009). Przed przystąpieniem do właściwego zastosowania metod analizy powierzchni odpowiedzi należy rozważyć zbiór zmiennych niezależnych (czynniki), które mają wpływ na wartości zmiennej wynikowej. Wówczas przeprowadza się doświadczenia, nazywane eksperymentem przesiewowym (*screening experiment*), które zazwyczaj prowadzą do redukcji liczby czynników uwzględnianych w rozważanym badaniu. Zastosowanie eksperymentu przesiewowego przyczynia się do zmniejszenia liczby doświadczeń w kolejnych etapach analizy funkcji powierzchni odpowiedzi (Myers, Montgomery, Anderson-Cook, 2009). Pierwszym etapem analizy funkcji powierzchni odpowiedzi jest rozstrzygnięcie, czy przy bieżących ustawieniach poziomów czynników zmienna wynikowa osiąga wartości zbliżone do ustalonej wartości optymalnej. Jeżeli uzyskane realizacje zmiennej wynikowej są znacznie oddalone od wartości optymalnej, to dokonuje się odpowiednich modyfikacji poziomów czynników z wykorzystaniem metody najszybszego wzrostu/spadku (*method of steepest ascent/descent*). Na tym etapie zazwyczaj wykorzystuje się oszacowanie funkcji powierzchni odpowiedzi z wykorzystaniem wielomianu postaci (3.19). W odpowiednio bliskim otoczeniu wartości optymalnej oczekuje się oszacowania funkcji powierzchni odpowiedzi, które jest najbardziej zbliżone do jej rzeczywistej postaci. Stąd jeżeli wartości zmiennej wynikowej znajdują się w nie-

dalekim otoczeniu wartości optymalnej, to funkcja powierzchni odpowiedzi powinna zostać przybliżona z wykorzystaniem modelu (3.20). Wówczas możliwa jest odpowiednio dokładna analiza, której rezultatem jest uzyskanie współrzędnych (wartości zmiennych niezależnych) punktu, dla którego funkcja powierzchni odpowiedzi przyjmuje wartość optymalną. W praktycznych zastosowaniach metodologii powierzchni odpowiedzi opis związku pomiędzy zmienną wynikową a czynnikami z wykorzystaniem modelu (3.19) nie jest wystarczający. Wówczas wskazuje się na konieczność uwzględnienia w pierwszym etapie modelu (3.20) lub nawet modeli nieliniowych (Ryan, 2007).

Główny obszar zastosowań metodologii powierzchni odpowiedzi jest związany z zagadnieniem poprawy jakości procesu produkcyjnego. Wśród zastosowań metod analizy powierzchni odpowiedzi wyróżnia się zazwyczaj trzy kategorie rozważanych problemów (Myers, Montgomery, Anderson-Cook, 2009):

- odwzorowanie powierzchni odpowiedzi dla określonego zakresu, które umożliwia estymację wartości zmiennej wynikowej dla czynników ustalonych na poziomach różnych od ich wartości wejściowych;
- optymalizacja rezultatów, polegająca na poszukiwaniu takich ustawień czynników, które pozwolą na uzyskanie optymalnej, zazwyczaj największej lub najmniejszej, wartości zmiennej wynikowej;
- specyfikacja rezultatów, która polega na ustaleniu warunków realizacji procesu tak, aby spełniał jednocześnie wymagania dotyczące ustawień czynników i zmiennej wynikowej lub kilku zmiennych wynikowych.

Metodologia funkcji powierzchni odpowiedzi ze względu na charakter rozważanych problemów może znaleźć uzasadnione zastosowanie w zagadnieniach ekonomicznych. Problemy, które są określone przez zależność zmiennej wynikowej od wartości zmiennych niezależnych za pomocą modeli (3.19) lub (3.20), mogą podlegać analizie z wykorzystaniem elementów metodologii powierzchni odpowiedzi. Przy czym w badaniach należy zwrócić uwagę na konieczność zapewnienia stabilnych warunków lub okoliczności (czynników niekontrolowanych), w jakich dany problem jest rozważany. W szczególności możliwości zastosowania elementów metodologii powierzchni odpowiedzi należy poszukiwać wśród zagadnień z obszaru ekonomii matematycznej.

3.2.2. Modyfikacja planu eksperymentu dla estymacji nieliniowej postaci funkcji powierzchni odpowiedzi

Jednym z problemów rozważanych w ramach metodologii funkcji powierzchni odpowiedzi jest wybór planu eksperymentu, który pozwala na estymację funkcji powierzchni odpowiedzi. Sposób określenia planu eksperymentu,

a w szczególności ustalenie punktów obszaru eksperymentowania, ma znaczący wpływ na estymację parametrów funkcji powierzchni odpowiedzi. Najczęściej wykorzystywanymi planami eksperymentów w tym zakresie są plany całkowitych eksperymentów czynnikowych typu 2^m (estymacja modelu (3.19)) oraz typu 3^m (estymacja modelu (3.20)) lub skonstruowane na ich podstawie plany ułamkowych eksperymentów czynnikowych typu 2^{m-k} oraz 3^{m-k} (Wawrzynek, 2009). Ponadto wśród planów eksperymentów konstruowanych w celu estymacji funkcji powierzchni odpowiedzi wymienia się plany optymalne (por. rozdział 2.5), centralnie skomponowane plany eksperymentów czynnikowych (*central composite designs*), plany Boxa-Behnkena (*Box-Behnken designs*), plany hybrydowe (*hybrid designs*) i plany równomierne (*uniform designs*, Ryan, 2007).

Funkcje powierzchni odpowiedzi przedstawione w postaci modeli (3.19) oraz (3.20) nie zawsze zapewniają precyzyjny opis związku pomiędzy czynnikami a zmienną wynikową. Niejednokrotnie w wybranych zagadnieniach wskazane jest wykorzystanie modeli nieliniowych. Wówczas należy poszukiwać planów eksperymentów, które zapewnią odpowiednią precyzję oszacowania funkcji powierzchni odpowiedzi. W literaturze zazwyczaj rozważa się plany eksperymentów dla nieliniowej funkcji powierzchni odpowiedzi w kontekście konstrukcji planów optymalnych (Ryan, 2007). Jedną z propozycji planów eksperymentów dla estymacji nieliniowej funkcji powierzchni odpowiedzi są plany typu *space-filling* (Ryan, 2007). Konstrukcja planu eksperymentów typu *space-filling* polega na odpowiednim określeniu punktów obszaru eksperymentowania tak, aby umożliwić estymację parametrów nieliniowej funkcji powierzchni odpowiedzi na zadanym obszarze. Jednym z przykładów planów eksperymentów typu *space-filling* są plany równomierne (*uniform designs*, Ryan, 2007). W kontekście estymacji nieliniowej postaci funkcji powierzchni odpowiedzi częściowy plan eksperymentu przedstawia M. Szerszunowicz (2012). Proponowany plan eksperymentu wykorzystuje elementy z zakresu statystyki przestrzennej: statystyki globalne i lokalne Morana.

Statystyka przestrzenna dostarcza metod, które pozwalają na analizę danych charakteryzujących się zlokalizowaniem w przestrzeni. Dane przestrzenne dzieli się na dane powierzchniowe, obszarowe, punktowe i przestrzenno-czasowe. Dane punktowe, które charakteryzują wartości badanego zjawiska w ustalonych lokalizacjach, w szczególności mogą reprezentować środek (centroid) obszaru (Suchecka, 2014). Jednym z istotnych zagadnień rozważanych w statystyce przestrzennej jest zjawisko autokorelacji przestrzennej. Istnienie autokorelacji przestrzennej oznacza występowanie dodatniej lub ujemnej autokorelacji. Stwierdzenie braku autokorelacji przestrzennej oznacza przestrzenną losowość, czyli brak zależności danej lokalizacji od lokalizacji sąsiednich. Dodatnia auto-

korelacja przestrzenna wiąże się z podobieństwem lokalizacji sąsiadujących, natomiast autokorelacja ujemna oznacza występowanie znaczących różnic w lokalizacjach sąsiednich (Kopczewska, 2011). W odniesieniu do analizy modelu regresji autokorelacja przestrzenna jest zazwyczaj rozważana dla wartości zmiennej objaśnianej, przy czym może również dotyczyć błędu estymacji. Jednym z zasadniczych etapów badania autokorelacji przestrzennej jest budowa macierzy wag przestrzennych. W badaniach empirycznych najczęściej wykorzystuje się macierze wag przestrzennych, które są macierzami sąsiedztwa (por. Suchecka, 2014). Wtedy elementy w_{ij} macierzy wag przestrzennych $\mathbf{W}$ przyjmują wartości 0 (obiekt i oraz j nie są sąsiadami) lub 1 (lokalizacje i oraz j są sąsiadami), przy czym sąsiedztwo zazwyczaj dotyczy występowania wspólnej granicy łączącej badane jednostki (Suchecka, 2014).

W ocenie autokorelacji przestrzennej badanych lokalizacji wykorzystuje się dwa typy mierników: statystyki globalne i statystyki lokalne (por. Suchecki, 2010). Statystyki globalne to jedno-liczbowe wskaźniki autokorelacji przestrzennej badanego regionu, które informują o ogólnym podobieństwie uwzględnionych lokalizacji. Statystyki lokalne, wyznaczane dla każdej z badanych lokalizacji, charakteryzują podobieństwo lub różnicę ustalonej lokalizacji i lokalizacji z nią sąsiadujących. Najczęściej wykorzystywanymi miernikami autokorelacji przestrzennej są: statystyka globalna Morana oraz statystyka lokalna Morana.

Statystyka globalna Morana wyraża się wzorem postaci:

$$I = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} (y_i - \bar{y})(y_j - \bar{y})}{S^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij}}, \quad (3.21)$$

gdzie $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$ oraz y_i jest wartością zmiennej w i -tej lokalizacji, $\bar{y}$ jest

średnią ze wszystkich wartości zmiennej badanych lokalizacji, natomiast w_{ij} jest elementem macierzy wag przestrzennych. Procedura wyznaczania wartości statystyki globalnej Morana wymaga uwzględnienia macierzy wag standaryzowanej rzędami do jedynki (Kopczewska, 2011). Istotność statystyki globalnej Morana weryfikuje się testem skonstruowanym na podstawie dystrybucyjności rozkładu normalnego, dla którego hipoteza zerowa postuluje brak autokorelacji przestrzennej (losowa struktura wartości) wobec hipotezy alternatywnej głoszącej o dodatniej autokorelacji przestrzennej (Kopczewska, 2011). Dodatnia i istotna wartość statystyki globalnej Morana oznacza wystąpienie dodatniej autokorelacji przestrzennej w badanym regionie, czyli wartości zmiennej w danej lokalizacji i lokalizacjach sąsiednich są podobne (tworzenie się klastrów). Ujemne wartości

statystyki globalnej Morana informują o ujemnej autokorelacji przestrzennej regionu, czyli o wystąpieniu znaczących różnic wartości zmiennej w badanych lokalizacjach.

Statystyka lokalna Morana wyznaczana jest dla każdej z badanych lokalizacji. Wartość statystyki dla danej lokalizacji informuje o stopniu podobieństwa wartości zmiennej z lokalizacjami sąsiadującymi. Statystyka lokalna Morana wyznaczana jest zgodnie ze wzorem postaci:

$$I_i = \frac{(y_i - \bar{y}) \sum_{j=1}^n w_{ij} (y_j - \bar{y})}{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n}}, \quad (3.22)$$

gdzie y_i jest wartością zmiennej w i -tej lokalizacji, $\bar{y}$ jest średnią ze wszystkich wartości zmiennej badanych lokalizacji, a w_{ij} jest elementem macierzy wag przestrzennych. Hipoteza zerowa testu istotności statystyki lokalnej Morana mówi o braku autokorelacji przestrzennej, natomiast hipoteza alternatywna głosi o autokorelacji dodatniej. Weryfikacja hipotez testu istotności statystyki lokalnej Morana opiera się na podejściu randomizacyjnym (Anselin, 1995). W praktyce testy istotności sprowadzają się do analizy oszacowanej wartości p -value (Kopczewska, 2011). Wartość dodatnia i istotna statystyki lokalnej Morana oznacza, że dana lokalizacja jest otoczona przez lokalizacje sąsiedzkie o podobnej wartości zmiennej (p -value mniejsza od 0,05). Ujemne i istotne wartości statystyki lokalnej Morana świadczą o różnych wartościach badanej zmiennej w lokalizacjach sąsiedzkich (p -value większa od 0,95). Wartości nieistotne statystyki lokalnej Morana świadczą o losowym rozmieszczeniu wartości zmiennej w badanej lokalizacji i lokalizacjach sąsiednich.

M. Szerszunowicz (2012) przedstawia konstrukcję częściowego planu eksperymentu, który opiera się na badaniu autokorelacji przestrzennej punktów obszaru eksperymentowania. Na podstawie jednoczesnej analizy wartości statystyk lokalnych Morana oraz wartości wariancji funkcji powierzchni odpowiedzi wskazywane są punkty obszaru eksperymentowania, w których należy przeprowadzić kolejne doświadczenia. Określony częściowy plan eksperymentu czynnikowego pozwala na ograniczenie liczby doświadczeń oraz umożliwia dołączenie do planu punktu obszaru eksperymentowania, dla którego oszacowanie funkcji powierzchni odpowiedzi będzie precyzyjne (Szerszunowicz, 2012). Opierając się na wybranych etapach przedstawionego planu częściowego, można utworzyć procedurę, która pozwoli skonstruować plan eksperymentu prowadzący do analizy funkcji powierzchni odpowiedzi.

Niech dany będzie eksperyment uwzględniający m czynników $X_1, X_2, \dots, X_m$ występujących na n_i poziomach, dla $i = 1, 2, \dots, m$. W wyniku przeprowadzenia eksperymentu przesiewowego uzyskano realizacje zmiennej wynikowej Y , dla ustalonych k ustawień poziomów czynników. Zadaniem eksperymentatora jest skonstruowanie planu eksperymentu, który pozwoli na odpowiednio precyzyjne oszacowanie funkcji powierzchni odpowiedzi. Konstrukcja takiego planu eksperymentu może zostać przedstawiona w następujących etapach:

1. Oszacowanie postaci funkcji powierzchni odpowiedzi na podstawie wartości zmiennej wynikowej uzyskanych w eksperymencie przesiewowym.
2. Utworzenie obszaru eksperymentowania poprzez równomierny podział zakresów zmienności czynników $X_1, X_2, \dots, X_m$ na ustaloną liczbę części.
3. Wyznaczenie wartości funkcji powierzchni odpowiedzi we wszystkich punktach obszaru eksperymentowania.
4. Analiza autokorelacji przestrzennej rozważanego obszaru eksperymentowania i jego poszczególnych punktów z wykorzystaniem statystyki globalnej Morana oraz statystyk lokalnych Morana.
5. Wskazanie punktów obszaru eksperymentowania, dla których wartości statystyk lokalnych Morana nie są istotne.
6. Utworzenie planu eksperymentu uwzględniającego punkty obszaru eksperymentowania, dla których nie występuje autokorelacja przestrzenna.

Skonstruowany plan eksperymentu dzięki wykorzystaniu statystyk lokalnych Morana zapewnia losowy dobór punktów obszaru eksperymentowania. Ponadto uwzględnienie w konstrukcji planu eksperymentu wartości wariancji funkcji powierzchni odpowiedzi umożliwia dobór doświadczeń tak, aby uzyskanie oszacowanie zmiennej wynikowej było precyzyjne.

R.H. Myers, D.C. Montgomery oraz C.M. Anderson-Cook (2009) rozważają badanie technologiczne dotyczące wpływu dwóch czynników: czasu wprowadzenia emitera (X_1) oraz ilości wprowadzonego emitera (X_2) na wzmocnienie tranzystora (Y). Niech wyniki czternastu przeprowadzonych doświadczeń będą realizacjami eksperymentu przesiewowego. Wartości poszczególnych ustawień czynników oraz uzyskane wartości zmiennej wynikowej wraz z ich logarytmami naturalnymi prezentuje tabela 3.8.

W celu estymacji funkcji powierzchni odpowiedzi wartości rzeczywiste czynników zostały przekształcone zgodnie ze wzorami:

$$x_{i1} = \frac{\xi_{i1} - \frac{1}{2}(\max \xi_{i1} + \min \xi_{i1})}{\frac{1}{2}(\max \xi_{i1} - \min \xi_{i1})} \quad (3.23)$$

$$x_{i2} = \frac{\xi_{i2} - \frac{1}{2}(\max \xi_{i2} + \min \xi_{i2})}{\frac{1}{2}(\max \xi_{i2} - \min \xi_{i2})}. \quad (3.24)$$

Wówczas wartości czynników uwzględnianych w eksperymencie należą do przedziału $[-1; 1]$, co jest zgodne z konwencją ustalania poziomów czynników w teorii planowania eksperymentów. Rozważa się realizacje zmiennej wynikowej będące logarytmem naturalnym wartości wzmocnienia tranzystora.

Tabela 3.8. Wyniki eksperymentu przesiewowego

Numer doświadczenia	ξ_{i1}	ξ_{i2}	x_{i1}	x_{i2}	ψ_i	$y_i = \ln \psi_i$
1	195,00	4,00	-1,000	-1,000	1004	6,912
2	255,00	4,00	1,000	-1,000	1636	7,400
3	195,00	4,60	-1,000	0,667	852	6,748
4	255,00	4,60	1,000	0,667	1506	7,317
5	225,00	4,20	0,000	-0,444	1272	7,148
6	225,00	4,00	0,000	-1,000	1270	7,147
7	225,00	4,60	0,000	0,667	1269	7,146
8	195,00	4,30	-1,000	-0,167	903	6,806
9	255,00	4,30	1,000	-0,167	1555	7,349
10	225,00	4,00	0,000	-1,000	1260	7,139
11	225,00	4,70	0,000	0,944	1146	7,044
12	225,00	4,30	0,000	-0,167	1276	7,151
13	225,00	4,72	0,000	1,000	1225	7,111
14	230,00	4,30	0,167	-0,167	1321	7,186

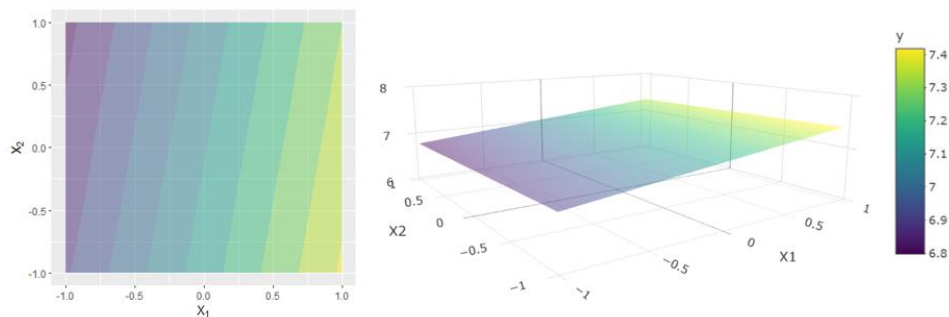
Źródło: Opracowanie własne na podstawie: Myers, Montgomery, Anderson-Cook (2009).

Na podstawie wyników eksperymentu przesiewowego należy oszacować ustaloną postać funkcji powierzchni odpowiedzi. W podejściu klasycznym rozważono modele funkcji powierzchni odpowiedzi postaci (3.19) oraz (3.20), odpowiednio dla których uzyskano oszacowania dane wzorami:

$$\tilde{y}_{(1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}) = 7,108 + 0,268x_1 - 0,042x_2, \quad (3.25)$$

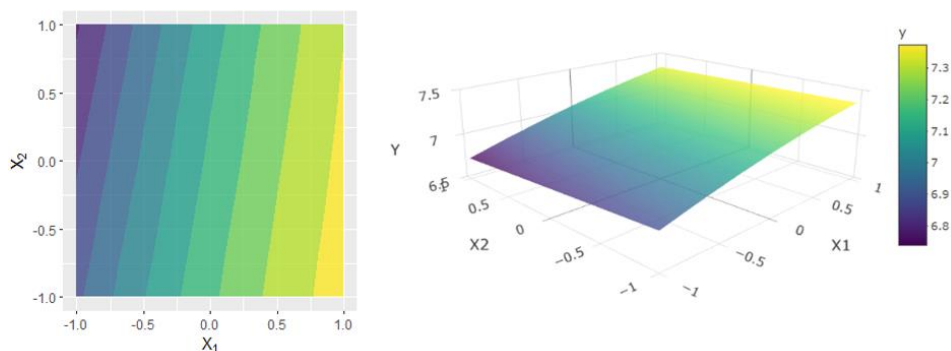
$$\begin{aligned} \tilde{y}_{(2)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}) = \\ = 7,129 + 0,271x_1 - 0,046x_2 + 0,024x_1x_2 - 0,047x_1^2 - 0,002x_2^2. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Niech punkty obszaru eksperymentowania będą elementami zbioru $E \times E$, gdzie $E = \left\{-1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$. Łącznie obszar eksperymentowania obejmuje 49 punktów. Zadaniem eksperymentatora jest wskazanie dziesięciu różnych punktów obszaru eksperymentowania, w których należy przeprowadzić kolejne doświadczenia. Zgodnie z proponowaną metodą konstrukcji planu eksperymentu, należy oszacować wartości funkcji powierzchni odpowiedzi dla wszystkich punktów obszaru eksperymentowania. Graficzną prezentację funkcji powierzchni odpowiedzi postaci (3.25) oraz (3.26) przedstawiają odpowiednio rysunki 3.5 oraz 3.6. W kolejnym etapie należy zbadać autokorelację przestrzenną punktów obszaru eksperymentowania. Dla wartości zmiennej wynikowej szacowanej zgodnie z modelami (3.25) i (3.26) statystyka globalna Morana wynosi odpowiednio $I_{(1)} = 0,8777$ oraz $I_{(2)} = 0,8722$. Wyznaczone statystyki są istotne ($p\text{-value}_{(1)} = p\text{-value}_{(2)} \approx 0$), co wskazuje na dodatnią autokorelację przestrzenną. Szczegółowych informacji dotyczących autokorelacji przestrzennej każdego z punktów obszaru eksperymentowania dostarcza statystyka lokalna Morana. Graficzną prezentację wyznaczonych wartości statystyk lokalnych Morana dla każdego z punktów obszaru eksperymentowania, dla modeli (3.25) oraz (3.26), przedstawia rysunek 3.7. Rysunek 3.8 prezentuje te punkty obszaru eksperymentowania, dla których wartości statystyk lokalnych Morana nie są istotne.



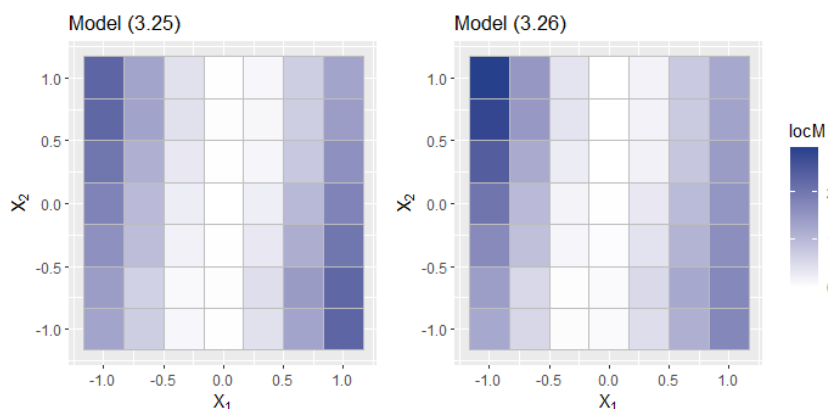
Rysunek 3.5. Wartości funkcji powierzchni odpowiedzi postaci (3.25)

Źródło: Opracowanie własne.



Rysunek 3.6. Wartości funkcji powierzchni odpowiedzi postaci (3.26)

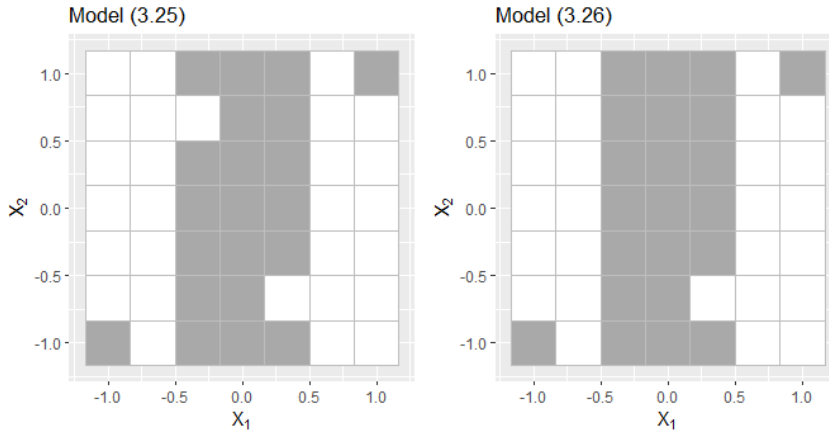
Źródło: Opracowanie własne.



Rysunek 3.7. Wartości statystyk lokalnych Morana dla funkcji powierzchni odpowiedzi postaci (3.25) oraz (3.26)

Źródło: Opracowanie własne.

