

Uniwersytet Śląski

Instytut Matematyki

Relacje spełniane przez odwzorowania stopnia 5

Maciej Maciejewski

Praca doktorska

napisana pod kierunkiem

dra hab. Andrzeja Prószyńskiego

Katowice 2013

*Składam serdeczne podziękowania
Panu dr. hab. Andrzejowi Prószyńskiemu
za pomoc i cenne wskazówki
podczas pisania pracy.*

Spis treści

Wstęp	3
Rozdział 1. Preliminaria	6
1.1. Defekty odwzorowań i m -odwzorowania	6
1.2. Podzielone potęgi	9
1.3. Procedura poszukiwania relacji	10
Rozdział 2. Ideały $I_n(R)$	14
2.1. Relacje pomiędzy elementami $r^2 - r$	15
2.2. Relacje pomiędzy elementami $r^n - r$, gdzie $n = 2^l, l = 1, 2, 3, \dots$	16
2.3. Relacje pomiędzy elementami $r^3 - r$	31
Rozdział 3. 3-równość dla klasy Hom^5	45
3.1. Pełny zestaw 3-równości - pierwsza wersja	45
3.2. Pełny zestaw 3-równości - druga wersja	46
3.3. Modyfikacja drugiej wersji	54
Rozdział 4. 2-równość dla klasy Hom^5	61
Rozdział 5. Podsumowanie	69
Bibliografia	71

Wstęp

Niech R będzie pierścieniem przemiennym z jedynką. Wśród wszystkich odwzorowań pomiędzy R -modułami można wyróżnić takie, które są scharakteryzowane przez pewne warunki typu równości. Na przykład odwzorowania liniowe spełniają następujące dwa warunki:

$$(1) \quad f(rx) = rf(x), r \in R,$$

$$(2) \quad f(x + y) = f(x) + f(y),$$

gdzie x, y są dowolnymi elementami dziedziny f .

Odwzorowania kwadratowe można scharakteryzować przy pomocy następujących warunków:

$$(1) \quad f(rx) = r^2 f(x), r \in R,$$

$$(2) \quad \text{funkcja dwóch zmiennych } \Delta^2 f \text{ określona wzorem}$$

$$(\Delta^2 f)(x, y) = f(x + y) - f(x) - f(y)$$

jest dwuliniowa.

Uogólnieniem obu powyższych typów odwzorowań są tak zwane m -odwzorowania zdefiniowane w [1]. Zostaną one omówione w dalszej części pracy. W [4] udowodniono, że wszystkie odwzorowania pochodzące z wielomianów jednorodnych stopnia m są m -odwzorowaniami, jednak, w przeciwieństwie do przypadków $m = 1$ oraz $m = 2$, na ogół nie na odwrót. Oznacza to, że przy $m > 2$ potrzebne są dodatkowe warunki typu równości. Przez **warunek typu równości** będziemy rozumieli związek $\sum_j r_j f(\sum_k s_{jk} x_k) = 0$, gdzie j, k przebiegają skończone zbiory indeksów,

$r_j, s_{jk} \in R$ oraz x_k są dowolnymi elementami dziedziny odwzorowania f . Przy tym wygodnie jest zakładać, że r_j, s_{jk} są ustalone dla każdej równości. Jeśli natomiast są one traktowane jako dodatkowe zmienne, to tak rozumianą równość nazywamy ścisłą. Dokładniej mówiąc, r_j oraz s_{jk} rozumiemy wówczas jako ustalone funkcje wielomianowe skończonej ilości zmiennych o współczynnikach z $\mathbb{Z}$, do których możemy podstawić dowolne elementy pierścienia (dla przykładu w warunku (1) powyżej występuje wyrażenie r^2 , w którym zmienną niezależną jest r). Kiedy więc mówimy o ścisłych równościach, dotyczą one odwzorowań pomiędzy modułami nad dowolnym pierścieniem przemiennym R .

Klasę A odwzorowań pomiędzy R -modułami nazywamy równościowo definiowalną, jeśli składa się ona ze wszystkich odwzorowań $f : X \rightarrow Y$ ($X, Y \in R - Mod$) spełniających ustalony zestaw warunków typu równości, tzn. takich odwzorowań, dla których

$$\sum_j r_{ij} f\left(\sum_k s_{ijk} x_k\right) = 0, i \in I, x_k \in X$$

przy pewnych ustalonych $r_{ij}, s_{ijk} \in R$. Jeśli R nie jest ustalonym, lecz dowolnym pierścieniem i równości te są ścisłe, to klasę także nazywamy ścisłą.