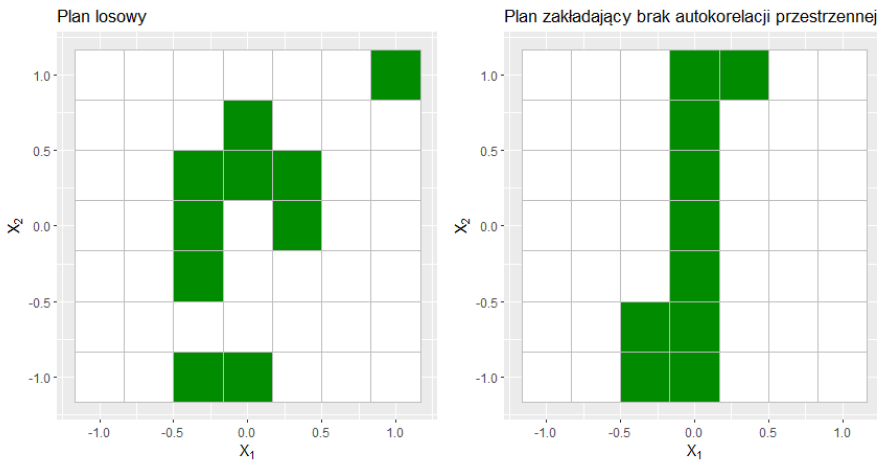
Spośród wskazanych punktów obszaru eksperymentowania należy wybrać dziesięć, które będą określać plan eksperymentu. Wybór tych punktów może być losowy lub zdeterminowany przez wartości statystyki lokalnej Morana – w rozważanym przykładzie wybór dziesięciu punktów, dla których wartość statystyki lokalnej Morana jest bliska 0. Tak wyznaczone plany eksperymentów przedstawiają rysunki 3.9 oraz 3.10.



Rysunek 3.8. Punkty obszaru eksperymentowania, dla których wartość statystyki lokalnej Morana nie jest istotna

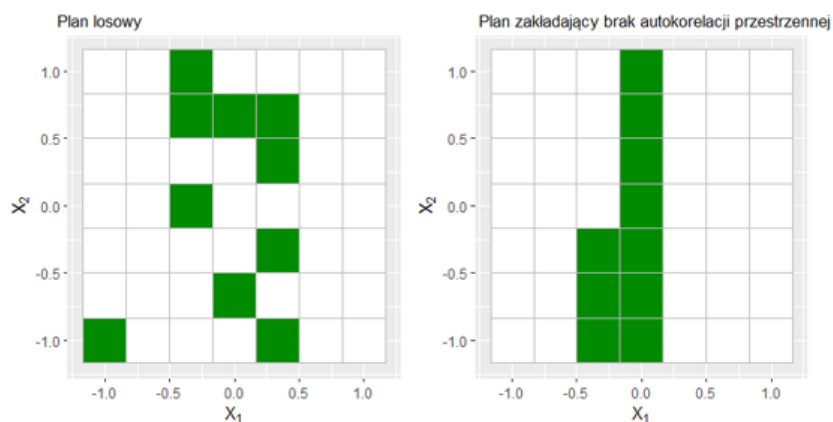
Źródło: Opracowanie własne.

Funkcje powierzchni odpowiedzi postaci (3.25) oraz (3.26) zostały oszacowane z wykorzystaniem metody najmniejszych kwadratów. Stąd możliwe jest wyznaczenie wariancji funkcji powierzchni odpowiedzi (por. Wawrzynek, 1993). Rysunki 3.11 oraz 3.12 przedstawiają wartości wariancji funkcji powierzchni odpowiedzi dla modeli (3.25) oraz (3.26).



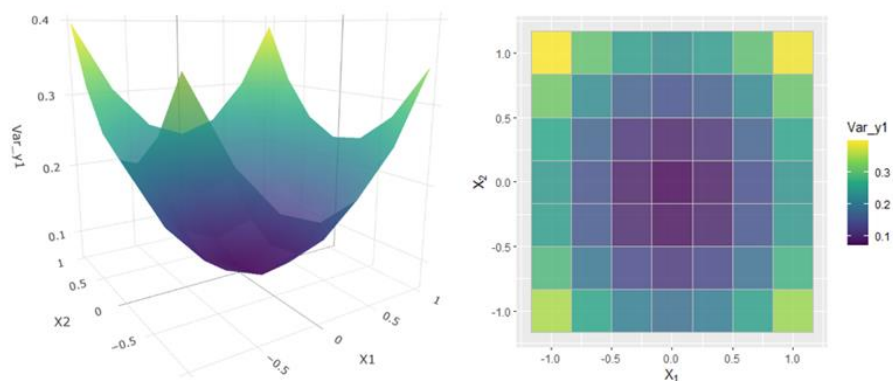
Rysunek 3.9. Schematy planów eksperymentów wyznaczone na podstawie wartości statystyk lokalnych Morana dla modelu (3.25)

Źródło: Opracowanie własne.



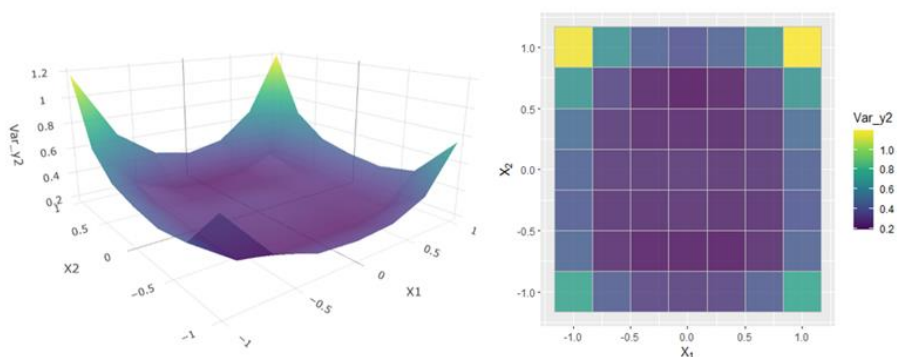
Rysunek 3.10. Schematy planów eksperymentów wyznaczone na podstawie wartości statystyk lokalnych Morana dla modelu (3.26)

Źródło: Opracowanie własne.



Rysunek 3.11. Wartości wariancji funkcji powierzchni odpowiedzi dla modelu (3.25)

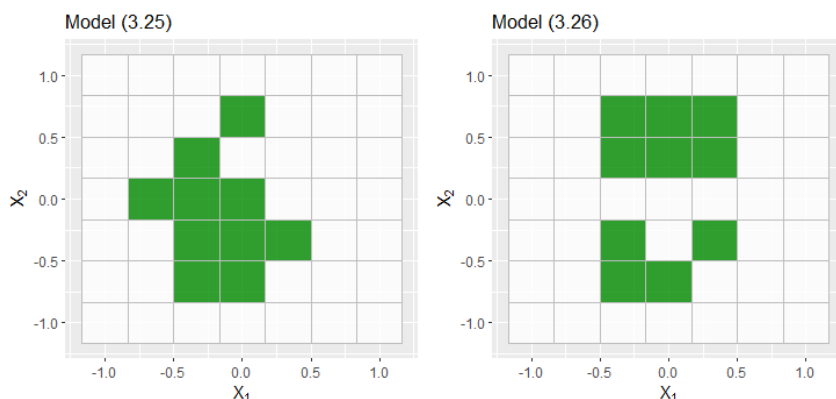
Źródło: Opracowanie własne.



Rysunek 3.12. Wartości wariancji funkcji powierzchni odpowiedzi dla modelu (3.26)

Źródło: Opracowanie własne.

Plany eksperymentów uwzględniające doświadczenia w punktach obszaru eksperymentowania, dla których autokorelacja przestrzenna nie jest istotna oraz wariancja funkcji powierzchni odpowiedzi przyjmuje jak najmniejsze wartości, przedstawia rysunek 3.13. Wyznaczone w ten sposób plany eksperymentów zapewniają jednocześnie losowość doświadczeń, jak również odpowiednią precyzję oszacowania funkcji powierzchni odpowiedzi.



Rysunek 3.13. Schematy planów eksperymentów wyznaczone na podstawie wartości statystyk lokalnych Morana oraz wartości wariancji funkcji powierzchni odpowiedzi

Źródło: Opracowanie własne.

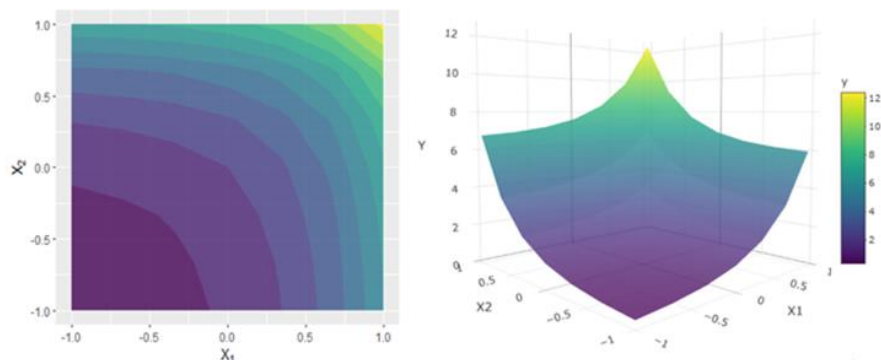
Zaproponowana konstrukcja planu eksperymentu może zostać wykorzystana wtedy, gdy funkcja powierzchni odpowiedzi jest postaci ściśle nieliniowej. Niech zatem funkcja powierzchni odpowiedzi dana będzie wzorem:

$$\tilde{y}_{(3)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}) = \beta_1^{x_1} + \beta_2^{x_2}. \quad (3.27)$$

W celu oszacowania parametrów rozważanej funkcji powierzchni odpowiedzi wykorzystano metody iteracyjne. Oszacowana funkcja powierzchni odpowiedzi jest postaci:

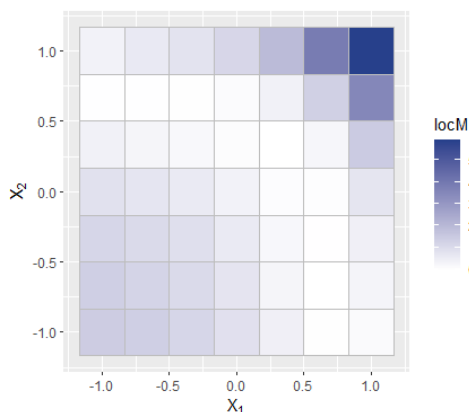
$$\tilde{y}_{(3)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}) = 5,802^{x_1} + 6,581^{x_2}. \quad (3.28)$$

Graficzną prezentację wartości funkcji powierzchni odpowiedzi (3.28) dla zadanego obszaru eksperymentowania przedstawia rysunek 3.14. Wartość statystyki globalnej Morana wynosi $I_{(3)} = 0,8238$ i jest istotna, co świadczy o dodatniej autokorelacji przestrzennej oszacowanych wartości zmiennej wynikowej w rozważanym obszarze eksperymentowania. Wyznaczone wartości statystyk lokalnych Morana w poszczególnych punktach obszaru przedstawia rysunek 3.15.



Rysunek 3.14. Wartości funkcji powierzchni odpowiedzi postaci (3.28)

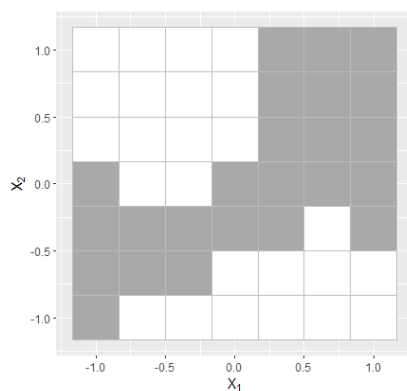
Źródło: Opracowanie własne.



Rysunek 3.15. Wartości statystyk lokalnych Morana dla funkcji powierzchni odpowiedzi postaci (3.28)

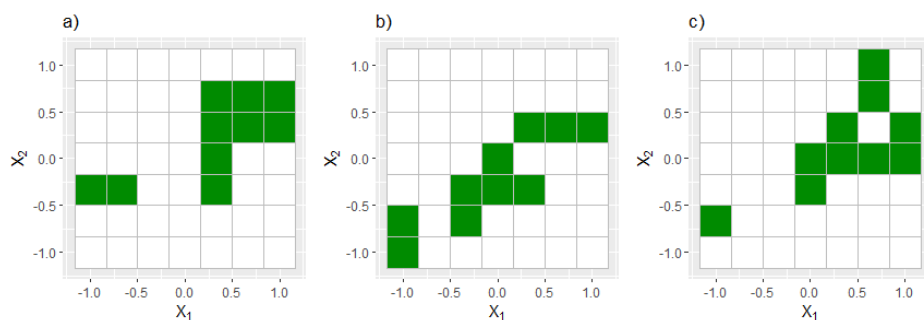
Źródło: Opracowanie własne.

Zgodnie z procedurą proponowanej konstrukcji planu eksperymentu wskazane zostały punkty obszaru eksperymentowania, dla których statystyki lokalne Morana nie są istotne (rysunek 3.16). Wówczas przez losowy dobór ustalonej liczby doświadczeń, spośród wskazanych punktów obszaru eksperymentowania, można utworzyć plan eksperymentu. Przykładowe plany eksperymentów dla losowego doboru doświadczeń przedstawia rysunek 3.17. Ponadto ustalono również plan eksperymentu poprzez wybór dziesięciu punktów obszaru eksperymentowania, dla których statystyki lokalne Morana przyjmują najmniejsze wartości (rysunek 3.18).



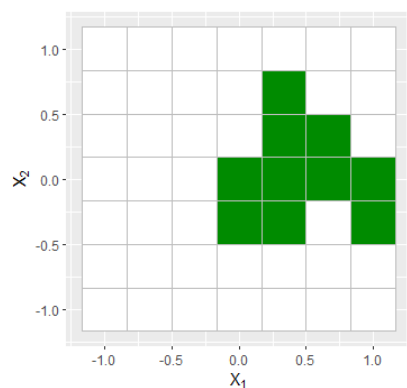
Rysunek 3.16. Punkty obszaru eksperymentowania, dla których wartość statystyki lokalnej Morana nie jest istotna

Źródło: Opracowanie własne.



Rysunek 3.17. Schematy planów eksperymentów ustalone w sposób losowy dla modelu (3.28)

Źródło: Opracowanie własne.



Rysunek 3.18. Schemat planu eksperymentu uwzględniający wartości statystyk lokalnych Morana dla modelu (3.28)

Źródło: Opracowanie własne.

Zaproponowana konstrukcja planu eksperymentu stanowi nieklasyczne podejście dla schematu tworzenia planów eksperymentów typu *space-filling*. Wykorzystanie statystyk globalnych i lokalnych Morana pozwala na wskazanie ustalonej liczby punktów obszaru eksperymentowania, dla których nie występuje autokorelacja przestrzenna. W szczególności przedstawiona procedura wyboru kolejnych doświadczeń ma istotne znaczenie w przypadku estymacji nieliniowej postaci funkcji powierzchni odpowiedzi. Należy zaznaczyć, że liczba wskazanych doświadczeń w planie może być określona indywidualnie dla analizowanego problemu, w zależności od przewidywanych kosztów eksperymentu lub czasu jego realizacji.

Przedstawiony plan eksperymentu może być zastosowany nie tylko w przypadku analizy rezultatów procesu produkcyjnego czy fizyko-chemicznego. Proponowana konstrukcja planu eksperymentu może zostać wdrożona w analizach przestrzennych dotyczących na przykład badania składu lub jakości gleby czy poziomu zanieczyszczenia powietrza, dotyczących niewielkich powierzchni. W szczególności wtedy, gdy związek pomiędzy zmienną wynikową a czynnikami jest nieliniowy.

3.2.3. Wykorzystanie metody bootstrap w estymacji funkcji powierzchni odpowiedzi

W metodologii powierzchni odpowiedzi można wskazać trzy główne problemy: wybór modelu powierzchni odpowiedzi, dobór metody estymacji parametrów modelu oraz ustalenie planu eksperymentu. Powszechnie uznawanym i zazwyczaj stosowanym modelem opisującym zależność zmiennej wynikowej i zmiennych objaśniających jest ogólny model liniowy regresji. Z kolei najczęściej stosowaną metodą estymacji parametrów funkcji powierzchni odpowiedzi, zadanej w postaci ogólnego modelu liniowego, jest metoda najmniejszych kwadratów. Uzyskane w ten sposób oszacowania parametrów funkcji powierzchni odpowiedzi charakteryzują się optymalnymi własnościami, co stanowi uzasadnienie wykorzystania metody najmniejszych kwadratów w teorii planowania eksperymentów. W znaczącym stopniu optymalne własności uzyskanych estymatorów związane są ze spełnieniem założenia zgodności rozkładu zmiennej wynikowej z rozkładem normalnym (Wawrzynek, 1993).

Planowanie eksperymentów, w tym analiza funkcji powierzchni odpowiedzi, dotyczy zazwyczaj niewielkiego zbioru realizacji zmiennej wynikowej. Wówczas możliwe jest niespełnienie założenia dotyczącego rozkładu badanej zmiennej (lub składnika losowego), pomimo braku podstaw do odrzucenia hipo-

tezy dotyczącej zgodności tego rozkładu z rozkładem normalnym. Problem ten może zostać rozwiązany dzięki wykorzystaniu metod symulacyjnych, a w szczególności metody bootstrap.

Idea metody bootstrap została zaproponowana przez B. Efrona (1979). Wykorzystanie metody bootstrap w teorii estymacji pozwala na aproksymację rozkładów estymatorów, ocenę ich wariancji oraz umożliwia skonstruowanie przedziałów ufności dla parametrów populacji. Metoda ta znajduje zastosowanie również w weryfikacji hipotez statystycznych, umożliwiając aproksymację rozkładów statystyk testowych. Ponadto aplikacja metody bootstrap może prowadzić do sformułowania nowych procedur estymacji czy testów statystycznych (Kończak, 2012).

Niech dana będzie zmienna losowa X o nieznanym rozkładzie F badana w pewnej populacji. Wtedy przez $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ oznacza się realizację próby prostej $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ pobranej z rozważanej populacji. Rozkładem bootstrapowym z próby nazywa się rozkład prawdopodobieństwa postaci (Domański, Pruska, 2000):

$$P(X_B = x_k) = \frac{1}{n}, \text{ dla } k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.29)$$

Wektor losowy $(X_1^*, X_2^*, \dots, X_m^*)$, gdzie X_k^* , dla $k = 1, 2, \dots, m$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie (3.29), nazywany będzie próbą bootstrapową. Wtedy realizację próby bootstrapowej oznacza się przez $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*)$.

W celu oszacowania parametru θ zmiennej losowej X wykorzystuje się estymator $\hat{\theta}$. Metoda bootstrap służąca do oceny parametru θ polega na N -krotnym ($N \geq 1000$) wylosowaniu zwrotnym n -elementowych prób bootstrapowych. Dla każdej z wylosowanych prób bootstrapowych wyznaczana jest wartość estymatora $\hat{\theta}_i^*$, $i = 1, 2, \dots, N$, z wykorzystaniem formuły estymatora $\hat{\theta}$. Wyznaczone wartości $\hat{\theta}_i^*$ stanowią realizację rozkładu empirycznego statystyki bootstrapowej $\hat{\theta}^*$. Wówczas wartość estymatora bootstrapowego parametru θ obliczana jest zgodnie ze wzorem:

$$\bar{\theta}^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\theta}_i^*. \quad (3.30)$$

Wtedy oszacowanie wariancji estymatora parametru $\hat{\theta}$ można wyznaczyć ze wzoru:

$$\hat{V}(\hat{\theta}) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\hat{\theta}_i^* - \bar{\theta}^*)^2 \quad (3.31)$$

lub

$$\hat{V}(\hat{\theta}) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\hat{\theta}_i^* - \bar{\theta})^2. \quad (3.32)$$

Wykorzystanie metody bootstrap w celu estymacji przedziałowej parametru θ sprowadza się do utworzenia przedziału ufności zazwyczaj na dwa sposoby: na podstawie percentyli rozkładu empirycznego statystyki bootstrapowej $\hat{\theta}^*$ lub z wykorzystaniem metody *t*-bootstrapowej (Domański, Pruska, 2000; Kończak, 2012).

Przedział ufności wyznaczony na podstawie percentyli rozkładu empirycznego statystyki $\hat{\theta}^*$, dla ustalonego poziomu ufności $1 - \alpha$, jest postaci:

$$(\hat{\theta}_{\alpha/2}^*, \hat{\theta}_{1-\alpha/2}^*), \quad (3.33)$$

gdzie $\hat{\theta}_{\alpha/2}^*$ oraz $\hat{\theta}_{1-\alpha/2}^*$ są kwantylami rzędu odpowiednio $\frac{\alpha}{2}$ oraz $1 - \frac{\alpha}{2}$ rozkładu empirycznego statystyki $\hat{\theta}^*$. Przedziały ufności wyznaczone metodą percentyli nie wykazują odpowiednio dobrych własności związanych z pokryciem nieznannej wartości szacowanego parametru (Efron, Tibshirani, 1993). Wówczas w celu wyznaczenia skorygowanego przedziału ufności można wykorzystać metodę BCa (*bias-corrected and accelerated*), która pozwala na poprawę dokładności oszacowania krańców przedziału (3.33) (Efron, Tibshirani, 1993). Przedział ufności skonstruowany z wykorzystaniem metody BCa jest postaci:

$$(\hat{\theta}_{\alpha_1}^*, \hat{\theta}_{\alpha_2}^*), \quad (3.34)$$

gdzie $\hat{\theta}_{\alpha_1}^*$ oraz $\hat{\theta}_{\alpha_2}^*$ są kwantylami rzędu odpowiednio α_1 oraz α_2 rozkładu empirycznego statystyki $\hat{\theta}^*$. Przy czym:

$$\alpha_1 = \phi \left(\hat{z} + \frac{\hat{z} + z_{\alpha/2}}{1 - \hat{a}(\hat{z} + z_{\alpha/2})} \right), \quad (3.35)$$

$$\alpha_2 = \phi \left(\hat{z} + \frac{\hat{z} + z_{1-\alpha/2}}{1 - \hat{a}(\hat{z} + z_{1-\alpha/2})} \right), \quad (3.36)$$

gdzie ϕ jest dystrybuantą rozkładu normalnego standardowego, $z_{\alpha/2}$ oraz $z_{1-\alpha/2}$ są kwantylami rzędu odpowiednio $\frac{\alpha}{2}$ oraz $1 - \frac{\alpha}{2}$ standardowego rozkładu normalnego. Wartość współczynnika korygującego $\hat{z}$ wyraża się wzorem:

$$\hat{z} = \phi^{-1} \left(\frac{\text{card} \{i: \hat{\theta}_i^* < \hat{\theta}\}}{N} \right). \quad (3.37)$$

Jednym ze sposobów oszacowania współczynnika α jest wyznaczenie wartości formuły:

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{\theta}_i^J - \bar{\theta})^3}{6 \left(\sum_{i=1}^n (\hat{\theta}_i^J - \bar{\theta})^2 \right)^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.38)$$

gdzie $\bar{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\theta}_i^J$, natomiast $\hat{\theta}_i^J$ jest oszacowaniem parametru $\hat{\theta}$ na podstawie próby, dla której usunięto i -tą obserwację.

Wyznaczenie przedziału ufności metodą t -bootstrapową, przy poziomie ufności $1 - \alpha$, polega na utworzeniu przedziału postaci:

$$\left(\hat{\theta} - t_{1-\alpha/2}^* D(\hat{\theta}), \hat{\theta} + t_{\alpha/2}^* D(\hat{\theta}) \right), \quad (3.39)$$

gdzie $t_{1-\alpha/2}^*$ oraz $t_{\alpha/2}^*$ są percentylami rzędu, odpowiednio, $1 - \frac{\alpha}{2}$ oraz $\frac{\alpha}{2}$ rozkładu empirycznego statystyki bootstrapowej $t^* = \frac{\hat{\theta}^* - \hat{\theta}}{\hat{D}(\hat{\theta}^*)}$, natomiast $D(\hat{\theta})$ jest odchy-

leniem standardowym estymatora $\hat{\theta}$.

Metoda bootstrap znajduje również zastosowanie w estymacji parametrów funkcji regresji z wykorzystaniem estymatorów uzyskanych metodą najmniejszych kwadratów (Domański, Pruska, 2000). Można wyróżnić dwa rodzaje takich metod estymacji skonstruowane na podstawie wartości składnika losowego (*bootstrapping residuals*) oraz z jednoczesnym uwzględnieniem realizacji zmiennych objaśniających i zmiennej wynikowej (*bootstrapping pairs*, Efron, Tibshirani, 1993).

Niech dany będzie model opisujący zależność zmiennej wynikowej Y i wektora zmiennych objaśniających $\mathbf{x}$, postaci:

$$y_i = f(\mathbf{x}_i, \beta) + \varepsilon_i, \text{ dla } i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.40)$$

gdzie y_i jest wartością zmiennej wynikowej, $\mathbf{x}_i$ jest realizacją wektora zmiennych objaśniających, β stanowi wektor nieznanych parametrów modelu, natomiast ε_i jest wartością składnika losowego. Wówczas bootstrapowa metoda estymacji

wektora β parametrów modelu (3.40), opierająca się na wartościach składnika losowego, może zostać przedstawiona w następujących etapach:

1. Wyznaczenie wartości estymatora $\hat{\beta}$ za pomocą metody najmniejszych kwadratów.
2. Oszacowanie wartości składników losowych zgodnie ze wzorem $\hat{\varepsilon}_i = y_i - f(\mathbf{x}_i, \hat{\beta})$.
3. Wygenerowanie próby bootstrapowej $(\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \dots, \varepsilon_n^*)$ zgodnie z rozkładem prawdopodobieństwa postaci $P(Z = \hat{\varepsilon}_i) = \frac{1}{n}$, dla $i = 1, 2, \dots, n$.
4. Utworzenie próby $(Y_1^*, Y_2^*, \dots, Y_n^*)$ o realizacjach $y_i^* = f(\mathbf{x}_i, \hat{\beta}) + \varepsilon_i^*$ dla $i = 1, 2, \dots, n$.
5. Oszacowanie wektora β parametrów modelu za pomocą metody najmniejszych kwadratów na podstawie uzyskanych wartości $(y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*)$.

W wyniku N -krotnej replikacji trzech ostatnich etapów zostaną wyznaczone wartości $(\hat{\beta}_1^*, \hat{\beta}_2^*, \dots, \hat{\beta}_N^*)$, które wyznaczają bootstrapowy rozkład estymatora $\hat{\beta}$ szacowanego z wykorzystaniem metody najmniejszych kwadratów. Na podstawie otrzymanego rozkładu empirycznego dla każdego z parametrów można wyznaczyć przedziały ufności postaci (3.33), (3.34) lub (3.39).

Bootstrapowa metoda estymacji parametrów modelu (3.40) uwzględniająca jednoczesne repróbkiwanie wartości zmiennych przebiega w podobny sposób jak w przypadku metody opartej na wartościach składnika losowego. Przy czym w miejsce oszacowania poszczególnych wartości składnika losowego $\hat{\varepsilon}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) wykorzystuje się pary postaci $\mathbf{c}_i = (\mathbf{x}_i, y_i)$, dla $i = 1, 2, \dots, n$. Wówczas dla N realizacji prób bootstrapowych postaci $(\mathbf{c}_1^*, \mathbf{c}_2^*, \dots, \mathbf{c}_N^*)$ należy oszacować wartość estymatora $\hat{\beta}$, w wyniku czego otrzymuje się bootstrapowy rozkład empiryczny. Wybór jednej z przedstawionych metod estymacji parametrów funkcji regresji powinien być uwarunkowany przez specyfikę rozważanego zbioru danych (Efron, Tibshirani, 1993). Jeżeli wartości zmiennych objaśniających są ustalone, to zalecana jest estymacja funkcji powierzchni odpowiedzi z wykorzystaniem próbkowania składnika losowego. W przypadku gdy zmienne objaśniające mają charakter losowy, reprobkiwaniu podlegają pary realizacji zmiennych objaśniających i zmiennej objaśnianej.

Zastosowanie metody bootstrap w metodologii planowania eksperymentów zaproponowała M. Szerszunowicz w dwóch obszarach: w celu estymacji parametrów funkcji powierzchni odpowiedzi (Szerszunowicz, 2014a, 2016) oraz w zagadnieniach związanych z poszukiwaniem optymalnych planów eksperymentów (Szerszunowicz, 2014b). W wymienionych rozważaniach estymacja funkcji po-

wierzchni odpowiedzi przeprowadzana jest z wykorzystaniem metody bootstrap z uwzględnieniem próbkowania składnika losowego. Podejście to jest uzasadnione ze względu na specyfikę danych, będących rezultatem przeprowadzenia doświadczeń zgodnie z ustalonym planem eksperymentu (wartość zmiennej wynikowej uzyskana jest dla jednoznacznie ustalonych wartości czynników).

Niech dane będą wyniki symulacji komputerowej przeprowadzonej przez eksperymentatora, dotyczące zarządzania zapasami ustalonych produktów (Montgomery, 2013). Zmienna wynikowa Y stanowi całkowity koszt utrzymania zapasów, natomiast zmienne objaśniające to wielkość zamówienia (ξ_1) oraz punkt zamawiania (ξ_2), czyli poziom sygnalizujący konieczność uzupełnienia zapasów. Wyniki badania, wraz z wyznaczonymi poziomami czynników zgodne ze wzorami (3.23) oraz (3.24), przedstawia tabela 3.9.

Tabela 3.9. Dane procesu zarządzania zapasami ustalonych produktów

Lp.	Wielkość zamówienia ξ_{i1}	Punkt zamawiania ξ_{i2}	x_{i1}	x_{i2}	y_i
1	350,00	65,00	-1,00	-1,00	625,00
2	390,00	85,00	-0,11	-0,33	670,00
3	440,00	65,00	1,00	-1,00	663,00
4	390,00	105,00	-0,11	0,33	654,00
5	400,00	85,00	0,11	-0,33	648,00
6	350,00	125,00	-1,00	1,00	634,00
7	400,00	105,00	0,11	0,33	692,00
8	440,00	125,00	1,00	1,00	686,00
9	395,00	95,00	0,00	0,00	680,00
10	395,00	95,00	0,00	0,00	674,00
11	395,00	95,00	0,00	0,00	681,00

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: Montgomery (2013).

Zadaniem eksperymentatora jest ustalenie takich zakresów poziomów wielkości zamówienia i punktu zamawiania, dla których algorytm symulacji kosztów utrzymania zapasów będzie charakteryzował się najlepszymi właściwościami. M. Szerszunowicz (2014b) przedstawia metodę wyznaczania planów eksperymentu przy zadanych warunkach, która uwzględnia odpowiednio skonstruowany obszar ufności dla funkcji powierzchni odpowiedzi. Metoda ta wykorzystuje oszacowanie funkcji powierzchni odpowiedzi metodą bootstrap z uwzględnieniem próbkowania składnika losowego. Na podstawie przedziałów ufności parametrów funkcji powierzchni odpowiedzi utworzonych w oparciu o percentyle ich rozkładów bootstrapowych, wyznaczane są funkcje, które stanowią dolne i górne oszacowanie funkcji powierzchni odpowiedzi. Obszar ufności wyznaczony przez

dolne i górne oszacowania jest podstawą do wskazania punktów obszaru eksperymentowania, dla którego oszacowanie funkcji powierzchni odpowiedzi charakteryzuje się najlepszą precyzją. Ponadto wskazane punkty pozwalają na kontynuację analizy funkcji powierzchni odpowiedzi, której celem jest ustalenie optymalnych wartości czynników.

W rozważanym badaniu, na podstawie wstępnych analiz, ustalono, że związek pomiędzy zmienną wynikową a czynnikami zostanie opisany przez wielomian stopnia drugiego typu I dany wzorem:

$$\tilde{y}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}) = \beta_0 + \beta_1 x_1^2 + \beta_2 x_2^2 + \beta_3 x_1 + \beta_4 x_2 + \beta_5 x_1 x_2. \quad (3.41)$$

Zgodnie z procedurą estymacji parametrów funkcji powierzchni odpowiedzi metodą bootstrap, uzyskano oszacowanie parametrów modelu (3.41) z wykorzystaniem metody najmniejszych kwadratów postaci:

$$\begin{aligned} \tilde{y}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\beta}}_{MKN}) = \\ = 678,33 + 95,25x_1^2 - 121,58x_2^2 + 22,66x_1 + 9,30x_2 + 4,05x_1x_2 \end{aligned} \quad (3.42)$$

Następnie wygenerowano 1000-krotnie próby bootstrapowe reszt modelu oraz oszacowano wartości wektora estymatorów parametrów rozważanej funkcji powierzchni odpowiedzi. Na podstawie uzyskanych rozkładów bootstrapowych estymatorów parametrów oszacowano punktowo i przedziałowo parametry funkcji powierzchni odpowiedzi (3.41). Punktowo oszacowano parametry zgodnie ze wzorem (3.30). Poszczególne przedziały ufności, ze względu na własności precyzji oszacowań, zostały wyznaczone za pomocą metody BCa postaci (3.34), dla ustalonego poziomu ufności $1 - \alpha = 0,95$. Wyniki przeprowadzonych obliczeń przedstawia tabela 3.10. Graficzną prezentację rozkładów bootstrapowych parametrów funkcji powierzchni odpowiedzi wraz z oszacowanymi wartościami parametrów i przedziałami ufności przedstawia rysunek 3.19.

Tabela 3.10. Wyniki oszacowań parametrów funkcji powierzchni odpowiedzi (3.41) metodą bootstrap

β_i	$\bar{\beta}_i^*$	$\hat{\beta}_{i(a_1)}^*$	$\hat{\beta}_{i(a_2)}^*$
β_0	678,47	663,01	690,70
β_1	97,55	-81,82	262,27
β_2	-124,14	-297,87	69,99
β_3	22,48	9,95	34,28
β_4	8,88	-1,29	21,16
β_5	4,16	-7,41	16,81

Źródło: Opracowanie własne.

Funkcja powierzchni odpowiedzi, której parametry zostały oszacowane z wykorzystaniem metody bootstrap, jest postaci:

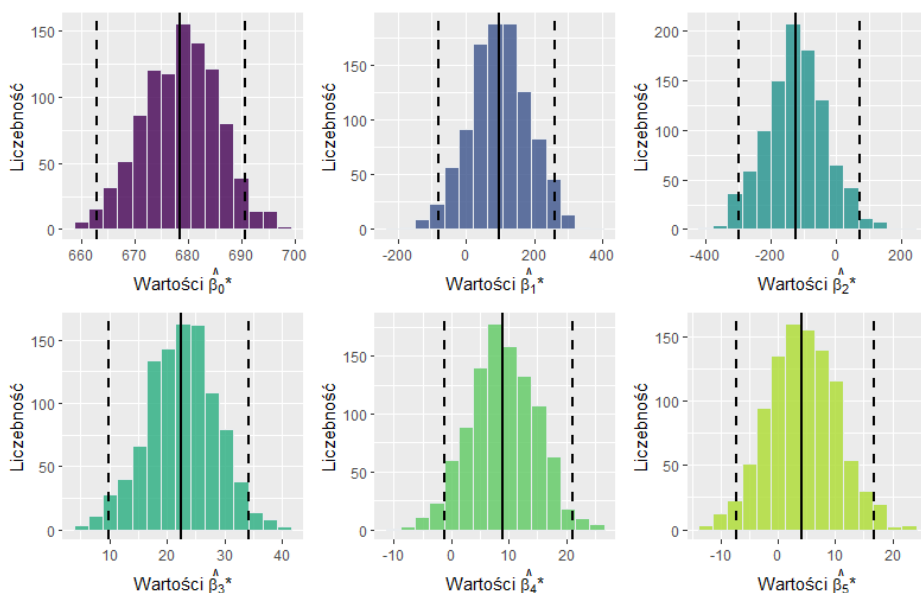
$$\begin{aligned} \tilde{y}_B(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\beta}}_B) = \\ = 678,47 + 97,55x_1^2 - 124,14x_2^2 + 22,48x_1 + 8,88x_2 + 4,16x_1x_2 \end{aligned} \quad (3.43)$$

Dolne i górne oszacowania funkcji powierzchni odpowiedzi dane są wzorami:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_L(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\beta}}_B) = \\ = 663,01 - 81,82x_1^2 - 297,87x_2^2 + 9,95x_1 - 1,29x_2 - 7,41x_1x_2 \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} \tilde{y}_U(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\beta}}_B) = \\ = 690,70 + 262,27x_1^2 + 69,99x_2^2 + 34,28x_1 + 21,16x_2 + 16,81x_1x_2 \end{aligned} \quad (3.45)$$

Graficzną prezentację wyznaczonych funkcji powierzchni odpowiedzi (3.43), (3.44) oraz (3.45) przedstawiają odpowiednio rysunki 3.20, 3.21 oraz 3.22. Wyznaczony obszar ufności dla funkcji powierzchni odpowiedzi prezentuje rysunek 3.23.



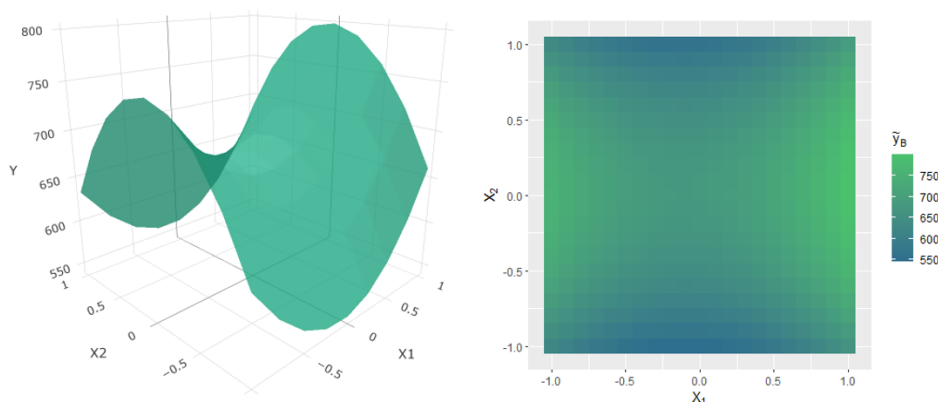
Rysunek 3.19. Rozkłady bootstrapowe parametrów funkcji powierzchni odpowiedzi postaci (3.41)

Źródło: Opracowanie własne.

W celu określenia poszukiwanych zakresów czynników uwzględniono punkty rozważanego obszaru eksperymentowania postaci:

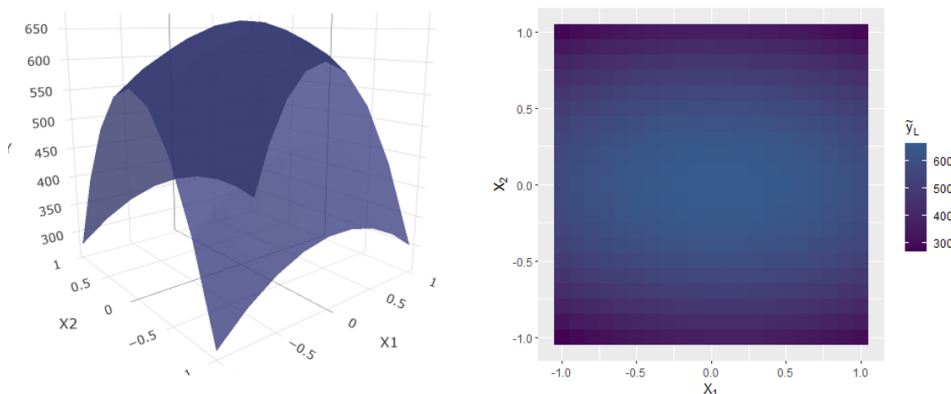
$$D = \{(x_1, x_2) : x_1 = -1 + 0,1k \wedge x_2 = -1 + 0,1k, k = 1, 2, \dots, 20\}. \quad (3.46)$$

Wyznaczono po 100 punktów obszaru D , dla których różnice wartości funkcji (3.43) i (3.44) oraz funkcji (3.45) i (3.43) są najmniejsze. Punkty, dla których wyznaczone różnice jednocześnie przyjmują najmniejsze wartości, określają fragment obszaru eksperymentowania, w którym funkcja powierzchni odpowiedzi charakteryzuje się najlepszą precyzją (rysunek 3.24).



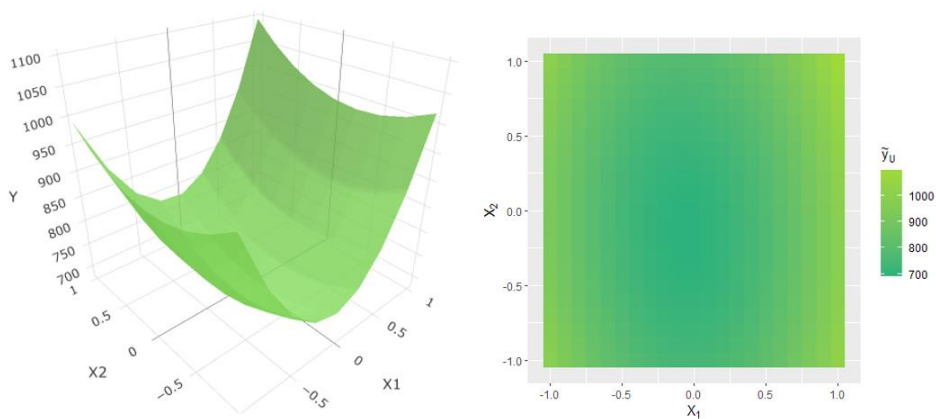
Rysunek 3.20. Funkcja powierzchni odpowiedzi postaci (3.43)

Źródło: Opracowanie własne.



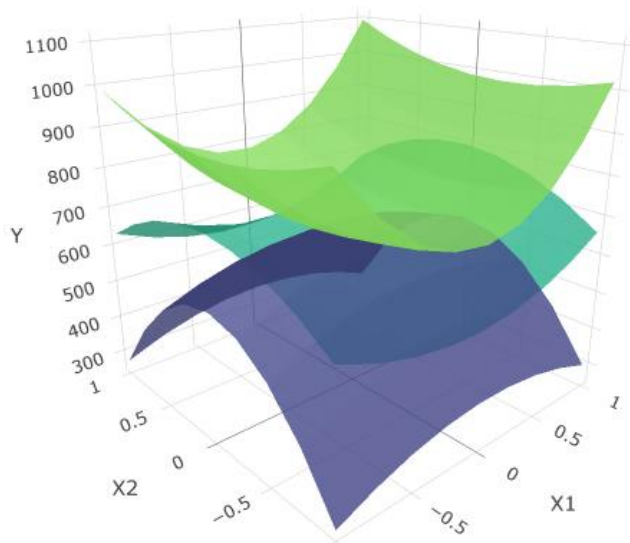
Rysunek 3.21. Funkcja powierzchni odpowiedzi postaci (3.44)

Źródło: Opracowanie własne.



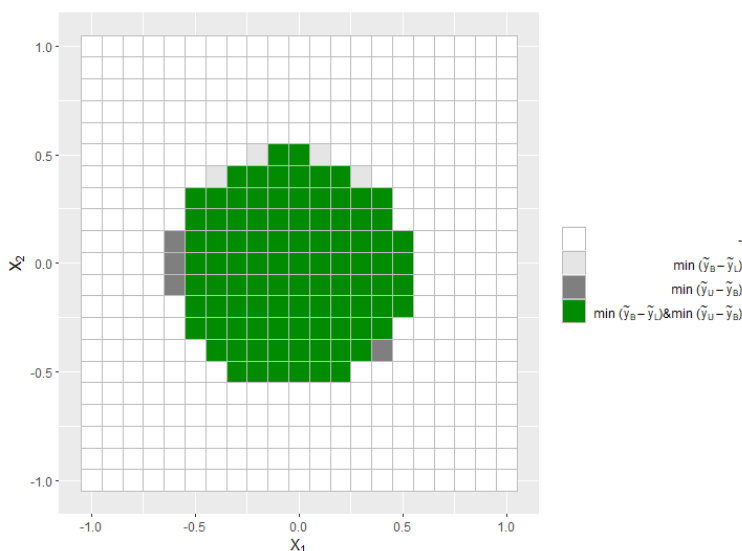
Rysunek 3.22. Funkcja powierzchni odpowiedzi postaci (3.45)

Źródło: Opracowanie własne.



Rysunek 3.23. Obszar ufności wyznaczony dla funkcji powierzchni odpowiedzi (3.43)

Źródło: Opracowanie własne.



Rysunek 3.24. Punkty obszaru eksperymentowania, dla których oszacowanie funkcji powierzchni odpowiedzi charakteryzuje się największą precyzją

Źródło: Opracowanie własne.

Na podstawie przeprowadzonych obliczeń wykazano, że dalsza analiza funkcji powierzchni odpowiedzi powinna zostać przeprowadzona dla obszaru eksperymentowania postaci:

$$D^* = \{(x_1, x_2) : x_1 \in \langle -0,5; 0,5 \rangle \wedge x_2 \in \langle -0,5; 0,5 \rangle\}. \quad (3.47)$$

Zatem czynnik określający wielkość zamówienia powinien przyjmować wartości $372,5 \leq \xi_1 \leq 417,5$, natomiast czynnik określający punkt zamawiania wartości z zakresu $80 \leq \xi_2 \leq 110$.

Eksperymentator zazwyczaj poszukuje takich funkcji opisujących proces, które pozwolą najlepiej scharakteryzować badane zjawisko. Zatem precyzja uzyskanego oszacowania ma istotne znaczenie ze względów praktycznych. Zaproponowana przez M. Szerszunowicz (2014b) metoda poszukiwania optymalnych warunków analizy funkcji powierzchni odpowiedzi została rozszerzona o metodę BCa (*bias-corrected and accelerated*). Propozycja ta pozwala na poprawę dokładności oszacowania krańców przedziału ufności dla funkcji powierzchni odpowiedzi. W rezultacie możliwe jest wskazanie takiego obszaru eksperymentowania, dla którego oszacowanie zmiennej wynikowej będzie charakteryzowało się najlepszą dokładnością.

3.3. Zastosowanie testów permutacyjnych w procedurze planowania eksperymentów

Klasyczne procedury planowania eksperymentów związane są z zastosowaniem określonych metod statystycznych. W analizach zrealizowanych klasycznych planów eksperymentów najczęściej wykorzystuje się analizę wariancji oraz analizę regresji. Metody te wymagają spełnienia sprecyzowanych założeń, które dotyczą między innymi zgodności rozkładu zmiennej wynikowej lub reszt ustalonego modelu z rozkładem normalnym. Weryfikacja sformułowanego założenia wymaga przeprowadzenia odpowiednich testów statystycznych nazywanych testami normalności (Kończak, 2020). Wynikiem przeprowadzenia testu normalności może być odrzucenie hipotezy głoszącej o zgodności rozkładu badanej zmiennej z rozkładem normalnym. Wówczas wykorzystanie klasycznych metod w procedurze planowania eksperymentów jest nieuzasadnione. Warto zauważyć, że w przypadku stwierdzenia braku podstaw do odrzucenia hipotezy sprawdzanej, nie uzyskuje się jednoznacznego potwierdzenia, że dane pochodzą z populacji o rozkładzie normalnym. Ponadto specyfika realizacji eksperymentu, która niejednokrotnie nie pozwala na zapewnienie odpowiedniej liczebności próby, utrudnia rozważania zagadnień zgodności rozkładu badanej zmiennej z rozkładem normalnym w procedurach planowania eksperymentów.

Wraz z rozwojem mocy obliczeniowej komputerów wzrosło zainteresowanie możliwością wykorzystania metod symulacyjnych w procedurach wnioskowania statystycznego. Do takich metod zyskujących coraz szersze zastosowania zalicza się testy permutacyjne. W niniejszej części rozdziału przedstawiono propozycje wykorzystania testów permutacyjnych w wybranych obszarach metodologii planowania eksperymentów.

3.3.1. Konstrukcja testów permutacyjnych

W 1925 roku R.A. Fisher opublikował opracowanie zatytułowane *Statistical Methods for Research Workers*, w którym po raz pierwszy przedstawił ideę testu permutacyjnego. Kilka lat później, w 1937 roku, E.J.G. Pitman zaprezentował, w sposób bardziej formalny, konstrukcję testu permutacyjnego. Jednak wówczas testy permutacyjne nie uzyskały szerokiego zastosowania ze względu na towarzyszące im czasochłonne i złożone obliczenia. Dopiero na początku XXI wieku, gdy zdolności obliczeniowe komputerów zaczęły znacząco wzrastać, umożliwiając wielokrotne iteracje obliczeń, nastąpił intensywny rozwój metod i testów permutacyjnych.

Pojęcie testu permutacyjnego nie wiąże się bezpośrednio ze sformułowaniem ustalonego testu statystycznego. Test permutacyjny należy rozumieć jako ogólną metodę wyznaczania dokładnej wartości prawdopodobieństwa pewnego zdarzenia lub jego oszacowania (Kończak, 2016). W literaturze (Mielke, Berry, 2007) wymienia się trzy podejścia w konstruowaniu testu permutacyjnego:

- dokładny test permutacyjny (*an exact permutation test*), który uwzględnia permutację analizowanych danych na wszystkie możliwe sposoby;
- test permutacyjny skonstruowany w oparciu o aproksymację rozkładu na podstawie momentów (*a moment-approximation permutation test*), która pozwala na wyznaczenie oszacowania szukanego prawdopodobieństwa;
- test permutacyjny wykorzystujący metodę randomizacji (*a resampling-approximation permutation test*).

Obecnie najczęściej stosowanym podejściem w sformułowaniu testu permutacyjnego jest podejście wykorzystujące metodę randomizacji. Wówczas konstrukcja testu permutacyjnego jest zbliżona do idei testu dokładnego, przy czym nie uwzględnia wszystkich możliwych permutacji zbioru danych, a ich losowy podzbiór. W praktycznych zastosowaniach przyjmuje się, że liczba uwzględnianych permutacji zbioru danych powinna wynosić co najmniej 1000. Procedura przeprowadzenia testu permutacyjnego z wykorzystaniem randomizacji może zostać przedstawiona w następujących etapach (Good, 2005):

1. Sformułowanie weryfikowanych hipotez: sprawdzanej i alternatywnej.
2. Wybór postaci statystyki testowej T .
3. Obliczenie wartości statystyki testowej (T_0) na podstawie danych pochodzących z próby wyjściowej.
4. Obliczenie wartości statystyki testowej dla dostatecznie dużej liczby ($N \geq 1000$) permutacji zbioru danych, prowadzące do otrzymania zbioru wartości statystyk postaci $\{T_1, T_2, \dots, T_N\}$.
5. Wyznaczenie wartości ASL oraz podjęcie na jej podstawie odpowiedniej decyzji.

W ostatnim etapie powyższej konstrukcji testu permutacyjnego decyzja o odrzuceniu ustalonej hipotezy sprawdzanej lub o braku podstaw do jej odrzucenia podejmowana jest na podstawie wartości ASL (*achieved significance level*). Jeżeli dla testu permutacyjnego sformułowano dwustronną hipotezę alternatywną, to wartość ASL może być określona jako (Efron, Tibshirani, 1993):

$$ASL = P(|T_i| \geq |T_0|). \quad (3.48)$$

Wówczas przybliżoną wartość ASL wyznacza się zgodnie ze wzorem:

$$\hat{ASL} = \frac{\text{card}\{i : |T_i| \geq |T_0|\}}{N} \quad (3.49)$$

Jeżeli oszacowana wartość *ASL* jest mniejsza lub równa ustalonemu poziomowi istotności, to hipotezę sprawdzaną należy odrzucić na korzyść hipotezy alternatywnej. W przeciwnym przypadku stwierdza się brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej.

Należy zauważyć, że pomiędzy konstrukcją klasycznych testów parametrycznych a procedurą testów permutacyjnych zachodzą znaczące różnice. K.J. Berry, J.E. Johnston i P.W. Mielke (2014) jako najważniejsze z nich wymieniają:

- wykorzystanie w testach permutacyjnych wyłącznie danych pochodzących z próby;
- procedury testów permutacyjnych nie wymagają sformułowania dodatkowych założeń dotyczących postaci rozkładu w populacji;
- skuteczność zastosowania testów permutacyjnych w przypadku prób o małej liczebności;
- odporność testów permutacyjnych na występowanie wartości oddalonych.

Ponadto analizy symulacyjne pozwalają na określenie mocy testów permutacyjnych, która w wielu przypadkach jest zbliżona do mocy testów parametrycznych (Kończak, 2016). Procedura testów permutacyjnych pozwala na wyznaczenie wartości statystyk testowych dla dostatecznie dużej liczby permutacji zbioru danych, co stanowi przybliżenie procedury testów dokładnych (por. eksperyment *The Lady Tasting Tea* w podrozdziale 1.1).