Klasa Hom_R^m odwzorowań pochodzących od wielomianów jednorodnych stopnia m nad ustalonym pierścieniem R na ogół nie jest równościowo definiowalna. Winę za to ponosi fakt, że z reguły wielomiany i odwzorowania wielomianowe nie są tym samym. Istnieje jednak najmniejsza klasa równościowo definiowalna $ED(Hom_R^m)$ zawierająca Hom_R^m , przy czym wiadomo z [7], że klasy te są równe nad dowolnym ciałem. Inną sprawą jest kwestia, czy ta klasa jest ścisła, czy też nie. Odpowiedź na to pytanie daje [3], Theorem 6.2. Okazuje się, że jest tak dokładnie wtedy, gdy $m \leq 5$. Równości definiujące klasę $ED(Hom_R^m)$ będziemy nazywali pełnym zestawem równości dla klasy Hom_R^m . Jeśli równości te są ścisłe, będziemy mówili

o pełnym zestawie równości dla klasy Hom^m . Jedną z równości, którą spełniają odwzorowania klasy Hom_R^m , jest tak zwany **warunek regularności**. W przypadku $m = 3$ pokazuje się ([7]), że klasa $ED(\text{Hom}_R^3)$ jest identyczna z klasą regularnych 3-odwzorowań. W przypadku $m = 4$ potrzebne są jeszcze trzy dodatkowe ścisłe równości. Dokładny wynik dla $m = 3$ i $m = 4$ przedstawimy w następnym rozdziale. Przypadek $m = 5$, jako ostatni niezbadany, jest przedmiotem niniejszej pracy. Dla $m = 5$ rozwiązanie składa się z dwóch części. Jedna z wersji pierwszej części została opublikowana w pracy [2]. W niniejszej pracy przypadek $m = 5$ zostanie zbadany niezależnie z wykorzystaniem innej metody, niż było to zrobione w [2]. Warunkiem zastosowania tej metody jest znajomość relacji spełnianych przez elementy $r^2 - r$, $r^3 - r$ oraz $r^4 - r$ pierścienia R .

W pierwszym rozdziale podajemy definicje i twierdzenia znane z prac [4], [5], [7].

W rozdziale drugim znajdujemy relacje generujące pomiędzy elementami $r^n - r$, gdzie $n = 2^l$, $l = 1, 2, \dots$ (Twierdzenie 2.6) oraz relacje generujące pomiędzy elementami $r^3 - r$ pierścienia przemiennego (Twierdzenie 2.10).

W rozdziale trzecim znajdujemy relacje tworzące pełny zestaw tzw. 3-równości dla klasy Hom^5 (Twierdzenie 3.3 oraz Twierdzenie 3.4).

W rozdziale czwartym znajdujemy relacje tworzące pełny zestaw tzw. 2-równości dla klasy Hom^5 (Twierdzenie 4.2 oraz Twierdzenie 4.3).

W rozdziale piątym podsumowujemy badania nad relacjami spełnianymi przez odwzorowania stopnia 5, zawarte w Podrozdziale 3.2 oraz Rozdziale 4.

W całej pracy stosujemy podwójną numerację, osobno dla twierdzeń, lematów, wniosków i definicji.

ROZDZIAŁ 1

Preliminaria

Niech R będzie pierścieniem przemiennym z jedyneką. Przypomnijmy definicje znane na przykład z [1], [4] lub [7].

1.1. Defekty odwzorowań i m -odwzorowania

DEFINICJA 1.1.

Jeśli X, Y są R -modułami, to dowolnemu odwzorowaniu $f : X \rightarrow Y$ można przyporządkować jego n -ty defekt $\Delta^n f : X^n \rightarrow Y$, ($n = 0, 1, 2, \dots$), określony wzorem

$$(\Delta^n f)(x_1, \dots, x_n) = \sum_{H \subset [1, n]} (-1)^{n-|H|} f\left(\sum_{i \in H} x_i\right), \quad (1.1)$$

gdzie $[1, n] = \{1, 2, \dots, n\}$.