Jednym z zasadniczych etapów testu permutacyjnego jest odpowiedni wybór postaci statystyki testowej *T*. Statystyka testowa powinna być określona tak, aby przyjmowała wartości z różnych zbiorów, w zależności od tego czy hipoteza sprawdzana jest prawdziwa, czy fałszywa. W literaturze zaleca się wybór takich statystyk testowych, które nie powodują trudności obliczeniowych, ponieważ wartość ustalonej statystyki testowej jest wyznaczana dla licznych permutacji zbioru danych (Kończak, 2016).

W teorii planowania eksperymentów do najczęściej wykorzystywanych metod statystycznych należą testy parametryczne. Znajdują one zastosowanie w analizie wyników klasycznych i czynnikowych planów eksperymentów, jak również w ocenie funkcji powierzchni odpowiedzi. Ograniczone koszty realizacji eksperymentu, uwarunkowania technologiczne lub fizyko-chemiczne przyczyniają się do przeprowadzenia niewielkiej liczby doświadczeń w eksperymencie. Wówczas ze względu na małą liczebność próby weryfikacja hipotez statystycznych z wykorzystaniem testów parametrycznych może prowadzić do sformułowania niewłaściwych wniosków i zaleceń dla badanego procesu lub zjawiska. M. Złotoś (2019, 2020) zwraca uwagę na możliwość wykorzystania testów permutacyjnych w wybranych obszarach planowania eksperymentów: w analizie wyników eksperymentu oraz w analizie funkcji powierzchni odpowiedzi.

3.3.2. Wykorzystanie testów permutacyjnych w analizie wyników eksperymentu

Realizacja doświadczeń, zgodnie z odpowiednio zaprojektowanym planem eksperymentu, prowadzi do uzyskania wartości zmiennej objaśnianej. Wynikiem doświadczeń realizowanych zgodnie z klasycznymi planami eksperymentów są wartości zmiennej wynikowej otrzymane dla poszczególnych wariantów czynników. Wówczas w celu oceny istotności wpływu rozważanych czynników na zmienną wynikową najczęściej wykorzystuje się odpowiednio sformułowaną analizę wariancji. Jeżeli eksperymentator uwzględnia replikacje poszczególnych doświadczeń, to analiza wyników eksperymentu może sprowadzać się do weryfikacji różnic wartości przeciętnej zmiennej wynikowej w kolejnych replikacjach. Należy zauważyć, że otrzymane wyniki zmiennej objaśnianej dla ustalonych kombinacji poziomów czynników w replikacjach powinny być rozważane w parach (Montgomery, 2013). Wówczas analiza wyników eksperymentu, polegająca na porównaniu wartości przeciętnych w dwóch replikacjach, może być przeprowadzona z wykorzystaniem testu t dla obserwacji sparowanych (Montgomery, 2013). Jeżeli rezultatem analizy przeprowadzonego eksperymentu ma być porównanie wartości przeciętnych w więcej niż dwóch replikacjach, to należy zastosować analizę wariancji lub metody porównań wielokrotnych. D.C. Montgomery (2013) spośród metod porównań wielokrotnych wartości przeciętnej wyróżnia test Tukeya oraz metodę najmniejszej istotnej różnicy Fishera. Wymienione testy parametryczne, wykorzystywane w analizie wyników eksperymentu, wymagają spełnienia założeń dotyczących postaci rozkładu zmiennej objaśnianej. Warunki, w jakich realizowany jest eksperyment lub zwiększone koszty przeprowadzenia doświadczeń, prowadzą do uzyskania niewielkiej liczby obserwacji zmiennej wynikowej. Wówczas jeżeli weryfikacja hipotezy sprawdzanej, dotyczącej postaci rozkładu zmiennej objaśnianej, prowadzi do stwierdzenia braku podstaw do odrzucenia tej hipotezy, to eksperymentator jednoznacznie nie może potwierdzić postaci rozkładu badanej zmiennej (Kończak, 2016). Stąd można przyjąć, że założenia klasycznych metod, a w szczególności testów parametrycznych, nie są spełnione. Jeżeli zastosowanie testów parametrycznych jest nieuzasadnione, to zazwyczaj należy stosować metody nieparametryczne, a F. Pesarin i L. Salmaso (2010) zalecają w takich przypadkach wykorzystanie testów permutacyjnych.

Niech dany będzie eksperyment uwzględniający czynnik X oraz zmienną wynikową Y . Czynnik X został ustalony na k poziomach, przy czym dla każdego z poziomów uzyskano n realizacji zmiennej wynikowej. Schemat eksperymentu przedstawia tabela 3.11.

Tabela 3.11. Schemat eksperymentu jednoczynnikowego uwzględniającego n replikacji doświadczeń

Poziomy czynnik X	Numer replikacji			
	1	2	...	N
x_1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1n}
x_2	y_{21}	y_{22}	...	y_{2n}
...	...	...	...	...
x_k	y_{k1}	y_{k2}	...	y_{kn}

Źródło: Opracowanie własne.

Celem przeprowadzonego eksperymentu jest określenie wpływu zmiany poziomów czynnika X na wartości zmiennej wynikowej. Ponadto w badaniu można rozważyć ocenę wpływu na zmienną wynikową warunków, w jakich przebiegała realizacja poszczególnych replikacji doświadczeń. Wskazane problemy sprowadzają się do badania równości wartości przeciętnych w populacjach. W zależności od rozważanej liczby populacji weryfikacja równości wartości oczekiwanych jest przeprowadzana zazwyczaj z wykorzystaniem testu parametrycznego dla równości dwóch wartości przeciętnych lub testu jednoczynnikowej analizy wariancji (dla zbadania równości co najmniej trzech wartości oczekiwanych). Wymienione klasyczne testy parametryczne wymagają spełnienia odpowiednich założeń. W szczególności dla jednoczynnikowej analizy wariancji zakłada się, że próby pochodzą z niezależnych populacji o rozkładach zgodnych z rozkładem normalnym oraz wariancje w tych populacjach są równe. Jeżeli założenia jednoczynnikowej analizy wariancji nie są spełnione, to należy odwołać się do nieparametrycznego testu Kruskala–Wallisa. Alternatywną metodą weryfikacji równości wartości przeciętnych, szczególnie w przypadku niewielkich liczebności uwzględnianych prób, są testy permutacyjne.

Hipoteza sprawdzana i hipoteza alternatywna dla testu permutacyjnego, prowadzącego do weryfikacji równości wartości oczekiwanych dla co najmniej trzech populacji, są formułowane analogicznie jak dla jednoczynnikowej analizy wariancji:

$$H_0 : m_1 = m_2 = \dots = m_k \quad (3.50)$$

$$H_1 : m_i \neq m_j, \text{ dla pewnych } i \neq j. \quad (3.51)$$

Statystyka testowa rozważanego testu permutacyjnego również może być określona analogicznie jak statystyka testowa jednoczynnikowej analizy wariancji, która w analizowanym przypadku jest postaci:

$$F^{(1)} = \frac{(N-k) \sum_{i=1}^k n(\bar{y}_i - \bar{y})^2}{(k-1) \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_i)^2}, \quad (3.52)$$

gdzie:

- y_{ij} jest wartością zmiennej wynikowej uzyskaną dla czynnika X ustalonego na poziomie i -tym w j -tej replikacji,
- $\bar{y}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_{ij}$ jest średnią arytmetyczną wartości zmiennej wynikowej uzyskanych dla czynnika X ustalonego na i -tym poziomie,
- $\bar{y} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \bar{y}_i$ jest średnią arytmetyczną wszystkich wartości zmiennej wynikowej.

W literaturze (Good, 2006; Basso i in., 2009) wskazuje się na możliwość wykorzystania statystyk alternatywnych do statystyki (3.52) postaci:

$$F^{(2)} = \sum_{i=1}^k n \bar{y}_i^2, \quad (3.53)$$

$$F^{(3)} = \sum_{i=1}^k n |\bar{y}_i - \bar{y}| \quad (3.54)$$

oraz

$$F^{(4)} = \sum_{i=1}^k n (\bar{y}_i - \bar{y})^2. \quad (3.55)$$

Procedura testu permutacyjnego wymaga wyznaczenia wartości statystyki testowej dla N permutacji zbioru danych. Sposób permutacji powinien uwzględniać specyfikę analizowanego zbioru danych. W przypadku testu permutacyjnego, będącego odpowiednikiem testu jednoczynnikowej analizy wariancji, zaleca się jednoczesną permutację całego zbioru danych (Basso i in., 2009). Ze względu na charakter uzyskanych realizacji eksperymentu można uwzględniać permutację danych w obrębie poszczególnych bloków (Good, 2005), które odpowiadają kolejnym replikacjom w rozważanym eksperymencie. Dane pierwotne oraz schematy wymienionych typów permutacji przedstawiają odpowiednio rysunki 3.25, 3.26 oraz 3.27, dla których przyjęto, że $k = 4$, $n = 4$.

Dane oryginalne				
Poziomy czynnik X	Numer replikacji			
	1	2	3	4
x_1	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}
x_2	y_{21}	y_{22}	y_{23}	y_{24}
x_3	y_{31}	y_{32}	y_{33}	y_{34}
x_4	y_{41}	y_{42}	y_{43}	y_{44}

Rysunek 3.25. Dane pierwotne, dla $n = 4$ oraz $k = 4$

Źródło: Opracowanie własne.

I typ permutacji				
Poziomy czynnik X	Numer replikacji			
	1	2	3	4
x_1	y_{22}	y_{31}	y_{34}	y_{44}
x_2	y_{24}	y_{13}	y_{11}	y_{42}
x_3	y_{33}	y_{14}	y_{23}	y_{21}
x_4	y_{41}	y_{32}	y_{43}	y_{12}

Rysunek 3.26. Schemat jednoczesnej permutacji całego zbioru danych

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: Basso i in. (2009).

II typ permutacji				
Poziomy czynnik X	Numer replikacji			
	1	2	3	4
x_1	y_{31}	y_{22}	y_{43}	y_{44}
x_2	y_{11}	y_{32}	y_{33}	y_{24}
x_3	y_{41}	y_{12}	y_{23}	y_{14}
x_4	y_{21}	y_{42}	y_{13}	y_{34}

Rysunek 3.27. Schemat permutacji danych w ramach replikacji

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: Good (2005).

Dla rozważanego testu permutacyjnego duże wartości statystyk testowych (3.52), (3.53), (3.54), (3.55) będą świadczyły przeciwko hipotezie H_0 . Wówczas, w zależności od wybranej postaci statystyki testowej $F^{(s)}$, wartość ASL oszacowana jest zgodnie ze wzorem:

$$\hat{ASL}^{(s)} = \frac{\text{card} \{i : F_i^{(s)} \geq F_0^{(s)}\}}{N}, \quad (3.56)$$

gdzie $F_0^{(s)}$ jest wartością s -tej statystyki testowej wyznaczoną dla danych oryginalnych, natomiast $F_i^{(s)}$ jest wartością s -tej statystyki testowej obliczoną dla i -tej permutacji zbioru danych, dla $s = 1, 2, 3, 4$. Jeżeli oszacowana wartość ASL jest mniejsza lub równa ustalonemu poziomowi istotności α , to należy odrzucić hipotezę zerową (3.50) na korzyść hipotezy alternatywnej (3.51).

Jeżeli w wyniku przeprowadzenia powyższego testu permutacyjnego hipoteza sprawdzana (3.50) zostaje odrzucona, to możliwe jest przeprowadzenie wielokrotnych porównań wartości przeciętnych dla każdej pary populacji. W klasycznym podejściu w tym celu można wykorzystać klasyczny test t służący porównaniu wartości przeciętnych w dwóch populacjach. Jednak częściej wykorzystywane są na tym etapie metody porównań wielokrotnych: test Tukeya, test LSD Fishera, test Duncana oraz test Newmana-Keulsa (por. Montgomery, 2013). Jeżeli dane uzyskane w wyniku realizacji eksperymentu nie spełniają założeń wymienionych testów lub charakteryzują się niewielkimi liczebnościami, to alternatywną metodą wielokrotnego porównywania wartości przeciętnych w dwóch populacjach może być test permutacyjny (Złotoś, 2019). Podobnie jak klasyczne metody porównań wielokrotnych, test permutacyjny prowadzi do weryfikacji hipotez postaci:

$$H_0 : m_i = m_j \quad (3.57)$$

$$H_1 : m_i \neq m_j \quad (3.58)$$

dla każdego $i \neq j$ oraz $i, j = 1, 2, \dots, k$. Zazwyczaj statystyka testowa testu permutacyjnego dla weryfikacji prawdziwości hipotezy (3.57) określona jest wzorem:

$$T_{ij} = \bar{Y}_i - \bar{Y}_j, \quad (3.59)$$

dla każdego $i \neq j$ oraz $i, j = 1, 2, \dots, k$. Na korzyść hipotezy alternatywnej (3.58) będą świadczyć duże, co do wartości bezwzględnej, wartości statystyki (3.59). Wówczas oszacowanie wartości ASL należy wyznaczyć zgodnie ze wzorem:

$$\hat{ASL}_{ij} = \frac{\text{card} \{l : |T_{ij}^l| \geq |T_{ij}^0|\}}{N}, \quad (3.60)$$

gdzie T_{ij}^0 jest wartością statystyki testowej T_{ij} wyznaczoną dla danych pierwotnych, natomiast T_{ij}^l to wartość statystyki testowej T_{ij} dla l -tej permutacji zbioru danych. Podobnie jak w przypadku testu permutacyjnego dla porównania wartości przeciętnych w k ($k \geq 3$) populacjach, tak również dla testu permutacyjnego prowadzącego do porównania dwóch wartości oczekiwanych dopuszcza się dwa sposoby permutacji danych: permutację łącznego zbioru danych oraz permutację obserwacji sparowanych, czyli zamieniane są obserwacje w poszczególnych parach, przy zachowaniu kolejności obiektów.

D.C. Montgomery (2013) przedstawia dane dotyczące eksperymentu, który polega na badaniu wpływu prędkości posuwu (*feed rate*) maszyny CNC na zmienność wymiarów pewnego produktu. Czynniki X (prędkość posuwu) został ustalony na czterech poziomach $X = \{10, 12, 14, 16\}$, natomiast zmienna wynikowa Y jest odchyleniem standardowym wymiarów produktu uzyskanym dla każdej serii produktowej. Ponadto eksperyment obejmuje pięć replikacji serii produkcyjnych dla każdego z ustalonych poziomów czynnika. Realizacje poszczególnych doświadczeń przedstawia tabela 3.12.

Tabela 3.12. Dane eksperymentalne

Poziom czynnika X	Numer serii produkcyjnej				
	1	2	3	4	5
10	0,09	0,10	0,13	0,08	0,07
12	0,06	0,09	0,12	0,07	0,12
14	0,11	0,08	0,08	0,05	0,06
16	0,19	0,13	0,15	0,20	0,11

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: Montgomery (2013).

Ocena wpływu zmian wartości czynnika X na wartości zmiennej wynikowej Y prowadzi do zweryfikowania hipotez postaci:

$$H_0 : m_1 = m_2 = m_3 = m_4 \quad (3.61)$$

$$H_1 : m_i \neq m_j, \text{ dla pewnych } i \neq j, \quad (3.62)$$

przy ustalonym poziomie istotności $\alpha = 0,05$. Przyjmując założenie o równości wariancji oraz zgodność rozkładu zmiennej wynikowej w populacjach z rozkładem normalnym, przeprowadzono test jednoczynnikowej analizy wariancji. Uzyskane wyniki przedstawia tabela 3.13.

Tabela 3.13. Wyniki testu jednoczynnikowej analizy wariancji

Źródło zmienności	Suma kwadratów odchyłeń	Liczba stopni swobody	Średni kwadrat odchyłeń	Statystyka testowa	<i>p-value</i>
Czynnik <i>X</i>	0,01866	3	0,00622	7,51460	0,00234
Błąd losowy	0,01324	16	0,00083	–	–

Źródło: Opracowanie własne.

Wyznaczona $p - value \leq \alpha = 0,05$, zatem należy odrzucić hipotezę zerową (3.61) na korzyść hipotezy alternatywnej i przyjąć, że wartości przeciętne w populacjach różnią się. Wynika stąd, że czynnik *X* ma istotny wpływ na wartości zmiennej wynikowej *Y*.

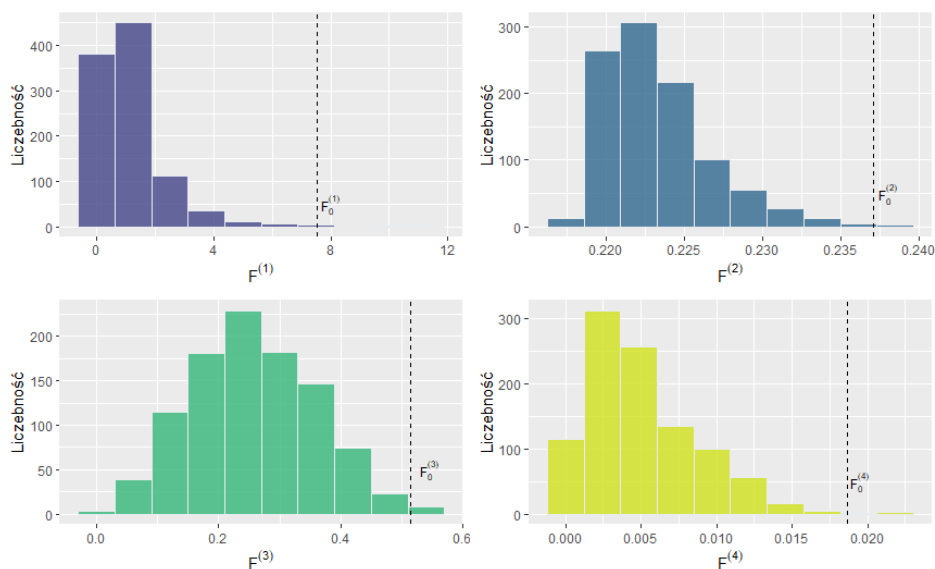
Dane rozważane w eksperymencie charakteryzują się niewielką liczebnością poszczególnych prób. Wobec tego, ostatecznie nie można mieć pewności, że rozważane populacje spełniają założenia jednoczynnikowej analizy wariancji. Alternatywną metodą weryfikacji hipotez (3.61) i (3.62) są testy permutacyjne, które nie wymagają spełnienia założenia o zgodności rozkładu zmiennej wynikowej z rozkładem normlanym. Testy permutacyjne przeprowadzono z wykorzystaniem statystyk testowych (3.52), (3.53), (3.54), (3.55). Dla każdej z postaci statystyk testowych wykonano permutacje zbioru danych na dwa sposoby: z wykorzystaniem jednoczesnej permutacji całego zbioru danych (I typ permutacji) oraz stosując permutację danych w obrębie poszczególnych replikacji (II typ permutacji). Ponadto dla każdego z rozważanych wariantów wykonano $N = 1000$ permutacji zbioru danych oraz oszacowano wartość *ASL*. Wyniki przeprowadzonych testów permutacyjnych przedstawia tabela 3.14.

Tabela 3.14. Wartości $\hat{ASL}$ przeprowadzonych testów permutacyjnych

Statystyka testowa	Typ permutacji	Wartość $\hat{ASL}$
$F^{(1)}$	I	0,004
	II	0,003
$F^{(2)}$	I	0,003
	II	0,006
$F^{(3)}$	I	0,008
	II	0,007
$F^{(4)}$	I	0,005
	II	0,002

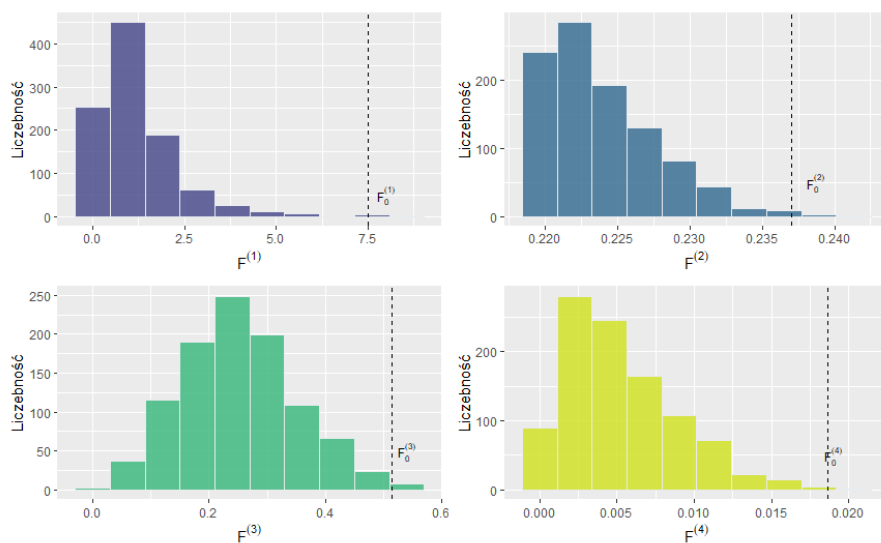
Źródło: Opracowanie własne.

Oszacowane wartości ASL , dla każdego z przeprowadzonych testów permutacyjnych, są mniejsze od poziomu istotności α , zatem należy odrzucić hipotezę zerową na korzyść hipotezy alternatywnej. Stąd można twierdzić, że czynnik X (prędkość posuwu) ma istotny wpływ na wartości zmiennej wynikowej Y (odchylenie standardowe wymiaru produktu). W wyniku przeprowadzenia wielokrotnych permutacji zbioru danych otrzymano empiryczne rozkłady statystyk testowych dane wzorami (3.52), (3.53), (3.54) oraz (3.55). Rysunki 3.28 oraz 3.29 przedstawiają rozkłady tych statystyk testowych, odpowiednio dla I typu oraz II typu permutacji zbioru danych, wraz z zaznaczonymi wartościami statystyk testowych dla danych pierwotnych. Na podstawie przedstawionych rozkładów empirycznych statystyk testowych można zauważyć, że sposób permutacji zbioru danych miał wpływ na postaci rozkładów statystyk testowych, ale nie wpływał na ostateczne decyzje w przeprowadzonych testach permutacyjnych.



Rysunek 3.28. Rozkłady empiryczne statystyk testowych dla I typu permutacji zbioru danych

Źródło: Opracowanie własne.



Rysunek 3.29. Rozkłady empiryczne statystyk testowych dla II typu permutacji zbioru danych

Źródło: Opracowanie własne.

Przeprowadzone testy statystyczne pozwoliły na stwierdzenie braku różności wartości odchyłeń standardowych wymiaru elementu dla poszczególnych prędkości posuwu maszyny CNC. W związku z tym można zweryfikować hipotezy głoszące równość wartości przeciętnych zmiennej wynikowej dla poszczególnych par poziomów czynnika X , na poziomie istotności $\alpha = 0,05$. Rozważając podejście klasyczne, w tym celu należy przeprowadzić jeden z testów porównań wielokrotnych (por. Montgomery, 2013). Rezultaty testu Tukeya przedstawia tabela 3.15. Na podstawie uzyskanych p -value można stwierdzić, że wartości przeciętne zmiennej wynikowej dla prędkości posuwu ustalonej na poziomie 10, 12 lub 14 różnią się istotnie od wartości przeciętnej zmiennej Y uzyskanych dla prędkości posuwu równej 16.

Tabela 3.15. p -value testu Tukeya porównań wielokrotnych

$\bar{y}_i - \bar{y}_j$	p -value
$\bar{y}_1 - \bar{y}_2$	0,9995
$\bar{y}_1 - \bar{y}_3$	0,7574
$\bar{y}_1 - \bar{y}_4$	0,0170
$\bar{y}_2 - \bar{y}_3$	0,8154
$\bar{y}_2 - \bar{y}_4$	0,0136
$\bar{y}_3 - \bar{y}_4$	0,0023

Źródło: Opracowanie własne.

Podobnie jak w przypadku analizy wariancji, dla prób o niewielkich liczebnościach, wyniki testu Tukeya mogą prowadzić do nieprawidłowych wniosków. Stąd w celu porównania wartości przeciętnych zmiennej wynikowej, dla poszczególnych par poziomów czynnika X , wykorzystano test permutacyjny uwzględniający statystykę testową (3.59). Wyniki testu permutacyjnego, z uwzględnieniem permutacji łącznego zbioru danych (I typ permutacji) oraz permutacji obserwacji sparowanych (II typ permutacji), prezentuje tabela 3.16.

Tabela 3.16. Wartości $\hat{A\hat{S}L}_{ij}$ testu permutacyjnego porównań wielokrotnych dla różnych typów permutacji danych

$\bar{y}_i - \bar{y}_j$	$\hat{A\hat{S}L}_{ij}$	
	I typ permutacji	II typ permutacji
$\bar{y}_1 - \bar{y}_2$	1,000	1,000
$\bar{y}_1 - \bar{y}_3$	0,311	0,258
$\bar{y}_1 - \bar{y}_4$	0,031	0,055
$\bar{y}_2 - \bar{y}_3$	0,419	0,476
$\bar{y}_2 - \bar{y}_4$	0,032	0,135
$\bar{y}_3 - \bar{y}_4$	0,012	0,059

Źródło: Opracowanie własne.

Dla I typu permutacji wartości $\hat{A\hat{S}L}_{14}$, $\hat{A\hat{S}L}_{24}$ oraz $\hat{A\hat{S}L}_{34}$ są mniejsze od ustalonego poziomu istotności $\alpha = 0,05$, zatem wartości przeciętne zmiennej wynikowej dla odpowiednich poziomów czynnika X są różne. Test permutacyjny, dla którego ustalono II typ permutacji, nie wskazuje istotnie różnych wartości przeciętnych. Przy czym należy zauważyć, że wartości $\hat{A\hat{S}L}_{14}$ oraz $\hat{A\hat{S}L}_{34}$ są bliskie $\alpha = 0,05$, co może sygnalizować, że zwiększenie liczby powtórzeń doświadczeń może doprowadzić do potwierdzenia istotności różnic pomiędzy wartościami przeciętnymi w tych przypadkach. Zatem ostatecznie można stwierdzić, że prędkość posuwu maszyny CNC ustalona na najwyższym poziomie wpływa istotnie na wartość przeciętną zmiennej wynikowej.

Klasyczne metody analizy wyników eksperymentu (np. jednoczynnikowa analiza wariancji, test t) wymagają spełnienia restrykcyjnych założeń dotyczących między innymi postaci rozkładu. Jeżeli te założenia nie są spełnione lub dane charakteryzują się niewielką liczebnością, to zastosowanie klasycznych metod analizy eksperymentu może prowadzić do sformułowania nieadekwatnych zaleceń dla badanego problemu. Wówczas należy poszukiwać metod nieklasycznych, które pozwolą na właściwą analizę wyników eksperymentu. Do tej

grupy metod z pewnością można zaliczyć testy permutacyjne, które odnoszą się tylko do danych pochodzących z próby i nie wymagają spełnienia założeń dotyczących rozkładu zmiennej wynikowej. Możliwość analizy wyników klasycznych planów eksperymentów z wykorzystaniem testów permutacyjnych pozwala na formułowanie uzasadnionych wniosków dla przeprowadzonych doświadczeń nawet wtedy, gdy liczebność próby jest mała lub dane nie spełniają założeń dotyczących postaci rozkładu.

3.3.3. Wykorzystanie testów permutacyjnych w ocenie istotności parametrów funkcji powierzchni odpowiedzi

Metodologia powierzchni odpowiedzi stanowi zbiór metod, których celem jest oszacowanie i analiza funkcji, która najlepiej charakteryzuje badane zjawisko (por. podrozdział 3.2.1). W ramach metodologii powierzchni odpowiedzi tworzone są również schematy konstrukcji planów eksperymentów, spełniających odpowiednie kryteria. Zasadniczymi etapami w metodologii funkcji powierzchni odpowiedzi są: wybór odpowiedniej postaci modelu funkcji powierzchni odpowiedzi, właściwa estymacja parametrów ustalonego modelu tej funkcji oraz ocena istotności uzyskanego oszacowania.

Klasycznymi metodami weryfikacji istotności oszacowania funkcji powierzchni odpowiedzi są testy wykorzystujące statystykę F oraz statystykę t . Test F wykorzystuje statystykę F postaci:

$$F = \frac{\frac{\hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{F}^T \mathbf{y} - n\bar{y}^2}{k}}{\frac{\mathbf{y}^T \mathbf{y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{F}^T \mathbf{y}}{n - k - 1}}, \quad (3.63)$$

która ma rozkład Fishera-Snedecora o k oraz $n - k - 1$ stopniach swobody i prowadzi do weryfikacji istotności całego modelu funkcji powierzchni odpowiedzi. Z kolei ocena istotności poszczególnych parametrów modelu polega na przeprowadzeniu testu t , który wykorzystuje statystykę t postaci:

$$t = \frac{\hat{\beta}_j}{s(\hat{\beta}_j)}, \quad (3.64)$$

o rozkładzie t -Studenta o $n - k - 1$ stopniach swobody, przy czym $s(\hat{\beta}_j) = \sqrt{\hat{\sigma}^2 C_{jj}}$, natomiast C_{jj} jest elementem diagonalnym macierzy $(\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1}$

(por. Aczel, 2000). Ponadto analiza funkcji powierzchni odpowiedzi może się odnosić do weryfikacji istotności podzbiorów parametrów modelu z zastosowaniem częściowego testu F , wykorzystującego statystykę F postaci:

$$F = \frac{\frac{SS_R^{(F)} - SS_R^{(R)}}{r}}{\frac{SS_E^{(F)}}{n - k - 1}}, \quad (3.65)$$

gdzie r jest różnicą liczby parametrów modelu pełnego i modelu zredukowanego, $SS_R^{(F)}$ jest sumą kwadratów odchyłeń modelu pełnego, $SS_R^{(R)}$ jest sumą kwadratów odchyłeń modelu zredukowanego, natomiast $SS_E^{(F)}$ jest sumą kwadratów reszt dla modelu pełnego (por. Montgomery, 2013). Statystyka F ma rozkład Fishera-Snedecora o r i $n - k - 1$ stopniach swobody (por. Montgomery, 2013). Wykorzystanie wymienionych metod weryfikacji istotności funkcji powierzchni odpowiedzi jest możliwe tylko wtedy, gdy spełnione są odpowiednie założenia. Warunkiem koniecznym do przeprowadzenia testu F , testu t oraz częściowego testu F jest niezależność reszt ustalonego modelu funkcji powierzchni odpowiedzi oraz zgodność rozkładu reszt z rozkładem normalnym o wartości oczekiwanej 0 i wariancji równej σ^2 (Aczel, 2000; Montgomery, 2013). Jeżeli wskazane założenia nie są spełnione, to alternatywnymi metodami służącymi weryfikacji istotności uzyskanego oszacowania funkcji powierzchni odpowiedzi mogą być testy permutacyjne. Zastosowanie odpowiednio skonstruowanych testów permutacyjnych w celu oceny istotności modelu i oszacowanych parametrów funkcji powierzchni odpowiedzi przedstawia Złotoś (2020).

Wykorzystanie testów permutacyjnych w ocenie istotności modelu funkcji powierzchni odpowiedzi wiąże się z ustaleniem sposobu permutacji danych o charakterze wielowymiarowym. W literaturze (O’Gorman, 2012) wymienia się cztery sposoby permutacji takich danych: permutację błędów, permutację reszt, niezależną permutację wszystkich zmiennych niezależnych oraz permutację zmiennej zależnej. W zagadnieniach dotyczących planowania eksperymentów, ze względu na ustalone wartości czynników (zmienna niezależna), uzasadnionym sposobem permutacji danych jest permutacja wartości zmiennej wynikowej.

W procedurze testu permutacyjnego stosowanego do oceny istotności całego modelu funkcji powierzchni odpowiedzi wykorzystuje się statystykę testową postaci (3.63). Test permutacyjny, którego przedmiotem jest weryfikacja istotności poszczególnych parametrów modelu, uwzględnia statystykę testową postaci (3.64). Natomiast jeżeli analiza funkcji powierzchni odpowiedzi odnosi się do weryfikacji istotności podzbioru parametrów modelu, to test permutacyjny może być skonstruowany z wykorzystaniem statystyki testowej postaci (3.65).

J. Antony (2003) przedstawia studium przypadku dotyczące połączenia drutowego (*wire bonding*) pomiędzy matrycą a przewodem pewnego elementu. W wyniku licznych reklamacji uszkodzenia połączenia drutowego podjęto decyzję o konieczności zwiększenia wytrzymałości drutu na rozciąganie. Ustalono, że doświadczenia zostaną przeprowadzone zgodnie z planem całkowitego eksperymentu czynnikowego typu 2^m . W badaniu uwzględniono cztery czynniki występujące na dwóch poziomach (górnym i dolnym), których charakterystykę przedstawia tabela 3.17.

Tabela 3.17. Charakterystyka czynników uwzględnianych w eksperymencie

Oznaczenie czynnika	Nazwa czynnika	Poziom dolny	Poziom górny	Jednostka pomiaru
X_1	Moc	100	150	mW
X_2	Temperatura	140	200	°C
X_3	Czas łączenia	15	25	Ms
X_4	Siła łączenia	3	9	g

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: Antony (2003).

Celem przeprowadzanego eksperymentu jest określenie optymalnych ustawień czynników, dla których nastąpi zwiększenie wytrzymałości. Ponadto zadaniem eksperymentatora jest oszacowanie i analiza funkcji powierzchni odpowiedzi, która będzie charakteryzować zależność siły ciągnięcia drutu (zmienna wynikowa Y) od wartości poszczególnych czynników. Wyniki przeprowadzonego eksperymentu przedstawia tabela 3.18.

Tabela 3.18. Wyniki doświadczeń całkowitego eksperymentu czynnikowego typu 2^4

Numer doświadczenia	X_1	X_2	X_3	X_4	Y
1	2	3	4	5	6
1	-1	-1	-1	-1	7,4
2	1	-1	-1	-1	6,5
3	-1	1	-1	-1	8,2
4	1	1	-1	-1	8,8
5	-1	-1	1	-1	7,6
6	1	-1	1	-1	6,8
7	-1	1	1	-1	8,4
8	1	1	1	-1	8,6
9	-1	-1	-1	1	9,4
10	1	-1	-1	1	8,0

cd. tabeli 3.18

1	2	3	4	5	6
11	-1	1	-1	1	9,8
12	1	1	-1	1	8,9
13	-1	-1	1	1	9,0
14	1	-1	1	1	7,9
15	-1	1	1	1	10,1
16	1	1	1	1	9,1

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: Antony (2003).

W pierwszym etapie badania rozważano funkcję powierzchni odpowiedzi będącą wielomianem stopnia pierwszego typu I postaci:

$$\tilde{y} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4. \quad (3.66)$$

Uzyskano oszacowanie modelu funkcji powierzchni odpowiedzi (3.66) z wykorzystaniem metody najmniejszych kwadratów dane wzorem:

$$\tilde{y} = 8,406 - 0,331x_1 + 0,581x_2 + 0,031x_3 + 0,619x_4. \quad (3.67)$$

Analiza oszacowanej funkcji powierzchni odpowiedzi będzie dotyczyć oceny istotności oszacowanego modelu oraz jego parametrów. W tym celu, przyjmując poziom istotności $\alpha = 0,05$, zweryfikowano zgodność rozkładu reszt modelu (3.67) z rozkładem normalnym, przeprowadzając test Shapiro–Wilka. Uzyskano $p - value = 0,0555$, zatem można wnioskować o braku podstaw do odrzucenia hipotezy głoszącej o zgodności rozkładu reszt modelu z rozkładem normalnym.

W celu oceny istotności oszacowanego modelu funkcji powierzchni odpowiedzi postaci (3.67) sformułowano hipotezy postaci:

$$H_0 : \beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0 \quad (3.68)$$

$$H_1 : \beta_j \neq 0, \text{ dla pewnego } j, \quad (3.69)$$

których prawdziwość została zweryfikowana z wykorzystaniem testu F . Wartość statystyki testowej postaci (3.63), dla 4 i 11 stopni swobody, jest równa $F = 17,36$, a wyznaczone dla niej $p - value = 0,0001$ jest mniejsze od ustalonego poziomu istotności $\alpha = 0,05$. Stąd należy odrzucić hipotezę sprawdzaną na korzyść hipotezy alternatywnej, wnioskując o istotności oszacowanego modelu funkcji powierzchni odpowiedzi. Następnie zweryfikowano istotność poszczególnych parametrów modelu (3.67) z wykorzystaniem testu t . Wyniki przeprowadzonych testów przedstawia tabela 3.19. Na podstawie otrzymanych wyników można stwierdzić, że istotny wpływ na wartości zmiennej wynikowej Y mają czynniki: X_1 (moc), X_2 (temperatura) oraz X_4 (siła łączenia).

Tabela 3.19. Wyniki weryfikacji istotności parametrów modelu (3.67)

Parametr β_i	Oszacowanie parametru β_i	Wartość statystyki t	p -value
β_0	8,406	76,831	0,0000
β_1	-0,331	-3,028	0,0115
β_2	0,581	5,313	0,0002
β_3	0,031	0,286	0,7805
β_4	0,619	5,655	0,0001

Źródło: Opracowanie własne.

Drugi etap badania polega na ocenie możliwości uwzględnienia ustalonych interakcji w ostatecznym modelu funkcji powierzchni odpowiedzi. W tym celu określono model pełny funkcji powierzchni odpowiedzi postaci:

$$\tilde{y} = \gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_4 + \gamma_4 x_1 x_2 + \gamma_5 x_1 x_3 + \gamma_6 x_1 x_4 + \gamma_7 x_2 x_3 \quad (3.70)$$

oraz model zredukowany dany poniższym wzorem:

$$\tilde{y} = \gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_4. \quad (3.71)$$

Dla określonych modeli funkcji powierzchni odpowiedzi przeprowadzono częściowy test F , który pozwolił na zweryfikowanie hipotez:

$$H_0 : \gamma_4 = \gamma_5 = \gamma_6 = \gamma_7 = 0 \quad (3.72)$$

$$H_1 : \gamma_j \neq 0, \text{ dla pewnego } j \in \{4, 5, 6, 7\}. \quad (3.73)$$

Statystyka testowa częściowego testu F , dana wzorem (3.65), przyjmuje wartość $F = 3,737$. Wyznaczona p -value = 0,0533 jest większa od przyjętego poziomu istotności $\alpha = 0,05$. Stąd wniosek o braku podstaw do odrzucenia hipotezy (3.72). Zatem ustalone interakcje czynników nie powinny zostać uwzględnione w modelu funkcji powierzchni odpowiedzi, który ostatecznie przyjmuje postać:

$$\tilde{y} = 8,406 - 0,331x_1 + 0,581x_2 + 0,619x_4. \quad (3.74)$$

W związku z tym eksperymentator nie powinien rozważać wpływu interakcji czynników na wartości zmiennej wynikowej.

Należy zauważyć, że przeprowadzone rozważania dotyczyły próby o niewielkiej liczebności, a wyznaczona p -value testu Shapiro–Wilka tylko nieznacznie przekracza wartość ustalonego poziomu istotności $\alpha = 0,05$. Wówczas przyjęcie założenia o zgodności rozkładu reszt modelu (3.67) z rozkładem normalnym również może nie być poprawne. Zatem wykorzystanie klasycznych testów parametrycznych w celu analizy oszacowanego modelu funkcji powierzchni odpowiedzi również może być nieuzasadnione. Podobne wnioski można sformu-

łować dla częściowego testu F , gdzie p -value również nieznacznie przekracza wartość $\alpha = 0,05$. Wówczas analiza oszacowanego modelu funkcji powierzchni odpowiedzi może zostać przeprowadzona z zastosowaniem odpowiednich testów permutacyjnych, które nie wymagają spełnienia założeń dotyczących postaci rozkładu reszt modelu oraz opierają się tylko na danych uwzględnianych w badaniu.

W przedstawionych poniżej testach permutacyjnych uwzględniono $N = 10000$ permutacji zbioru danych. Ponadto ustalono, że permutacja danych będzie polegała na permutacji wartości zmiennej wynikowej przy ustalonych wartościach zmiennych niezależnych (poziomach czynników).

Test permutacyjny służący weryfikacji hipotez (3.68) oraz (3.69) prowadzi do N -krotnego oszacowania modelu funkcji powierzchni odpowiedzi postaci (3.66) i wyznaczenia wartości statystyki F postaci (3.63). Wówczas należy oszacować wartość ASL zgodnie ze wzorem:

$$ASL = \frac{\text{card}\{i : F_i > F_0\}}{N}, \quad (3.75)$$

gdzie wartość F_0 jest wartością statystyki testowej testu F dla modelu (3.67), natomiast F_i jest wartością statystyki F wyznaczoną dla modelu oszacowanego w i -tej permutacji zbioru danych. Jeżeli obliczona wartość ASL jest mniejsza od ustalonego poziomu istotności, to hipotezę (3.68) należy odrzucić na korzyść hipotezy alternatywnej (3.69). Dla rozważanych danych uzyskano wartość $\hat{ASL} = 0,0002$, zatem należy wnioskować o istotności modelu funkcji powierzchni odpowiedzi postaci (3.67). Następnie przeprowadzono testy permutacyjne prowadzące do oceny istotności poszczególnych parametrów modelu (3.67), z wykorzystaniem statystyki testowej postaci (3.64). Dla każdego z parametrów oszacowano wartość ASL zgodnie z formułą:

$$ASL_j = \frac{\text{card}\{i : |t_{ij}| > t_{0j}\}}{N}, \quad (3.76)$$

gdzie t_{ij} jest wartością statystyki t wyznaczoną dla j -tego parametru funkcji powierzchni odpowiedzi oszacowanej na podstawie i -tej permutacji zbioru danych, natomiast t_{0j} jest wartością statystyki t dla j -tego parametru modelu wyznaczonego dla danych pierwotnych. Wyniki przeprowadzonych permutacyjnych testów istotności parametrów modelu (3.67) przedstawia tabela 3.20. Na podstawie oszacowanych wartości ASL można stwierdzić, że istotny wpływ na wartości zmiennej wynikowej mają czynniki X_1 , X_2 oraz X_4 , natomiast wpływ czynnika X_3 nie powinien być uwzględniany w badaniu.

Tabela 3.20. Oszacowane wartości ASL permutacyjnych testów istotności parametrów modelu (3.67)

Parametr β_i	Wartość $\hat{ASL}$
β_0	0,0003
β_1	0,0138
β_2	0,0001
β_3	0,7775
β_4	0,0002

Źródło: Opracowanie własne.

W celu oceny możliwości uwzględnienia interakcji czynników w modelu funkcji powierzchni odpowiedzi można przeprowadzić test permutacyjny będący odpowiednikiem częściowego testu F . Jeżeli przyjęty został model pełny postaci (3.70) oraz model zredukowany (3.71), to należy zweryfikować prawdziwość hipotezy (3.72) wobec hipotezy alternatywnej (3.73). Dla testu permutacyjnego rozważono statystykę testową parametrycznego częściowego testu F daną wzorem (3.65). Wyznaczono wartość ASL zgodnie z formułą:

$$\hat{ASL} = \frac{\text{card}\{i : F_i^P > F_0^P\}}{N}, \quad (3.77)$$

gdzie F_0^P jest wartością statystyki testowej testu częściowego F dla modeli (3.70) oraz (3.71) dla danych pierwotnych, natomiast F_i^P jest wartością statystyki (3.65) wyznaczoną dla modeli postaci (3.70) oraz (3.71) oszacowanych na podstawie i -tej permutacji wartości zmiennej wynikowej. Jeżeli obliczona wartość ASL jest mniejsza od ustalonego poziomu istotności, to hipotezę (3.68) należy odrzucić na korzyść hipotezy alternatywnej (3.69). Dla rozważanych danych uzyskano wartość $\hat{ASL} = 0,0642$, zatem należy wnioskować o braku podstaw do odrzucenia hipotezy sprawdzanej postaci (3.72). Tym samym interakcje czynników nie powinny być uwzględniane w rozważanym modelu. Warto zauważyć, że uzyskane wyniki testów permutacyjnych są podobne do rezultatów otrzymanych w przypadku analizy z wykorzystaniem testów parametrycznych.

Przedstawiona możliwość wykorzystania testów permutacyjnych w analizie funkcji powierzchni odpowiedzi stanowi rozszerzenie rozwiązań zaproponowanych przez Złotoś (2020). W szczególności propozycja wykorzystania permutacyjnego odpowiednika częściowego testu F pozwoliła na weryfikację istotności ustalonej grupy parametrów w ostatecznym modelu funkcji powierzchni odpowiedzi, bez konieczności spełnienia założeń klasycznego częściowego testu F .

Polityka energetyczna Unii Europejskiej dąży do zmniejszenia emisji gazów cieplarnianych oraz do neutralności energetycznej. Realizacja założonych celów polityki energetycznej będzie możliwa między innymi dzięki zwiększeniu uczestnictwa odnawialnych źródeł energii w pozyskiwaniu energii. Jednym z najpopularniejszych źródeł energii odnawialnej jest biomasa, a w szczególności pellet drzewny. W ostatnich latach produkcja pelletu drzewnego w Polsce dynamicznie rośnie. Proces ten jest związany z popularyzacją krajowych i regionalnych programów mających na celu ograniczenie emisji zanieczyszczeń powietrza. Przewiduje się, że zapotrzebowanie na pellet drzewny na rynku europejskim i krajowym będzie wzrastało.

W pierwszej części niniejszego rozdziału scharakteryzowano odnawialne źródła energii, ze szczególnym uwzględnieniem biomasy. Przedstawiono udział biopaliw stałych, w tym pelletu drzewnego, w produkcji energii w Polsce. Ponadto uzasadniono zapotrzebowanie na pellet drzewny wśród odbiorców indywidualnych.

Druga część rozdziału obejmuje charakterystykę poszczególnych etapów procesu produkcji pelletu drzewnego. Zaprezentowano w niej wymagania dotyczące wytworzenia pelletu dobrej jakości oraz zasady certyfikacji produktu.

W podrozdziale trzecim opisano rezultaty procesu produkcji pelletu drzewnego uzyskane w pewnym przedsiębiorstwie produkcyjnym. Dla rozważanego procesu produkcyjnego zaproponowano metodę analizy jego wyników, której celem będzie sformułowanie zaleceń dla uzyskania pelletu dobrej jakości.

Niniejszy rozdział w znacznej mierze ma charakter wdrożeniowy. Przedstawiono w nim propozycję zastosowania metod planowania eksperymentów w pewnym przedsiębiorstwie produkującym pellet drzewny. Wzrost zapotrzebowania na pellet drzewny spowodował dynamiczny rozwój technologii procesu produkcji tego granulatu. Stąd zazwyczaj proces produkcji pelletu drzewnego

ma charakter innowacyjny i nie zawsze możliwe jest uzyskanie optymalnego wyniku końcowego.

W rozdziale nie tylko przedstawiono propozycję alternatywnej konstrukcji planu eksperymentu, ale również sposób ustalenia poziomów czynników oraz określono serię przeprowadzonych doświadczeń. Ponadto zaprezentowano rzeczywiste wyniki zrealizowanego eksperymentu, które poddano analizie statystycznej. Przeprowadzone badania pokazały, że odwołanie się do znanych w literaturze metod planowania eksperymentów może nie być wystarczające.

Specyfika badanego zagadnienia związana jest między innymi z niemożnością uzyskania precyzyjnie określonych poziomów czynników, brakiem jednoznacznego stwierdzenia zgodności rozkładu badanych zmiennych z rozkładem normalnym oraz z ograniczonymi możliwościami przeprowadzenia znacznej liczby eksperymentów. Wskazane problemy zwracają uwagę na konieczność odwołania się do metod opartych na modyfikacjach rozwiązań znanych z literatury.

4.1. Produkcja pelletu drzewnego w Polsce i w Europie

W ostatnich dziesięcioleciach polityka energetyczna państw Unii Europejskiej dąży do zapewnienia bezpieczeństwa energetycznego, a w tym do ograniczenia emisji gazów cieplarnianych oraz uniezależnienia gospodarki od paliw kopalnych. 14 lipca 2021 roku Komisja Europejska ogłosiła zestaw przepisów „Fit for 55” sformułowanych dla polityki klimatycznej krajów Unii Europejskiej. Głównym założeniem pakietu regulacji jest redukcja emisji gazów cieplarnianych o 55% w 2030 roku w stosunku do 1990 roku. W osiągnięciu założonego celu jedną ze znaczących ról mają odgrywać odnawialne źródła energii, dla których do 2030 roku udział w produkcji energii ma wynosić 40% (European Parliament, 2022). Działania, które mają na celu wspieranie źródeł energii odnawialnej, zapisane są w dyrektywie Parlamentu Europejskiego i Rady (UE) 2018/2001 z dnia 11 grudnia 2018 r. w sprawie promowania stosowania energii ze źródeł odnawialnych (Dz. Urz. UE L 328 z 21.12.2018). W Polsce jednym z podstawowych aktów normatywnych, który reguluje obowiązki z zakresu wykorzystania energii ze źródeł odnawialnych, jest ustawa z dnia 20 lutego 2015 r. o odnawialnych źródłach energii (Dz. U. z 2022 r. poz. 1378).

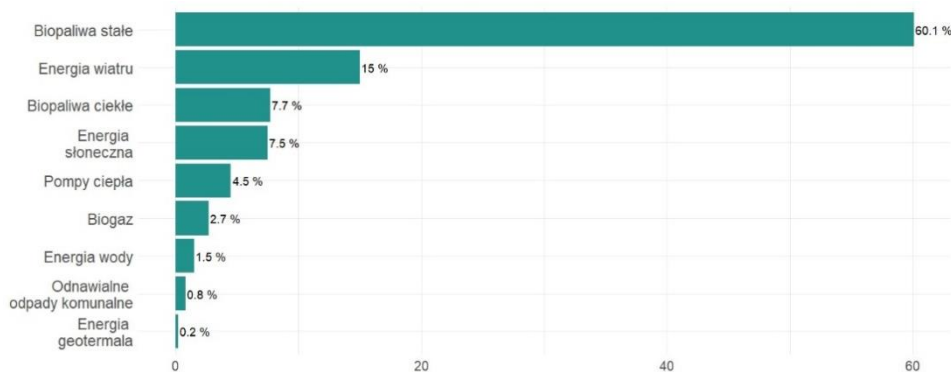
Zgodnie z ustawą odnawialne źródła energii to odnawialne niekopalne źródła energii, które obejmują między innymi: energię wiatru, energię promieniowania słonecznego, energię aerotermalną, geotermalną i hydrotermalną, energię fal, prądów i pływów morskich oraz energię otrzymywaną z biomasy (Ustawa z dn. 20.02.2015 2022). Szczególne miejsce wśród odnawialnych źródeł energii

zajmuje biomasa, czyli ulegająca biodegradacji część produktów, odpadów lub pozostałości pochodzenia biologicznego z rolnictwa, leśnictwa i związanych z nimi działów przemysłu oraz biomasa przetworzona w postaci brykietu, pelletu, toryfikatu i biowęgla (Ustawa z dn. 20.02.2015 2022). Biomasa stała się dominującym źródłem energii odnawialnej wykorzystywanym w ciepłownictwie, produkcji energii elektrycznej i transporcie w Polsce. Ze względu na stan skupienia biomasę można podzielić na:

- stałą (biopaliwa stałe) – produkty pochodzenia roślinnego, najczęściej pozyskiwane z drewna lub z odpadów z jego przetwarzania, w tym pellet drzewny i brykiet;
- ciekłą (biopaliwa) – pozyskiwaną z roślin poddawanych procesom chemicznym;
- gazową (biogaz) – rezultat rozkładu odpadów organicznych.

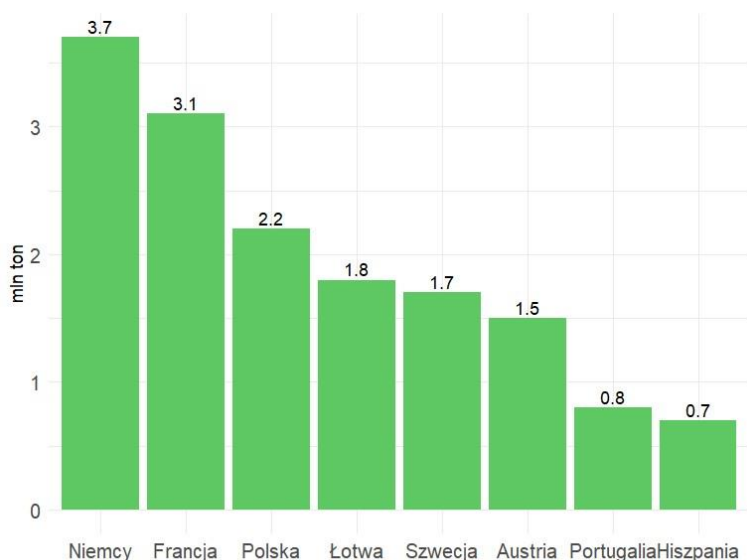
Obecnie odnawialnym źródłem energii o największym udziale w produkcji energii w Polsce są biopaliwa stałe (rysunek 4.1). W Polsce najczęściej wykorzystywanym do produkcji ciepła i energii elektrycznej biopaliwem stałym jest biomasa leśna, a w szczególności pellet drzewny (Beldycka-Bórawska i in., 2021).

Produkcja pelletu drzewnego w krajach Unii Europejskiej kształtuje się na bardzo wysokim poziomie. W 2023 roku wyprodukowano ok. 24,3 mln ton pelletu drzewnego w Unii Europejskiej. Największymi producentami pelletu drzewnego w Unii Europejskiej są Niemcy, Francja, Polska, Łotwa oraz Szwecja (por. rysunek 4.2). Konsumpcja pelletu drzewnego w 2023 roku wynosiła ok. 30,1 mln ton. Wiodącymi konsumentami pelletu są Wielka Brytania, Niemcy, Francja, Dania oraz Włochy.



Rysunek 4.1. Udział odnawialnych źródeł energii w pozyskaniu energii w Polsce w 2023 roku

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: GUS (2024).



Rysunek 4.2. Produkcja pelletu drzewnego w wybranych krajach Unii Europejskiej w 2023 roku

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: Bioenergy Europe (2024).

W 2022 roku europejski rynek pelletu drzewnego został zachwiany, w związku z inwazją Rosji na Ukrainę. Warto zaznaczyć, że do 2022 roku to Rosja, Ukraina i Białoruś były jednymi z największych eksporterów pelletu drzewnego na rynek europejski. Wobec obecnej sytuacji na rynku paliw oraz prowadzonej polityki energetycznej Unii Europejskiej należy się spodziewać dalszego wzrostu popytu na biomasę, a w szczególności na pellet drzewny. Popyt ten dotyczy zarówno pelletu drzewnego przeznaczonego dla odbiorców indywidualnych, jak i pelletu przeznaczonego dla przemysłu i energii.

W ostatnich latach produkcja pelletu drzewnego w Polsce dynamicznie się rozwija, czego dowodem jest wytworzenie ok. 2,2 mln ton pelletu w 2023 roku (Bioenergy Europe, 2024). Początkowo produkowany pellet drzewny był przeznaczony głównie na eksport do krajów Unii Europejskiej. Obecnie popularność pelletu drzewnego w kraju jako źródła energii wciąż rośnie, zarówno wśród odbiorców indywidualnych, jak i przemysłu. Zainteresowanie ze strony odbiorców indywidualnych wiąże się przede wszystkim z realizacją programów mających na celu ograniczenie emisji zanieczyszczeń powietrza. Krajowy program „Czyste powietrze” umożliwia otrzymanie dofinansowania na wymianę źródła ciepła w gospodarstwie domowym na kocioł na biomasę, w tym pellet drzewny (Narodowy Fundusz Ochrony Środowiska i Gospodarki Wodnej, 2020). Od listopada 2024 roku w ramach programu „Czyste powietrze” złożono ponad

1 000 000 wniosków o wymianę źródła ciepła. Zgodnie z danymi bazy Centralnej ewidencji emisyjności budynków kotły na paliwo stałe stanowią 17,15% wszystkich źródeł ciepła, z czego 6,22% stanowią kotły zasilane pelulem drzewnym. Poza krajowym programem „Czyste powietrze” realizowane są również regionalne programy wspierające wymianę źródeł ciepła na kotły na pellet drzewny. Tym samym spodziewane jest ciągle zapotrzebowanie na pellet drzewny w szczególności na rynkach lokalnych.

4.2. Proces produkcyjny pelletu drzewnego

Przedsiębiorstwa produkcyjne zajmujące się produkcją pelletu skupiają się na wytworzeniu produktu o wysokiej jakości przy jednoczesnym zachowaniu odpowiedniej wydajności produkcji. Kluczowe znaczenie dla tego rodzaju przedsiębiorstw ma również aspekt ekonomiczny procesu produkcji pelletu. Stąd wiedza dotycząca poszczególnych etapów technologii produkcji pelletu jest niezbędna do osiągnięcia wyznaczonych celów i prowadzi do poprawy konkurencyjności przedsiębiorstwa wśród innych producentów danej branży.

Przed przystąpieniem do właściwego procesu produkcji pelletu drzewnego należy określić, z jakiego surowca pellet będzie wytwarzany. Dobór surowca ma zasadniczy wpływ na technologię procesu produkcji pelletu oraz na jego właściwości fizyko-chemiczne, np. wartość opałową i zawartość popiołu (Kocsis, Csanády, 2019). Charakterystyki surowca (np. wilgotność, struktura, właściwości mechaniczne) w znaczącym stopniu zależą od jego źródła pochodzenia. Surowiec do produkcji pelletu może pochodzić ze źródeł pierwotnych i wtórnych (Abdoli i in., 2018). Surowiec ze źródła pierwotnego jest pozyskiwany bezpośrednio z lasów w postaci drewna okrągłego (zazwyczaj o średnicy mniejszej niż 14 cm) pochodzącego z wycinki lub trzebieży lasu. Jako źródło pierwotne uznaje się również uprawy gatunków drzew lub roślin drzewiastych, które charakteryzują się szybkim wzrostem (np. wierzba energetyczna). Pozyskany surowiec ze źródeł pierwotnych wymaga przetworzenia na materiał o odpowiedniej strukturze. Źródłami wtórnymi surowca są: przemysł drzewny i recykling elementów drewnianych. W tym przypadku przemysł drzewny obejmuje przedsiębiorstwa przemysłu tartacznego, meblarskiego i wyrobów stolarskich oraz producentów płyt drewnopochodnych i palet. Surowiec pochodzący z recyklingu elementów drewnianych to zazwyczaj odpady drzewne ze źródeł przemysłowych lub komunalnych. Ze względu na wysoką zawartość zanieczyszczeń i substancji chemicznych surowiec z recyklingu nie jest odpowiedni do produkcji pelletu. Najczęściej źródłem surowca do produkcji pelletu jest przemysł drzewny.

Podstawowym i najodpowiedniejszym surowcem do produkcji pelletu drzewnego są trociny (Kocsis, Csanády, 2019). Zazwyczaj ze względu na rodzaj dokonuje się podziału trocin na trociny drzew liściastych i iglastych. Drzewa liściaste i iglaste charakteryzują się różnymi poziomami zawartości ligniny, która stanowi naturalne spoiwo wytwarzanego granulatu. Poziom zawartości ligniny dla trocin drzew iglastych jest wyższy niż w przypadku trocin drzew liściastych. Stąd najczęściej w produkcji pelletu drzewnego wykorzystuje się trociny drzew iglastych. Dopuszcza się również mieszanie trocin drzew iglastych i liściastych, tak aby utrzymać odpowiedni poziom ligniny zapewniający granulację pelletu.

Technologia produkcji pelletu drzewnego jest procesem złożonym. Rozpoczyna się od odpowiedniego przygotowania surowca, tj. jego rozdrobnienia i odseparowania. W celu rozdrobnienia surowca wykorzystuje się zazwyczaj młyny bijakowe, które pozwalają na uzyskanie odpowiedniej frakcji trocin. Następnie dokonuje się oczyszczania rozdrobnionego surowca z wykorzystaniem urządzeń mechanicznych (np. jednopłaszczyznowy przesiewacz wibracyjny) i pneumatycznych. Wówczas następuje zasadniczy proces produkcji pelletu drzewnego składający się z trzech etapów:

- suszenia surowca,
- granulacji,
- chłodzenia.

W ujęciu ogólnym suszenie polega na poddaniu surowca działaniu gorącego powietrza z pieca. Sposób suszenia surowca zależy od zastosowanej technologii. Proces suszenia może przebiegać z wykorzystaniem suszarni bębnowej, taśmowej lub strumieniowej. W każdej z wymienionych metod surowiec przemieszcza się (w bębnie, na taśmie lub w układzie) przy jednoczesnym wdmuchiowaniu powietrza o temperaturze od ok. 300°C do 400°C bezpośrednio lub pośrednio z pieca. Celem suszenia jest uzyskanie surowca, którego wilgotność jest na poziomie od 10% do 13%. Proces suszenia powinien być kontrolowany tak, aby surowiec nie uległ nadmiernemu przesuszeniu lub mineralizacji. Przesuszenie surowca negatywnie wpływa na jakość wytwarzanego pelletu oraz może doprowadzić do nieprawidłowości w działaniu maszyny peletyzującej. Jeżeli surowiec w wyniku działania wysokich temperatur zostanie przesuszony, to dopuszcza się nawilżanie materiału z wykorzystaniem pary wodnej lub wody.

Po oczyszczeniu i wysuszeniu materiału przeprowadza się właściwe peletowanie surowca. W procesie peletowania wykorzystuje się zazwyczaj granulatory z matrycą płaską lub pierścieniową (por. Wach, Bastian, 2010). Surowiec podawany jest do granulatora w sposób ciągły. Rolki prasujące dociskają dostarczony materiał do powierzchni matrycy, przeciskając go przez otwory cylindryczne, w wyniku czego wytwarzane są pellety o ustalonej średnicy.

Bezpośrednio po procesie peletowania wytworzony produkt jest ciepły i wykazuje właściwości plastyczne. W celu uzyskania temperatury pokojowej pellet poddawany jest procesowi chłodzenia. Obniżenie temperatury pelletu zwiększa jego trwałość, a jednocześnie prowadzi do oddzielenia produktu od powstałego pyłu. Ostatnim etapem jest pakowanie i dystrybucja wytworzonego pelletu drzewnego.

W wyniku odpowiednio przeprowadzonego procesu produkcyjnego pelletu drzewnego uzyskuje się granulaty, który charakteryzuje się ustalonymi właściwościami fizyko-chemicznymi. Do najczęściej wykorzystywanych charakterystyk pelletu drzewnego należą: długość i średnica granulatu, wilgotność granulatu, zawartość popiołu, gęstość nasypowa oraz wartość opałowa. Pellet dobrej jakości powinien charakteryzować się odpowiednimi poziomami wymienionych cech. Ponadto o jakości pelletu świadczą również rezultaty procesu spalania granulatu, które są powiązane z właściwościami fizyko-chemicznymi pelletu.

W Polsce wymagania dotyczące produkcji i właściwości pelletu drzewnego reguluje system norm dla biopaliw stałych wdrażany od 2010 roku. Obecnie obowiązującymi standardami dotyczącymi pelletu drzewnego są (Polski Komitet Normalizacyjny, 2021a, 2021b):

- PN-EN ISO 17225-1:2021-11 Biopaliwa stałe. Specyfikacje paliw i klasy. Część 1: Wymagania ogólne;
- PN-EN ISO 17225-2:2021-10 Biopaliwa stałe. Specyfikacje paliw i klasy. Część 2: Klasy pelletów drzewnych.

Norma PN-EN ISO 17225-2:2021-11 wprowadza podział klas pelletu drzewnego na pellet do zastosowań komercyjnych i domowych (klasy A1, A2, B) oraz pellet do zastosowań przemysłowych (klasy I1, I2 oraz I3). Standardy jednoznacznie określają rodzaje surowców, z jakich powinien być wytwarzany pellet drzewny przeznaczony dla zastosowań komercyjnych i domowych. Pellety klasy A1 mogą być wytwarzane wyłącznie z drewna liściastego bądź iglastego pozbawionego kory, gałęzi i korzeni lub z pozostałości drzewnych, które nie były przetworzone chemicznie. Klasa A2 dopuszcza produkcję pelletu drzewnego z gałęzi i pozostałości zrębowych, natomiast klasa B pozwala na wykorzystanie drewna pożytkowego. Cytowana norma określa również dopuszczalne zakresy dla zawartości wybranych pierwiastków chemicznych (np. azot, siarka, chlor) lub metali ciężkich. Ponadto wskazuje na możliwość wykorzystania w produkcji pelletu drzewnego dodatków, które pozwolą na ułatwienie procesu prasowania i spalania pelletu. Stosowane dodatki muszą być pochodzenia naturalnego, a ich zawartość w peliecie nie może przekraczać 2% (klasy A1, A2, B) lub 3% (klasy I1, I2, I3). Produkcja pelletu drzewnego zgodnie ze standardami zawartymi w normach PN-EN ISO 17225 zapewnia uzyskanie produktu o optymalnych właściwościach fizycznych i chemicznych (Biomass Media Group, 2021).

Na podstawie wymagań zawartych w normach PN-EN ISO 17225 zostały sformułowane zasady certyfikacji pelletu drzewnego. Procedura przyznawania certyfikatu dla przedsiębiorstwa produkcyjnego obejmuje ocenę właściwości pelletu drzewnego oraz ocenę przebiegu procesu produkcyjnego. Do najpopularniejszych systemów zapewniania jakości pelletu drzewnego należą międzynarodowe certyfikaty ENplus oraz DINplus. Standardy te określają parametry jakościowe pelletu drzewnego (tabela 4.1) oraz wymagania dotyczące zakładowej kontroli produkcji.

Tabela 4.1. Parametry jakościowe pelletu drzewnego według schematów certyfikacji ENplus oraz DINplus

Parametr	Jednostka	ENplus A1	ENplus A2	EN B	DINplus
Średnica	[mm]	6 lub 8 (± 1)			6 lub 8 (± 1)
Długość	[mm]	$3,15 \leq L \leq 40$			$3,15 \leq L \leq 40$
Gęstość nasypowa	[kg/m ³]	$600 \leq g \leq 750$			$600 \leq g \leq 750$
Wilgotność	[%]	≤ 10			≤ 10
Pył i granulat długości < 3,5 mm	[%]	≤ 1 (pellet luzem) $\leq 0,5$ (worki do 30 kg)			≤ 1 (duże worki i opakowania zbiorcze) $\leq 0,5$ (worki do 20 kg)
Wytrzymałość mechaniczna	[%]	$\geq 98,0$	$\geq 97,5$	$\geq 97,5$	$\geq 97,5$
Zawartość popiołu	[%]	$\leq 0,7$	$\leq 1,2$	$\leq 2,0$	$\leq 0,7$
Wartość opałowa	[kWh/kg]	$\geq 4,6$			$\geq 4,6$
Zawartość dodatków	[%]	≤ 2			≤ 2

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: Polska Rada Pelletu (2024).

Przebieg certyfikacji składa się z inspekcji technicznej procesu produkcyjnego, szkoleń stanowiskowych oraz audytu certyfikującego wraz z pobraniem próbki do badań laboratoryjnych (w zewnętrznym, autoryzowanym laboratorium). Schematy certyfikacji ENplus oraz DINplus przeznaczone są również dla firm zajmujących się dystrybucją, pakowaniem czy dostawą pelletu drzewnego (Kędziora-Urbanowicz, 2022b).

Jednym z najważniejszych warunków przystąpienia do procesu certyfikacji jakości pelletu drzewnego jest powtarzalność rezultatów procesu produkcyjnego. Powtarzalność parametrów i właściwości charakteryzujących wytwarzany granulat zależy między innymi od (Kędziora-Urbanowicz, 2022a):

- technologii produkcji;
- doboru surowca o jednakowej frakcji i źródle pochodzenia;
- odpowiedniego sprasowania surowca;
- właściwego schłodzenia pelletu;

- wykorzystania dodatków na poziomie zgodnym z obowiązującymi normami;
- prawidłowego oddzielenia drobnych frakcji.

Przedsiębiorstwo produkcyjne, które uzyskało certyfikat ENplus lub DIN-plus, oferuje odbiorcom pellet drzewny najwyższej jakości oraz zwiększa swoją konkurencyjność na rynku lokalnym. Produkcja pelletu drzewnego zgodnie z międzynarodowymi standardami jakości pozwala na rozszerzenie działalności przedsiębiorstwa na rynek krajowy i międzynarodowy.

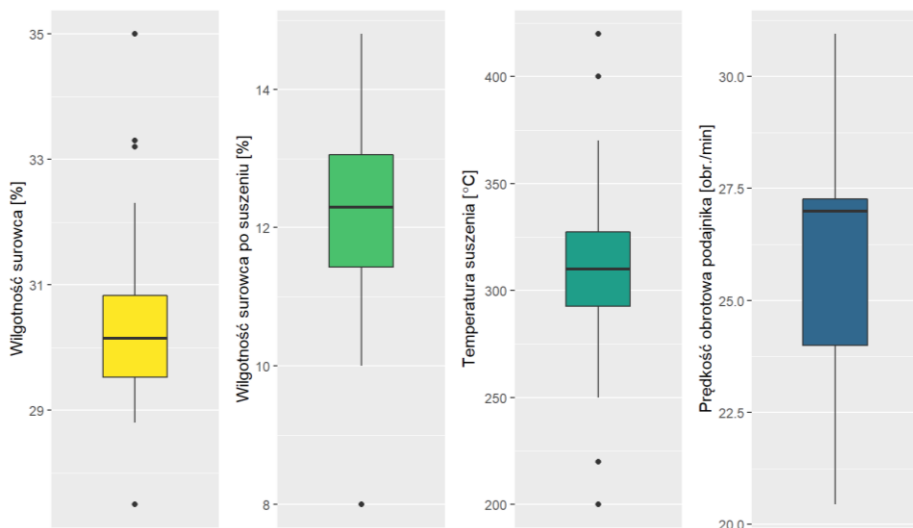
4.3. Poprawa jakości produkowanego pelletu drzewnego. Zastosowanie proponowanych modyfikacji planów eksperymentów – studium przypadku

W pewnym przedsiębiorstwie, którego głównym obszarem działalności jest przetwórstwo drzewne, od 2021 roku rozpoczęto produkcję pelletu drzewnego. Celem przedsiębiorstwa w zakresie produkcji pelletu drzewnego jest utrzymanie wysokiej jakości produktu przy jednoczesnym uzyskaniu jak najlepszej wydajności linii produkcyjnej. Osiągnięcie wyznaczonego celu jest przedsięwzięciem bardzo złożonym. Na rozważany proces produkcyjny potencjalny wpływ mają zarówno czynniki kontrolowane (np. temperatura suszenia), jak i czynniki niekontrolowane (np. temperatura otoczenia). W celu zbadania zależności jakości wytwarzanego pelletu od ustawień parametrów procesu produkcyjnego podjęto decyzję o wykorzystaniu metody planowania eksperymentów. Zgodnie z procedurą planowania eksperymentów w toku procesu produkcyjnego (por. podrozdział 1.2) w pierwszym etapie badania zidentyfikowano i sformułowano problem badawczy. Celem badania było wskazanie czynników, które istotnie wpływają na rezultaty procesu produkcji pelletu drzewnego wytwarzanego w wybranym przedsiębiorstwie. Ponadto zadaniem eksperymentatora było określenie charakteru zależności jakości pelletu od wskazanych czynników.

W drugim etapie dokonano wyboru czynników i określono ich poziomy. Przeprowadzono analizę poszczególnych etapów procesu produkcji pelletu i wskazano czynniki, które potencjalnie wpływają na jakość wytwarzanego pelletu. Uwzględniono tylko te czynniki, dla których nie występują trudności pomiarowe. W eksperymencie rozważono cztery czynniki kontrolowane:

- X_1 – wilgotność surowca (%),
- X_2 – wilgotność surowca po suszeniu (%),
- X_3 – temperaturę suszenia ($^{\circ}\text{C}$),
- X_4 – prędkość obrotową podajnika (obr./min).

W celu ustalenia zakresu zmienności i poziomów czynników kontrolowanych przeprowadzono pomiary wartości każdego z czynników w toku procesu produkcyjnego. Uzyskane pomiary w postaci graficznej przedstawia rysunek 4.3.



Rysunek 4.3. Wyniki pomiarów poszczególnych czynników

Źródło: Opracowanie własne.

Specyfika badanego procesu produkcyjnego uniemożliwiała uzyskanie dokładnych wartości poszczególnych poziomów czynników. Zaproponowano alternatywną metodę ustalenia poziomów czynników, która jest nawiązaniem do autorskiej propozycji dotyczącej czynników nieprecyzyjnie określonych (por. Szerszunowicz, 2011). Na podstawie dokonanych pomiarów dla każdego z czynników wyznaczono wartość mediany, uzyskując wyniki: $Me_1 = 30,15\%$, $Me_2 = 12,30\%$, $Me_3 = 310^\circ\text{C}$, $Me_4 = 27 \text{ obr./min}$. Ustalono, że każdy z rozważanych czynników będzie uwzględniany na dwóch poziomach:

- górnym (oznaczanym „1”), gdy wartość czynnika X_i będzie większa od Me_i ;
- dolnym (oznaczanym „-1”), gdy wartość czynnika X_i będzie mniejsza lub równa Me_i .

Trzeci etap planowania eksperymentów był związany z ustaleniem zmiennej wynikowej, która najlepiej charakteryzuje proces wytwarzania pelletu. W rozważanym badaniu ustalono dwie zmienne wynikowe:

- Y_1 – gęstość nasypową granulatu;
- Y_2 – wydajność linii produkcyjnej.

Wartość gęstości nasypowej granulatu charakteryzowała wagę pelletu (w kilogramach) w pojemniku o objętości 1 m^3 . Wydajność linii produkcyjnej

była opisana przez wagę wyprodukowanego pelletu (w kilogramach) w ciągu godziny. Wskazane zmienne wynikowe pozwalają na ocenę jakości wytwarzanego granulatu, jak również efektywności procesu produkcji pelletu. Zazwyczaj gęstość nasypowa pelletu drzewnego kształtuje się na poziomie od 500 kg/m³ do 800 kg/m³, natomiast wydajność rozważanej linii produkcyjnej przyjmuje wartości od 300 kg/h do 450 kg/h. Na podstawie fachowej wiedzy i przyjętych norm wskazano zakresy wartości zmiennych wynikowych, które świadczyłyby o właściwym przebiegu procesu produkcji pelletu drzewnego. Przyjęto, że pellet dobrej jakości charakteryzuje się gęstością nasypową od 690 kg/m³ do 710 kg/m³, natomiast wydajność linii peletyzującej powinna wynosić od 380 kg/h do 400 kg/h.

Czwarty etap planowania eksperymentów w toku procesu produkcyjnego obejmuje dobór odpowiedniego planu eksperymentu. W pierwszej kolejności rozważono całkowity eksperyment czynnikowy typu 2⁴, dla którego należy wykonać 16 pojedynczych doświadczeń. Specyfika procesu produkcji pelletu w rozważanym przedsiębiorstwie nie pozwalała w krótkim czasie i w jednakowych warunkach przeprowadzić takiej liczby doświadczeń. Stąd podjęto decyzję o wykorzystaniu ułamkowego planu eksperymentu czynnikowego typu 2⁴⁻¹ oraz przyjęto, że poszczególne doświadczenia będą przeprowadzane w sposób losowy. Schemat realizacji eksperymentu, wraz ze wskazaniem kolejności doświadczeń, przedstawia tabela 4.2. Ustalony plan eksperymentu pozwala na zmniejszenie liczby doświadczeń w eksperymencie o połowę. Wówczas przeprowadzenie doświadczeń przebiega w możliwie jednakowych warunkach, co pozwala na względną redukcję wpływu czynników zakłócających. Ponadto ograniczenie liczby doświadczeń prowadzi do skrócenia czasu realizacji eksperymentu. Pozwala to na zmniejszenie kosztów związanych z eksploatacją linii produkcyjnej oraz ewentualnymi przestojami w procesie produkcyjnym.

Tabela 4.2. Schemat realizacji doświadczeń ułamkowego planu eksperymentu czynnikowego typu 2⁴⁻¹

Numer doświadczenia (kolejność)	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄
1 (6)	1	1	1	1
2 (3)	1	1	-1	-1
3 (8)	1	-1	1	-1
4 (4)	1	-1	-1	1
5 (7)	-1	1	1	-1
6 (2)	-1	1	-1	1
7 (1)	-1	-1	1	1
8 (5)	-1	-1	-1	-1

Źródło: Opracowanie własne.

Ustalenie poziomów czynników i zmiennych wynikowych oraz wybór planu eksperymentu pozwoliły na przystąpienie do realizacji zaplanowanych doświadczeń w określonej kolejności. Wyniki realizacji kolejnych doświadczeń przedstawia tabela 4.3.

Tabela 4.3. Wyniki przeprowadzonych doświadczeń

Numer doświadczenia (kolejność)	X_1	X_2	X_3	X_4	Y_1	Y_2
1 (6)	1	1	1	1	714	468
2 (3)	1	1	-1	-1	730	324
3 (8)	1	-1	1	-1	696	372
4 (4)	1	-1	-1	1	850	354
5 (7)	-1	1	1	-1	694	318
6 (2)	-1	1	-1	1	512	348
7 (1)	-1	-1	1	1	610	330
8 (5)	-1	-1	-1	-1	802	336

Źródło: Opracowanie własne.

Celem realizacji rozważanego eksperymentu było określenie zależności zmiennych wynikowych od poszczególnych czynników. W badaniu uwzględniono dwie zmienne wynikowe, stąd rozważono dwie funkcje powierzchni odpowiedzi postaci:

$$y^{(1)} = \beta_0^{(1)} + \beta_1^{(1)}x_1 + \beta_2^{(1)}x_2 + \beta_3^{(1)}x_3 + \beta_4^{(1)}x_4 + \varepsilon^{(1)}, \quad (4.1)$$

$$y^{(2)} = \beta_0^{(2)} + \beta_1^{(2)}x_1 + \beta_2^{(2)}x_2 + \beta_3^{(2)}x_3 + \beta_4^{(2)}x_4 + \varepsilon^{(2)}. \quad (4.2)$$

W celu określenia zależności zmiennej wynikowej Y_1 od rozważanych czynników oszacowano wartości współczynników funkcji powierzchni odpowiedzi postaci (4.1) oraz zweryfikowano ich istotność. Ze względu na niewielką liczbę obserwacji, ocena istotności parametrów funkcji powierzchni odpowiedzi została przeprowadzona z wykorzystaniem odpowiednich testów permutacyjnych (por. podrozdział 3.3 oraz Złotoś, 2020). Wyniki przeprowadzonych analiz przedstawia tabela 4.4.

Tabela 4.4. Ocena istotności parametrów funkcji powierzchni odpowiedzi postaci (4.1)

Parametr $\beta_i^{(1)}$	Wartość estymatora parametru $\beta_i^{(1)}$	Wartość $\hat{A\hat{S}L}$
$\beta_0^{(1)}$	701,00	0,5402
$\beta_1^{(1)}$	46,50	0,3678
$\beta_2^{(1)}$	-38,50	0,3043
$\beta_3^{(1)}$	-22,50	0,5217
$\beta_4^{(1)}$	-29,50	0,4732

Źródło: Opracowanie własne.

Dla każdego z oszacowanych parametrów wartość $\hat{A\hat{S}L}$, wyznaczona zgodnie z wzorem (3.76), jest większa od ustalonego poziomu istotności, zatem nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o braku wpływu czynników na wartości zmiennej wynikowej Y_1 .

Analogiczne rozważania przeprowadzono dla zmiennej wynikowej Y_2 . Wyniki przeprowadzonych testów permutacyjnych służących weryfikacji istotności oszacowanych parametrów funkcji powierzchni odpowiedzi postaci (4.2) przedstawia tabela 4.5.

Tabela 4.5. Ocena istotności parametrów funkcji powierzchni odpowiedzi postaci (4.2)

Parametr $\beta_i^{(2)}$	Wartość estymatora parametru $\beta_i^{(2)}$	Wartość $\hat{A\hat{S}L}$
$\beta_0^{(2)}$	356,25	0,5402
$\beta_1^{(2)}$	23,25	0,2267
$\beta_2^{(2)}$	8,25	0,9607
$\beta_3^{(2)}$	15,75	0,3795
$\beta_4^{(2)}$	18,75	0,3223

Źródło: Opracowanie własne.

Podobnie jak w przypadku zmiennej wynikowej Y_1 , wartości $\hat{A\hat{S}L}$ wyznaczono zgodnie z wzorem (3.76), a uzyskane wyniki nie pozwalają na wskazanie czynników mających istotny wpływ na wartości zmiennej wynikowej Y_2 . Zatem analiza wyników przeprowadzonych doświadczeń, wykorzystująca testy permutacyjne, nie umożliwiła sformułowania zaleceń dla ustawienia parametrów rozważanego procesu produkcji pelletu drzewnego.

Należy zauważyć, że przeprowadzona analiza wyników doświadczeń odnosiła się indywidualnie do każdej z rozważanych zmiennych wynikowych. W praktyce może to prowadzić do niejednoznacznych wyników (np. jeden czynnik będzie miał istotny wpływ tylko na jedną z rozważanych zmiennych). Ponadto badanie nie uwzględniało pożądanego zakresu wartości zmiennych wyniko-

wych, które zostały ustalone na etapie projektowania planu eksperymentu. Oznacza to, że należy poszukiwać metod konstrukcji takiego planu eksperymentu, który pozwoli na analizę wyników doświadczeń uwzględniających jednocześnie więcej niż jedną zmienną wynikową. W szczególności należy rozważyć zmienne wynikowe, których wartości powinny się mieścić w pożądanym zakresie zmienności.

W literaturze rozważane są metody analizy wyników doświadczeń z uwzględnieniem co najmniej dwóch zmiennych wynikowych, które opierają się na metodach graficznych oraz uwzględniają funkcje powierzchni odpowiedzi o istotnych parametrach (por. Ryan, 2007). Ze względu na uzyskane wyniki dla zmiennych Y_1 oraz Y_2 zastosowanie tych metod dla rozważanego procesu produkcyjnego nie jest uzasadnione. W dalszej części rozdziału zaproponowano alternatywną metodę analizy wyników doświadczeń, która uwzględnia dwie zmienne wynikowe oraz ich pożądaną zakresy zmienności.

Rozważany będzie eksperyment uwzględniający k czynników, który wymaga realizacji n doświadczeń. W badaniu uwzględniono dwie zmienne wynikowe Y_1 oraz Y_2 , dla których ustalono pożądaną zakresy zmienności odpowiednio $Y_1^{(z)} = [y_{1d}, y_{1g}]$ oraz $Y_2^{(z)} = [y_{2d}, y_{2g}]$. W celu określenia zależności pomiędzy uwzględnionymi czynnikami a rozważanymi zmiennymi wynikowymi łącznie zaproponowano konstrukcję zmiennej syntetycznej uwzględniającej zmienne składowe Y_1 oraz Y_2 .

W pierwszym etapie dla każdej realizacji zmiennej wynikowej w poszczególnych doświadczeniach wyznaczana jest wartość funkcji postaci:

$$K(y_{ij}) = \begin{cases} 0, & y_{ij} \in Y_j^{(z)} \\ d(y_{ij}, Y_j^{(z)}), & y_{ij} \notin Y_j^{(z)} \end{cases}, \quad (4.3)$$

gdzie $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2$ oraz $d(y_{ij}, Y_j^{(z)}) = \inf_{y \in Y_j^{(z)}} d(y_{ij}, y)$ jest odległością punktu y_{ij} od zbioru $Y_j^{(z)}$. Funkcja (4.3) charakteryzuje położenie rzeczywistych wartości zmiennych wynikowych składowych względem pożądanego zakresów zmienności. Następnie wartości funkcji postaci (4.3) są poddawane normalizacji zgodnie z formułą:

$$z_{ij} = \frac{K(y_{ij})}{\max_i K(y_{ij})}. \quad (4.4)$$

W drugim etapie wyznaczane są wartości syntetycznej zmiennej wynikowej zgodnie z formułą:

$$\tilde{y}_i = \delta z_{i1} + (1 - \delta) z_{i2}, \quad (4.5)$$

gdzie δ jest ustaloną wartością z przedziału $(0,1)$. Wartości δ i $1 - \delta$ odpowiadają wagom poszczególnych zmiennych wynikowych składowych Y_1 oraz Y_2 i mogą być ustalane celowo, w zależności od specyfiki analizowanych zmiennych. Zdefiniowana zmienna syntetyczna stanowi podstawę dalszej analizy wyników doświadczeń.

Funkcja powierzchni odpowiedzi charakteryzująca zależność syntetycznej zmiennej wynikowej $\tilde{Y}$ od k czynników uwzględnianych w eksperymencie wyrażona jest równaniem:

$$\tilde{y} = \gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \dots + \gamma_k x_k + \tilde{\varepsilon}. \quad (4.6)$$

Analiza wyników eksperymentu obejmująca ocenę istotności parametrów funkcji powierzchni odpowiedzi postaci (4.6) może być przeprowadzona z wykorzystaniem metod klasycznych lub testów permutacyjnych (Złotoś, 2019, 2020). Wówczas otrzymane wyniki pozwolą na wskazanie tych czynników, które mają istotny wpływ na wartości syntetycznej zmiennej wynikowej.

W badaniu dotyczącym procesu produkcji pelletu drzewnego w przedsiębiorstwie „T” uwzględniono dwie zmienne wynikowe: gęstość nasypową (Y_1) oraz wydajność linii produkcyjnej (Y_2), dla których określono pożądane zakresy zmienności odpowiednio $Y_1^{(z)} = [690, 710]$ oraz $Y_2^{(z)} = [380, 400]$. Zgodnie z proponowaną metodą analizy wyników eksperymentu dla każdej z uzyskanych wartości zmiennych wynikowych wyznaczono wartości funkcji (4.3), która dla rozważnego procesu przyjmuje postaci:

$$K(y_{i1}) = \begin{cases} 0, & y_{i1} \in Y_1^{(z)} \\ d(y_{i1}, Y_1^{(z)}), & y_{i1} \notin Y_1^{(z)} \end{cases}, \quad (4.7)$$

oraz

$$K(y_{i2}) = \begin{cases} 0, & y_{i2} \in Y_2^{(z)} \\ d(y_{i2}, Y_2^{(z)}), & y_{i2} \notin Y_2^{(z)} \end{cases}, \quad (4.8)$$

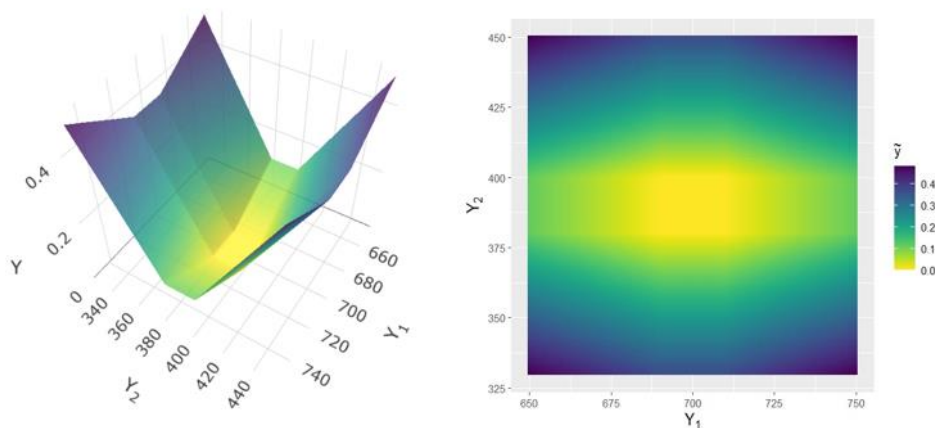
gdzie $i = 1, 2, \dots, 8$. Następnie przeprowadzono normalizację postaci (4.4) otrzymanych wartości. Ponadto wyznaczono wartości syntetycznej zmiennej wynikowej zgodnie z formułą (4.5). Na podstawie przesłanek praktycznych i fachowej wiedzy eksperymentatora w obliczeniach przyjęto wartość $\delta = 0,5$. Znormalizowane wartości funkcji (4.7), (4.8) oraz wartości syntetycznej zmiennej wynikowej dla każdego z doświadczeń przedstawia tabela 4.6.

Tabela 4.6. Znormalizowane wartości funkcji (4.7) i (4.8) oraz wartości zmiennej syntetycznej

Numer doświadczenia (kolejność)	X_1	X_2	X_3	X_4	z_{i1}	z_{i2}	$\tilde{y}_i$
1 (6)	1	1	1	1	0,0225	1,0000	0,5112
2 (3)	1	1	-1	-1	0,1124	0,8235	0,4679
3 (8)	1	-1	1	-1	0,0000	0,1176	0,0588
4 (4)	1	-1	-1	1	0,7865	0,3824	0,5844
5 (7)	-1	1	1	-1	0,0000	0,9118	0,4559
6 (2)	-1	1	-1	1	1,0000	0,4706	0,7353
7 (1)	-1	-1	1	1	0,4494	0,7353	0,5924
8 (5)	-1	-1	-1	-1	0,5169	0,6471	0,5820

Źródło: Opracowanie własne.

Teoretyczne wartości syntetycznej zmiennej wynikowej w zależności od wartości zmiennych składowych Y_1 oraz Y_2 prezentuje rysunek 4.4. Należy zauważyć, że rezultaty procesu produkcyjnego będą charakteryzowały się wysoką jakością wtedy, gdy wartości syntetycznej zmiennej wynikowej będą jak najmniejsze (tj. wartości poszczególnych zmiennych składowych przyjmują wartości z pożądaných zakresów zmienności lub wartości do nich zbliżone).



Rysunek 4.4. Wartości teoretyczne syntetycznej zmiennej wynikowej

Źródło: Opracowanie własne.

Rozważana będzie funkcja powierzchni odpowiedzi określająca zależność syntetycznej zmiennej wynikowej $\tilde{Y}$ od uwzględnianých czynników postaci:

$$\tilde{y} = \gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 + \gamma_4 x_4 + \tilde{\varepsilon}. \quad (4.9)$$

Analiza ustalonej funkcji powierzchni odpowiedzi została przeprowadzona z wykorzystaniem testów permutacyjnych. Wyniki oszacowań parametrów funkcji powierzchni odpowiedzi (4.9) oraz ocenę ich istotności przedstawia tabela 4.7.

Tabela 4.7. Wyniki analizy funkcji powierzchni odpowiedzi postaci (4.9)

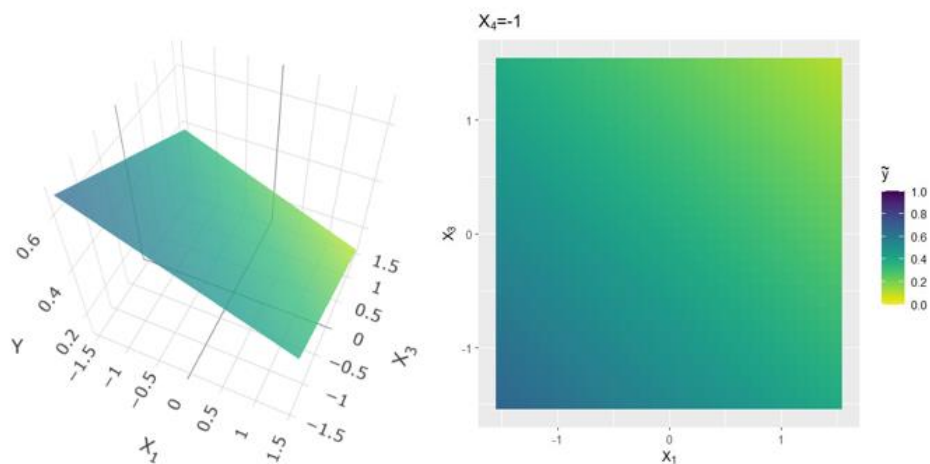
Parametr γ_i	Wartość estymatora parametru γ_i	Wartość $\hat{A\hat{S}L}$
γ_0	0,4985	0,0182
γ_1	-0,0929	0,0269
γ_2	0,0440	0,4082
γ_3	-0,0939	0,0347
γ_4	0,1073	0,0090

Źródło: Opracowanie własne.

Uzyskane oszacowania wartości $\hat{A\hat{S}L}$ są mniejsze od ustalonego poziomu istotności $\alpha = 0,05$ dla parametrów $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_3, \gamma_4$. Oznacza to, że wartości syntetycznej zmiennej wynikowej $\tilde{Y}$ zależą istotnie od czynników X_1, X_3 oraz X_4 . W celu wskazania ustawień czynników, dla których zmienna wynikowa będzie osiągała najmniejsze wartości, należy rozważyć funkcję powierzchni odpowiedzi daną równaniem:

$$\hat{\tilde{y}} = 0,4985 - 0,0929x_1 - 0,0939x_3 + 0,1073x_4. \quad (4.10)$$

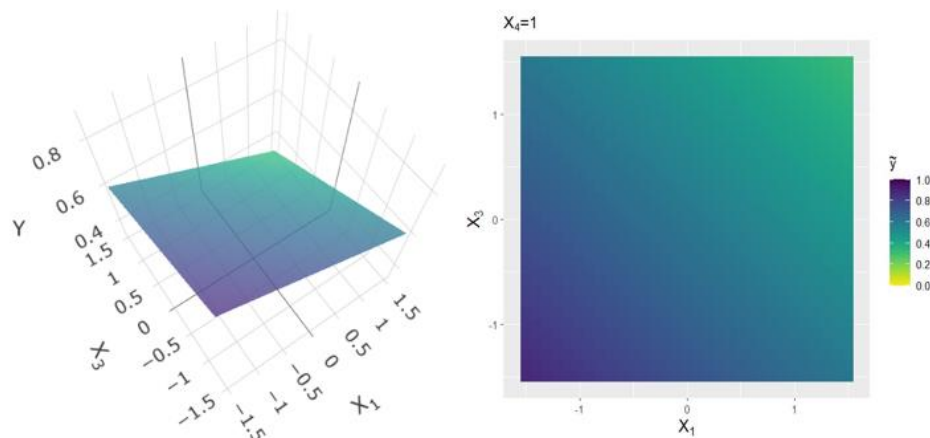
Wówczas dla czynnika X_4 ustalonego na dolnym poziomie uzyskanie najmniejszej wartości syntetycznej zmiennej wynikowej będzie możliwe wtedy, gdy czynniki X_1 oraz X_3 będą ustalone na górnych poziomach. Zależność wartości funkcji powierzchni odpowiedzi (4.10) od ustawień czynników X_1 i X_3 , dla $X_4 = -1$ przedstawia rysunek 4.5.



Rysunek 4.5. Wartości funkcji powierzchni odpowiedzi (4.10) dla czynnika $X_4 = -1$

Źródło: Opracowanie własne.

W przypadku gdy czynnik X_4 będzie ustalony na górnym poziomie, najmniejsza wartość syntetycznej zmiennej wynikowej zostanie osiągnięta dla czynników X_1 oraz X_3 ustalonych na górnych poziomach. Wartości funkcji powierzchni odpowiedzi (4.6) w zależności od poziomów czynników X_1 oraz X_3 , dla $X_4 = 1$ przedstawia rysunek 4.6. Należy zauważyć, że najlepsze ze wskazanych dwóch ustawień czynników będzie ustalenie czynnika X_4 na poziomie dolnym, a czynników X_1 oraz X_3 na poziomach górnych.



Rysunek 4.6. Wartości funkcji powierzchni odpowiedzi (4.10) dla czynnika $X_4 = 1$

Źródło: Opracowanie własne.

Uzyskane wyniki dla rozważanego procesu produkcyjnego pelletu drzewnego pozwalają na przyjęcie stwierdzenia, że gęstość nasypowa pelletu oraz wydajność linii peletyzującej zależą istotnie od wilgotności surowca (czynnik X_1), temperatury suszenia (czynnik X_3) oraz od prędkości obrotowej podajnika (czynnik X_4). Ponadto możliwe jest uzyskanie wartości gęstości nasypowej i wydajności linii peletyzującej mieszczących się w odpowiednich pożądanym zakresach wartości.

Ostatecznie dla rozważanego procesu produkcyjnego sformułowano zalecenie, które mówi, że uzyskanie pelletu dobrej jakości wiąże się z:

- wykorzystaniem do produkcji surowca o wilgotności powyżej 30,15%;
- ustaleniem temperatury suszenia powyżej 310 °C;
- ustawieniem prędkości obrotowej podajnika na poziomie mniejszym lub równym 27 obr./min.

Powyższe ustawienia czynników zapewniają największe szanse na uzyskanie wartości gęstości nasypowej oraz wydajności linii peletyzującej na poziomach odpowiadających pożądanym zakresom zmienności.

Specyfika procesu produkcji pelletu drzewnego w wybranym przedsiębiorstwie wymagała odwołania się do nieklasycznych metod w odniesieniu do sposobu ustalania poziomów czynników oraz do analizy wyników doświadczeń. Zaproponowana konstrukcja planu eksperymentu pozwoliła na uwzględnienie dwóch zmiennych wynikowych, które charakteryzowały rezultaty rozważanego procesu produkcyjnego. Wykorzystano autorską propozycję oszacowania wartości syntetycznej zmiennej wynikowej, która pozwoliła na ocenę wpływu czynników na zmienne wynikowe łącznie. Efektem przeprowadzonej analizy wyników eksperymentu było sformułowanie zalecenia dla rozważanego procesu produkcyjnego w celu uzyskania jak najlepszych rezultatów procesu.

W przedstawionej propozycji zastosowania alternatywnej konstrukcji planu eksperymentu w procesie produkcji pelletu drzewnego wykorzystano wcześniej zaprezentowane autorskie rozwiązania. Dotyczyły one problemów związanych z precyzyjnym ustaleniem poziomów czynników, uwzględnieniem dwóch zmiennych wynikowych, a także zastosowania testów permutacyjnych w analizie wyników przeprowadzonego eksperymentu. Wykorzystanie autorskiej propozycji określenia poziomów czynników pozwoliło na uwzględnienie w eksperymencie czynników występujących na dwóch poziomach. Rozwiązanie to umożliwiło także ustalenie odpowiedniego schematu realizacji doświadczeń.

Zaprezentowana propozycja obejmowała dwie zmienne wynikowe, dla których określone zostały pożądanym zakresy zmienności. W takich zagadnieniach klasyczne metody planowania eksperymentów zazwyczaj odnoszą się do każdej zmiennej wynikowej indywidualnie, a nieliczne metody uwzględniające dwie

zmienne wynikowe nie rozważają pożądaných zakresów zmienności. Proponowana metoda wykorzystująca odpowiednio określoną zmienną syntetyczną pozwoliła na przeprowadzenie analizy jednej funkcji powierzchni odpowiedzi, która uwzględnia dwie zmienne wynikowe wraz z ich pożądanymi zakresami zmienności.

Wykorzystanie testów permutacyjnych umożliwiło przeprowadzenie skutecznego wnioskowania o parametrach funkcji powierzchni odpowiedzi wtedy, gdy liczba zrealizowanych doświadczeń była bardzo mała. Ponadto zastosowanie w proponowanej konstrukcji eksperymentu testów permutacyjnych nie wymagało weryfikacji założeń dotyczących postaci rozkładu zmiennej wynikowej.



ZAKOŃCZENIE

Pierwsze wzmianki o zastosowaniu planowania eksperymentów pojawiły się na początku XX wieku w badaniach dotyczących doświadczalnictwa rolniczego. Intensywny rozwój tych metod nastąpił w latach 60. i 70. XX wieku, kiedy metody statystycznej kontroli jakości znalazły zastosowanie w przedsiębiorstwach produkcyjnych. Obecnie obserwowany postęp technologiczny oraz innowacyjne metody produkcji przyczyniają się do poszukiwania nowych rozwiązań z zakresu statystycznej kontroli jakości. Ponadto nowoczesne przedsiębiorstwa produkcyjne dążą do uzyskania produktów wysokiej jakości, przy jednoczesnym ograniczeniu kosztów produkcji. Metody planowania eksperymentów pozwalają na właściwe zaprojektowanie rezultatów procesu produkcyjnego, a także uwzględniają aspekty ekonomiczne tego procesu.

W niniejszej pracy przedstawiono charakterystykę procedury planowania eksperymentów oraz zaprezentowano wybrane metody statystyczne, które zazwyczaj są wykorzystywane w konstrukcji planów eksperymentów. Scharakteryzowano metody budowy klasycznych planów eksperymentów oraz całkowitych i ułamkowych planów eksperymentów czynnikowych. Opisano również podstawy teoretyczne oraz metody analizy funkcji powierzchni odpowiedzi.

W opracowaniu zaprezentowano propozycje konstrukcji planów eksperymentów czynnikowych oraz rozwinięcia i modyfikacje wybranych rozwiązań wcześniej zaproponowanych przez autorkę. Przedstawiono propozycję metody ustalenia poziomów czynników, których wartości zostały nieprecyzyjnie określone oraz jej zastosowanie. Wprowadzono elementy teorii pól losowych oraz wskazano możliwości ich implementacji w konstrukcji planu eksperymentu dotyczącego wytrzymałości ustalonego materiału. Przedstawione rozwiązanie pozwoliło na ograniczenie liczby doświadczeń oraz ich realizację we względnie jednorodnych warunkach. Zaproponowana została również alternatywna konstrukcja planu eksperymentu prowadząca do redukcji liczby doświadczeń. Sformułowano ją na podstawie metody pól prób zrównoważonych oraz metody zgrupowanych pól prób zrównoważonych.

Jednym z zagadnień rozważanych w zakresie metodologii funkcji powierzchni odpowiedzi jest ustalenie planu eksperymentu, który pozwoli na oszacowanie postaci funkcji powierzchni odpowiedzi. W pracy zaproponowano metodę utworzenia planu eksperymentu, która wykorzystuje elementy statystyki przestrzennej (statystyki globalne i lokalne Morana). Metoda ta nie tylko prowadzi do wyznaczenia punktów obszaru eksperymentowania, ale również pozwala na analizę nieliniowej funkcji powierzchni odpowiedzi.

Analiza statystyczna wyników zrealizowanych doświadczeń przeprowadzana jest zazwyczaj z wykorzystaniem analizy wariancji i analizy regresji. Metody te wymagają spełnienia określonych założeń, które w praktyce nie zawsze mogą być zapewnione. W pracy przedstawiono możliwości wykorzystania nieklasycznych metod statystycznych w analizie wyników przeprowadzonych doświadczeń. Zaproponowano estymację parametrów funkcji powierzchni odpowiedzi z wykorzystaniem metody bootstrap oraz przedstawiono modyfikację autorskiej metody poszukiwania warunków optymalnych analizy funkcji powierzchni odpowiedzi z wykorzystaniem metody BCa (*bias-corrected and accelerated*).

W zakresie wykorzystania nieklasycznych metod statystycznych w planowaniu eksperymentów odwołano się również do testów permutacyjnych. Zaprezentowano autorskie propozycje zastosowania testów permutacyjnych w analizie wyników eksperymentu oraz zaproponowano ich wykorzystanie w ocenie istotności parametrów funkcji powierzchni odpowiedzi. Przedstawione rozwiązania pozwoliły na sformułowanie wniosków dla rozważanych zagadnień wtedy, gdy liczba przeprowadzonych doświadczeń była niewielka lub niemożliwe było zapewnienie zgodności rozkładu badanej zmiennej z rozkładem normalnym.

Niniejsza praca miała również charakter aplikacyjny. Opisano w niej możliwość wdrożenia metod planowania eksperymentów w procesie produkcji pelletu drzewnego. Zaprezentowano poszczególne etapy procesu produkcji pelletu drzewnego oraz scharakteryzowano działalność przedsiębiorstwa, w którym przeprowadzono badanie. Dla rozważanego procesu zaproponowano autorską konstrukcję planu eksperymentu, która odwołuje się do wcześniejszych rozwiązań prezentowanych przez autorkę. Rozwiązanie to pozwala na analizę procesu produkcyjnego, którego rezultaty scharakteryzowane są przez dwie zmienne wynikowe, a poziomy czynników nie zostały precyzyjnie ustalone. Ponadto ze względu na niewielką liczbę zrealizowanych doświadczeń wykorzystanie testów permutacyjnych pozwoliło na skuteczną analizę otrzymanych wyników. Zaprezentowane w niniejszym opracowaniu autorskie rozwiązania pozwalają na skuteczne zastosowanie metod planowania eksperymentów wtedy, gdy realizacja doświadczeń zgodnie z klasycznymi planami eksperymentów nie jest możliwa lub może prowadzić do niewiarygodnych wyników.



BIBLIOGRAFIA

- Abdoli M. A., Golzary A., Hosseini A., Sadeghi P. (2018), *Wood Pellet as a Renewable Source of Energy: From Production to Consumption*, Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-74482-7>
- Aczel A. D. (2000), *Statystyka w zarządzaniu*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Angrist J. D., Imbens G. W., Rubin D. B. (1996), *Identification of Casual Effects Using Instrumental Variables*, „Journal of the American Statistical Association”, Vol. 91(434), s. 444-455.
- Angrist J. D, Pischke J. (2009), *Mostly Harmless Econometrics*, Princeton University Press, Princeton.
- Anselin L. (1995), *Local Indicators of Spatial Association-LISA*, „Geographical Analysis”, Vol. 27, s. 93-115.
- Antony J. (2003), *Design of Experiments for Engineers and Scientists*, Butterworth-Heinemann, Oxford.
- Antony J., Coleman S., Montgomery D. C., Anderson M. J., Silvestrini R. T. (2011), *Design of Experiments for Non-Manufacturing Processes: Benefits, Challenges and Some Examples*, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: „Journal of Engineering Manufacture”, Vol. 225, s. 2078-2084.
- Antony J., Viles E., Torres A. F., Fernandes M. M., Cudney E. A. (2021), *Design of Experiments in the Service Industry: Results from a Global Survey and Directions for Further Research*, „The TQM Journal”, Vol. 33(5), s. 987-1000. <https://doi.org/10.1108/TQM-09-2020-0223>
- Antony J., Viles E., Torres A. F., Paula T. I., Fernandes M. M., Cudney E. A. (2020), *Design of Experiments in the Service Industry: A Critical Literature Review and Future Research Directions*, „The TQM Journal”, Vol. 32(6), s. 1159-1175. <https://doi.org/10.1108/TQM-02-2020-0026>
- Banerjee A., Duflo E. (2011), *Poor Economics: A Radical Rethinking of the Way to Fight Global Poverty*, Public Affairs, New York.
- Banerjee A., Duflo E. (2019), *Good Economics for Hard Times*, Public Affairs, New York.

- Basso D., Pesarin F., Salmaso L., Solari A. (2009), *Permutation Tests for Stochastic Ordering and ANOVA*, Springer Science+Business Media, Heidelberg.
- Bednarski T. (2013), *Rola Jerzego Sławy-Neymana w kształtowaniu metod statystycznej analizy przyczynowości*, „Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu”, nr 209, s. 11-18.
- Beldycka-Bórawska A., Bórawski P., Borychowski M., Wyszomierski R., Bórawski M. B., Rokicki T., Ochnio L., Jankowski K., Mickiewicz B., Dunn J. W. (2021), *Development of Solid Biomass Production in Poland, Especially Pellet, in the Context of the World's and the European Union's Climate and Energy Policies*, „Energies”, Vol. 14, 3587. <https://doi.org/10.3390/en14123587>
- Berry K. J., Johnston J. E., Mielke P. W. Jr. (2014), *A Chronicle of Permutation Statistical Methods*, Springer International Publishing, New York.
- Bioenergy Europe (2024), *Statistical report 2024*. <https://bioenergyeurope.org/statistical-report> (dostęp: 10.04.2025).
- Biomass Media Group (2021), *Pellet drzewny w Polsce*. <https://magazynbiomasa.pl/pellet-drzewny-w-polsce-to-pierwszy-taki-raport-na-rynku> (dostęp: 15.01.2023).
- Box G. E. P (1963), *The Effect of Errors in the Factor Levels and Experimental Design*, „Technometrics”, Vol. 5, s. 247-262.
- Box G. E. P., Draper N. R. (2007), *Response Surfaces, Mixtures and Ridge Analyses*, John Wiley & Sons, New Jersey.
- Box G. E. P., Wilson K. G. (1951), *On the Experimental Attainment of Optimum Conditions*, „Journal of the Royal Statistical Society”, B, Vol. 13, s. 1-45.
- Buttler D. (2022), *Empiryczna rewolucja. Nagroda Banku Szwecji im. Alfreda Nobla w 2021 r.: David Card, Joshua Angrist, Guido Imbens*, „Ekonomista”, nr 1, s. 114-126.
- Buttler D., Szambelańczyk J. (2020), *Eksperymentalne podejście do łagodzenia ubóstwa. Nagroda Banku Szwecji im. Alfreda Nobla w 2019 r.: Esther Duflo, Abhijit Banerjee, Michael Kremer*, „Ekonomista”, nr 1, s. 127-141.
- Card D., Krueger A. B. (1995), *Myth and Measurement. The New Economics of the Minimum Wage*, Princeton University Press, Princeton.
- Cox D. R., Reid N. (2000), *The Theory of the Design of Experiments*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton.
- Danowska-Prokop D., Pęciak B., Zagóra-Jonszta U. (2022), *Problem ubóstwa i nierówności we współczesnej myśli ekonomicznej*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, Katowice
- Dąbrowska D. M., Speed T. P. (1990), *Neyman J. 1923. On the application of Probability Theory to Agricultural Experiments. Essay on Principles. Section 9*, „Statistical Science”, Vol. 5, s. 465-472.
- Dean A., Morris M., Stufken J., Bingham D., (2015), *Handbook of Design and Analysis of Experiments*, CRC Press Taylor & Francis Group, Boca Raton.

- Dean A., Voss D., Draguljić D. (2017), *Design and Analysis of Experiments*, Springer International Publishing, Cham.
- Domański C., Pruska K. (2000), *Nieklasyczne metody statystyczne*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
- Donev A. N. (2004), *Design of Experiments in the Presence of Errors in Factor Levels*, „Journal of Statistical Planning and Inference”, Vol.126, s. 569-585.
- Draper N. R., Beggs W. J. (1971), *Errors in the Factor Levels and Experimental Design*, „The Annals of Mathematical Statistics”, Vol. 41, s. 46-58.
- Dyrektorywa Parlamentu Europejskiego i Rady (UE) 2018/2001 z dnia 11 grudnia 2018 r. w sprawie promowania stosowania energii ze źródeł odnawialnych, Dz. Urz. UE L 328 z 21.12.2018. <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/PL/TXT/PDF/?uri=CELEX:32018L2001&from=PL> (dostęp: 10.01.2024).
- Efron B. (1979), *Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife*, „Annals of Statistics”, Vol. 7(1), s. 1-26.
- Efron B., Tibshirani R. (1993), *An Introduction to the Bootstrap*, Chapman and Hall, New York.
- Elandt R. (1964), *Statystyka matematyczna w zastosowaniu do doświadczalnictwa rolniczego*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- European Parliament (2022), *Fit for 55 package*. [https://www.europarl.europa.eu/RegData/etudes/BRIE/2022/733513/EPRS_BRI\(2022\)733513_EN.pdf](https://www.europarl.europa.eu/RegData/etudes/BRIE/2022/733513/EPRS_BRI(2022)733513_EN.pdf) (dostęp: 15.01.2024).
- Fisher R. A. (1925), *Statistical Methods for Research Workers*, Oliver and Boyd, Edinburgh.
- Fisher R. A. (1935), *The Design of Experiments*, Oliver and Boyd, Edinburgh.
- Gonzalez R. (2009), *Data Analysis for Experimental Design*, The Guilford Press, New York, London.
- Good P. I. (2005), *Permutation, Parametric and Bootstrap Tests of Hypotheses*, Springer Science Business Media Inc., New York.
- Good P. I. (2006), *Resampling Methods. A Practical Guide to Data Analysis*, Birkhauser, Boston-Basel-Berlin 2006.
- Hedayat A. S., Sloane N. J. A., Stufken J. (1999), *Orthogonal Arrays. Theory and Applications*, Springer Science+Business Media, New York.
- Jakubowski J. (1999), *Metoda prób zrównoważonych i jej uogólnienia*, Główny Urząd Statystyczny, Warszawa.
- Kędziora-Urbanowicz A. (2022a), *Dlaczego należy certyfikować produkt?*, „Magazyn Biomasa”, nr 8(89), s. 46-49. https://issuu.com/magbiomasa/docs/mb_2022-08-89_-_issuu/s/17260628 (dostęp: 10.01.2023).
- Kędziora-Urbanowicz A. (2022b), *Po co nam certyfikacje? Jak przebiegają? Ile kosztują?*, „Magazyn Biomasa”, nr 3(84), s. 14-15. https://issuu.com/magbiomasa/docs/2022-03_84-issuu (dostęp: 10.01.2024).

- Kiefer J., Wolfowitz J. (1959), *Optimal Designs in Regression Problems*, „The Annals of Mathematical Statistics”, Vol. 30, s. 271-294.
- Kiefer J., Wolfowitz J. (1960), *The Equivalence of Two Extremum Problems*, „Canadian Journal of Mathematics”, Vol. 12, s. 363-366.
- Kocsis Z., Csanády E. (2019), *Theory and Practice of Wood Pellet Production*, Springer Nature Switzerland AG.
- Konarzewska-Gubała E., red. (2003), *Zarządzanie przez jakość. Koncepcje, metody, studia przypadków*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Wrocław.
- Kończak G. (2007), *Metody statystyczne w sterowaniu jakością produkcji*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Katowice.
- Kończak G. (2012), *Wprowadzenie do symulacji komputerowych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, Katowice.
- Kończak G. (2016), *Testy permutacyjne. Teoria i zastosowania*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, Katowice.
- Kończak G. (2020), *Nieklasyczne metody statystyczne w badaniach ekonomicznych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, Katowice.
- Kopczewska K. (2011), *Ekonometria i statystyka przestrzenna z wykorzystaniem programu R CRAN*, Wydawnictwo CeDeWu, Warszawa.
- Koselka R. (1996), *The New Mantra: MVT*, „Forbes”, March 11, s. 114-118.
- Krzyśko M., Adamczewski W., Berger J., Gołata E., Kruszką K., Łazowska B., red. (2018), *Statystycy Polscy. Biogramy*, Główny Urząd Statystyczny, Warszawa.
- Leciejewski S. (2013), *Cyfrowa rewolucja w badaniach eksperymentalnych*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.
- Lenhard J. (2006), *Models and Statistical Inference: The Controversy between Fisher and Neyman-Pearson*, „The British Journal for the Philosophy of Science”, Vol. 57(1), s. 69-91.
- Mason R. L., Gunst R. F., Hess J. L. (2003), *Statistical Design and Analysis of Experiments: With Applications to Engineering and Science*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- McCarthy P. J. (1966), *Replication: An Approach to the Analysis of Data from Complex Surveys*, National Center of Health Statistics, Washington D.C.
- Mielke P. W. Jr., Berry K. J. (2007), *Permutation Methods. A Distance Function Approach*, Springer Science+Business Media, LLC, New York.
- Miszczał W., Ostasiewicz W., Wawrzynek J. (2008), *Projektowanie próby z elementami planowania eksperymentów*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego, Wrocław.
- Montgomery D. C. (2009), *Introduction to Statistical Quality Control*, John Wiley & Sons Inc., New York.

- Montgomery D. C. (2013), *Design and Analysis of Experiments*, John Wiley & Sons, New York.
- Myers R. H., Montgomery D. C., Andreson-Cook C. M. (2009), *Response Surface Methodology. Process and Product Optimization Using Designed Experiments*, John Wiley & Sons, New Jersey.
- Narodowy Fundusz Ochrony Środowiska i Gospodarki Wodnej (2020), *Program Priorytetowy Czyste Powietrze*. <https://www.gov.pl/attachment/a4b56f4e-f1a8-4a97-a926-c355bc4a2106> (dostęp: 15.01.2024).
- O’Gorman T. W. (2012), *Adaptive Tests of Significance Using Permutations of Residuals with R and SAS*, John Wiley and Sons, New Jersey.
- Pesarin F., Salmaso L. (2010), *Permutation Tests for Complex Data. Theory, Applications and Software*, John Wiley & Sons Inc., Chichester.
- Polska Rada Pelletu (2024), <https://polskaradapelletu.org/o-peliecie/> (dostęp: 10.10.2024).
- Polski Komitet Normalizacyjny (2021a), *Biopaliwa stałe. Specyfikacje paliw i klasy. Część 1: Wymagania ogólne* (PN-EN ISO 17225-1:2021-11).
- Polski Komitet Normalizacyjny (2021b), *Biopaliwa stałe. Specyfikacje paliw i klasy. Część 2: Klasy peletów drzewnych* (PN-EN ISO 17225-2:2021-10).
- Przybycin Z. (2004), *Metody i modele statystyki przestrzennej*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Katowicach, Katowice.
- PWN (2024), Eksperyment, w *Encyklopedia PWN*, <https://encyklopedia.pwn.pl/haslo/eksperyment;3897080.html> (dostęp: 5.01.2023).
- Rao J. N. K., Shao J. (1996), *On Balanced Half-Sample Variance Estimation in Stratified Random Sampling*, „Journal of the American Statistical Association”, Vol. 80, s. 620-630.
- Ryan T. P. (2007), *Modern Experimental Design*, John Wiley & Sons, New Jersey.
- Salsburg D. (2001), *The Lady Tasting Tea. How Statistics Revolutionized Science in the Twentieth Century*, Henry Holt and Co., New York.
- Sucheck B. (2010), *Ekometria przestrzena*, Wydawnictwo C.H. Beck, Warszawa.
- Sucheck J. (2014). *Statystyka przestrzena. Metody analiz struktur przestrzennych*, Wydawnictwo CH Beck, Warszawa.
- Szczepankiewicz E. (1985), *Zastosowania pól losowych*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- Szerszunowicz M. (2011), *Planowanie eksperymentów z uwzględnieniem czynników losowych*, Materiały VI Krakowskiej Konferencji Młodych Uczonych, Grupa Naukowa Pro Futuro, Fundacja dla AGH, Kraków, s. 1057-1065.
- Szerszunowicz M. (2012), *On the Design of Experiments Considering the Division of the Experimental Area*, „Mathematical Economics”, Vol. 8(15), s. 123-134.
- Szerszunowicz M. (2014a), *On the Bootstrap Method of Estimation of Response Surface Function*, „Acta Universitatis Lodzensis. Folia Oeconomica”, nr 3(302), s. 101-108.

- Szerszunowicz M. (2014b), *On the Search for Conditions for Production Process Optimization*, „Mathematical Economics”, Vol. 10(17), s. 91-102.
- Szerszunowicz M. (2014c), *On the Use of the Balanced Half-Samples Method in the Construction of Factorial Designs* [w:] Mathematical Methods in Economics 2014, Palacký University in Olomouc, Olomouc, s. 1009-1014.
- Szerszunowicz M. (2014d), *O pewnym planie eksperymentu czynnikowego wykorzystującym modele pól losowych* [w:] A. S. Barczak, M. Miśkiewicz-Nawrocka (red.), *Badania ekonometryczno-statystyczne w teorii i praktyce*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, Katowice, s. 163-171.
- Szerszunowicz M. (2016), *On Non-Classical Methods of Design of Experiments Using the R Program* [w:] D. Kosiorowski, M. Snarska (red.), *Knowledge – Economy – Society. Selected Challenges for Statistics in Contemporary Management Sciences*, Foundation of the Cracow University of Economics, s. 145-155.
- Ustawa z dnia 20 lutego 2015 r. o odnawialnych źródłach energii, Dz. U. z 2022 r. poz. 1378, <https://isap.sejm.gov.pl/isap.nsf/download.xsp/WDU20220001378/U/D20221378Lj.pdf> (dostęp: 20.01.2023).
- Wach E., Bastian M. (2010), *Produkcja i spalanie pelet. Poradnik*, Bałtycka Agencja Poszanowania Energii S.A., Gdańsk.
- Wawrzynek J. (1993), *Statystyczne planowanie eksperymentów w zagadnieniach regresji w warunkach małej próby*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Wrocław.
- Wawrzynek J. (2009), *Planowanie eksperymentów zorientowane na doskonalenie jakości produktu*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego, Wrocław.
- Wolter K. M. (1985), *Introduction to Variance Estimation*, Springer Verlag, New York.
- Złotoś M. (2019), *On the Use of Permutation Tests in the Analysis of the Factorial Design of Experiments Results*, „Acta Universitatis Lodziensis. Folia Oeconomica”, nr 4(343), s. 123-136.
- Złotoś M. (2020), *On the Use of Permutation Tests in the Significance Testing of Response Surface Function Parameters*, „Argumenta Oeconomica Cracoviensia”, No. 22, s. 21-29.



SPIS RYSUNKÓW

1.1. Schemat procesu produkcyjnego	16
2.1. Plan całkowitego eksperymentu czynnikowego typu 2^3	43
2.2. Plan ułamkowego eksperymentu czynnikowego typu 2^{3-1}	47
2.3. Schemat planu całkowitego eksperymentu czynnikowego typu 3^2	50
3.1. Wartości pól losowych dla podobszarów D_{21} , D_{22} , D_{23} , D_{24}	62
3.2. Graficzna prezentacja punktów, w których należy przeprowadzić doświadczenia dla podobszarów D_{21} , D_{22} , D_{23} , D_{24}	63
3.3. Obszar eksperymentowania całkowitego eksperymentu czynnikowego	68
3.4. Obszary eksperymentowania dla wyznaczonych zbiorów pól prób zrównoważonych	69
3.5. Wartości funkcji powierzchni odpowiedzi postaci (3.25)	78
3.6. Wartości funkcji powierzchni odpowiedzi postaci (3.26)	79
3.7. Wartości statystyk lokalnych Morana dla funkcji powierzchni odpowiedzi postaci (3.25) oraz (3.26)	79
3.8. Punkty obszaru eksperymentowania, dla których wartość statystyki lokalnej Morana nie jest istotna	80
3.9. Schematy planów eksperymentów wyznaczone na podstawie wartości statystyk lokalnych Morana dla modelu (3.25)	80
3.10. Schematy planów eksperymentów wyznaczone na podstawie wartości statystyk lokalnych Morana dla modelu (3.26)	81
3.11. Wartości wariancji funkcji powierzchni odpowiedzi dla modelu (3.25)	81
3.12. Wartości wariancji funkcji powierzchni odpowiedzi dla modelu (3.26)	81
3.13. Schematy planów eksperymentów wyznaczone na podstawie wartości statystyk lokalnych Morana oraz wartości wariancji funkcji powierzchni odpowiedzi	82
3.14. Wartości funkcji powierzchni odpowiedzi postaci (3.28)	83
3.15. Wartości statystyk lokalnych Morana dla funkcji powierzchni odpowiedzi postaci (3.28)	83

3.16. Punkty obszaru eksperymentowania, dla których wartość statystyki lokalnej Morana nie jest istotna	84
3.17. Schematy planów eksperymentów ustalone w sposób losowy dla modelu (3.28)	84
3.18. Schemat planu eksperymentu uwzględniający wartości statystyk lokalnych Morana dla modelu (3.28)	84
3.19. Rozkłady bootstrapowe parametrów funkcji powierzchni odpowiedzi postaci (3.41).....	92
3.20. Funkcja powierzchni odpowiedzi postaci (3.43).....	93
3.21. Funkcja powierzchni odpowiedzi postaci (3.44).....	93
3.22. Funkcja powierzchni odpowiedzi postaci (3.45).....	94
3.23. Obszar ufności wyznaczony dla funkcji powierzchni odpowiedzi (3.43)	94
3.24. Punkty obszaru eksperymentowania, dla których oszacowanie funkcji powierzchni odpowiedzi charakteryzuje się największą precyzją.....	95
3.25. Dane pierwotne, dla $n = 4$ oraz $k = 4$	102
3.26. Schemat jednoczesnej permutacji całego zbioru danych.....	102
3.27. Schemat permutacji danych w ramach replikacji	102
3.28. Rozkłady empiryczne statystyk testowych dla I typu permutacji zbioru danych	106
3.29. Rozkłady empiryczne statystyk testowych dla II typu permutacji zbioru danych	107
4.1. Udział odnawialnych źródeł energii w pozyskaniu energii w Polsce w 2023 roku.....	118
4.2. Produkcja pelletu drzewnego w wybranych krajach Unii Europejskiej w 2023 roku.....	119
4.3. Wyniki pomiarów poszczególnych czynników	125
4.4. Wartości teoretyczne syntetycznej zmiennej wynikowej	131
4.5. Wartości funkcji powierzchni odpowiedzi (4.10) dla czynnika $X_4 = -1$	133
4.6. Wartości funkcji powierzchni odpowiedzi (4.10) dla czynnika $X_4 = 1$	133



SPIS TABEL

2.1. Wyniki eksperymentu jednoczynnikowego.....	32
2.2. Wartości zmiennej wynikowej dla eksperymentu dwuczynnikowego	34
2.3. Tablica analizy wariancji dla planu dwuczynnikowego	34
2.4. Rezultaty planu bloków zrandomizowanych dla $p_1 = 3$ oraz $p_2 = 4$	36
2.5. Standardowy kwadrat łańciski dla $p = 6$	37
2.6. Kwadrat łańciski dla $p = 6$	38
2.7. Tablica analizy wariancji kwadratu łańciskiego.....	39
2.8. Kwadrat grecko-łańciski dla $p = 4$	40
2.9. Całkowity eksperyment czynnikowy typu 2^3	43
2.10. Ułamkowy eksperyment czynnikowy typu 2^{3-1}	47
2.11. Plan całkowitego eksperymentu czynnikowego typu 3^2	49
3.1. Schemat planu eksperymentu z nieprecyzyjnymi poziomami czynników	54
3.2. Wyniki zrealizowanych doświadczeń w badaniu procesu chemicznego.....	56
3.3. Wartości oszacowanych poziomów czynników	57
3.4. Alternatywny plan eksperymentu dla rozważanego procesu chemicznego.....	57
3.5. Analiza wariancji modelu funkcji powierzchni odpowiedzi postaci (3.8)	58
3.6. Oszacowanie i istotność parametrów modelu (3.8).....	58
3.7. Wyznaczone półpróby.....	68
3.8. Wyniki eksperymentu przesiewowego	77
3.9. Dane procesu zarządzania zapasami ustalonych produktów	90
3.10. Wyniki oszacowań parametrów funkcji powierzchni odpowiedzi (3.41) metodą bootstrap	91
3.11. Schemat eksperymentu jednoczynnikowego uwzględniającego n replikacji doświadczeń	100
3.12. Dane eksperymentalne	104
3.13. Wyniki testu jednoczynnikowej analizy wariancji.....	105
3.14. Wartości $A\hat{S}L$ przeprowadzonych testów permutacyjnych.....	105
3.15. p -value testu Tukeya porównań wielokrotnych.....	107

3.16. Wartości $\hat{ASL}_{ij}$ testu permutacyjnego porównań wielokrotnych dla różnych typów permutacji danych.....	108
3.17. Charakterystyka czynników uwzględnianych w eksperymencie.....	111
3.18. Wyniki doświadczeń całkowitego eksperymentu czynnikowego typu 2^4	111
3.19. Wyniki weryfikacji istotności parametrów modelu (3.67).....	113
3.20. Oszacowane wartości ASL permutacyjnych testów istotności parametrów modelu (3.67)	115
4.1. Parametry jakościowe pelletu drzewnego według schematów certyfikacji ENplus oraz DINplus	123
4.2. Schemat realizacji doświadczeń ułamkowego planu eksperymentu czynnikowego typu 2^{4-1}	126
4.3. Wyniki przeprowadzonych doświadczeń	127
4.4. Ocena istotności parametrów funkcji powierzchni odpowiedzi postaci (4.1)	128
4.5. Ocena istotności parametrów funkcji powierzchni odpowiedzi postaci (4.2)	128
4.6. Znormalizowane wartości funkcji (4.7) i (4.8) oraz wartości zmiennej syntetycznej	131
4.7. Wyniki analizy funkcji powierzchni odpowiedzi postaci (4.9)	132

Praca poświęcona jest metodom planowania eksperymentów wykorzystywanych w statystycznej kontroli jakości. Autorka przedstawia zarówno klasyczne metody planowania eksperymentów, jak i ich modyfikacje. Zasadniczym celem pracy jest prezentacja autorskich modyfikacji metod planowania eksperymentów. Modyfikacje znajdują zastosowanie w sytuacji, gdy klasyczne założenia metod analizy wyników nie są spełnione oraz gdy doświadczenia nie są wykonywane w sposób niezależny. Autorka przeprowadza te modyfikacje stosując nieklasyczne metody statystyczne. Drugim celem pracy, równie ważnym, jest zastosowanie powyższych metod do kontroli jakości procesu produkcji pelletu drzewnego w rzeczywistym przedsiębiorstwie.

Z recenzji prof. dr. hab. Stanisława Heilperna

dr Małgorzata Złotoś jest pracownikiem Katedry Statystyki, Ekonometrii i Matematyki na Wydziale Zarządzania Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach. Obszar jej zainteresowań naukowych jest związany z zagadnieniami statystycznej kontroli jakości oraz z wykorzystaniem nieklasycznych metod statystycznych w metodologii planowania eksperymentów. Jest autorką lub współautorką 25 publikacji naukowych. Uczestniczyła w 20 konferencjach i seminariach naukowych krajowych i zagranicznych.

 0000-0002-8680-4848

ISBN 978-83-7875-960-7



Uniwersytet
Ekonomiczny
w Katowicach