Defekty odwzorowania f pozwalają wyrazić wartości tego odwzorowania na sumach elementów za pomocą wzoru:

$$f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \sum_{t=0}^n \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_t \leq n} (\Delta^t f)(x_{j_1}, \dots, x_{j_t}) \quad (1.2)$$

Zauważmy, że $\Delta^0 f = f(0)$, $\Delta^1 f = f - f(0)$ oraz $\Delta^n f = \Delta^n(f - f(0))$ dla $n > 0$. Ponieważ interesują nas formy stopnia dodatniego, będziemy dalej zakładać, że $f(0) = 0$ oraz $n > 0$. Przy tych założeniach defekty można określić indukcyjnie w następujący sposób:

$$(1) \Delta^1 f = f,$$

$$(2) (\Delta^{n+1}f)(x_0, \dots, x_n) = (\Delta^n f)(x_0 + x_1, x_2, \dots, x_n) - \\ - (\Delta^n f)(x_0, x_2, \dots, x_n) - (\Delta^n f)(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Ponadto $(\Delta^n f)(x_1, \dots, x_n) = 0$, jeśli $x_i = 0$ dla pewnego i . Oczywiście $\Delta^n f$ jest symetryczne.

DEFINICJA 1.2 (Ferrero, Micali, [1]).

m-odwzorowaniem nazywamy odwzorowanie $f : X \rightarrow Y$ spełniające następujące warunki:

$$(A1) f(rx) = r^m f(x) \text{ dla } r \in R, x \in X,$$

$$(A2) \Delta^m f : X^m \rightarrow Y \text{ jest odwzorowaniem } m\text{-liniowym.}$$

DEFINICJA 1.3.

m-odwzorowanie $f : X \rightarrow Y$ nazywamy regularnym, jeśli jego $(m - 1)$ -szy defekt $() = \Delta^{m-1}f$ spełnia następujący warunek:

$$(A) (rx, sy, -) - r(x, sy, -) - s(rx, y, -) + rs(x, y, -) = 0$$

$$\text{dla } r, s \in R, x, y \in X,$$

gdzie $-$ oznacza pozostałe $k - 1$ zmiennych.

Pewne własności regularnych *m*-odwzorowań podaje następujące

TWIERDZENIE 1.1 ([5], Proposition 2.5).

Dowolne regularne *m*-odwzorowanie f na R -module X spełnia następujące równości:

$$(1) (r_1 x_1, \dots, r_{m-1} x_{m-1}) = \\ = \sum_{i=1}^{m-1} r_1 \dots \widehat{r_i} \dots r_{m-1} (x_1, \dots, x_{i-1}, r_i x_i, x_{i+1}, \dots, x_{m-1}) - \\ - (m-2) r_1 \dots r_{m-1} (x_1, \dots, x_{m-1}),$$

$$(2) \sum_{i=1}^{m-1} (x_1, \dots, x_{i-1}, rx_i, x_{i+1}, \dots, x_{m-1}) - \\ - (r^2 + (m-2)r)(x_1, \dots, x_{m-1}) = 0,$$

$$(3) (rsx, -) = r(sx, -) + s^2(rx, -) - rs^2(x, -),$$

$$(4) (r^2x, -) = (r + r^2)(rx, -) - r^3(x, -),$$

$$(5) (r - r^2)(sx, -) = (s - s^2)(rx, -) + (rs^2 - r^2s)(x, -),$$

gdzie $() = \Delta^{m-1}f$ oraz $\tau_i, r, s \in R, x_i, x \in X$.

Pokazuje się, że wszystkie odwzorowania pochodzące od wielomianów jednorodnych stopnia m są regularnymi m -odwzorowaniami ([5]). Dotyczy to także ich uogólnień, tzn. odwzorowań wielomianowych wyznaczonych przez formy stopnia m w sensie N. Roby [9], tzw. "prawa wielomianowe". Te odwzorowania są określone pomiędzy R -modułami X, Y , w odróżnieniu od zwykłych odwzorowań wielomianowych, które są określone na R^n i tworzą klasę Hom_R^m , o której była mowa we Wstępie. Wiadomo jednak ([7]), że zarówno szersza, jak i węższa klasa spełniają te same równości, dlatego prawami wielomianowymi nie będziemy się w tej pracy zajmowali. W przypadku $m = 3$ pokazuje się, że klasa $ED(Hom_R^3)$ jest identyczna z klasą regularnych 3-odwzorowań, a zatem składa się dokładnie z tych odwzorowań, które spełniają warunki (A1), (A2) i (A). W przypadku $m = 4$ potrzebne są jeszcze trzy dodatkowe ścisłe równości, a mianowicie klasa $ED(Hom_R^4)$ składa się dokładnie z tych odwzorowań, które spełniają warunki (A1), (A2) i (A) oraz

$$(B1) (rx, sy) - r(x, sy) - s(rx, y) + rs(x, y) - (s - s^2)[r] = 0,$$

$$(B2) (rsx, y) - r(x, sy) - s^3(rx, y) + rs^3(x, y) + (s^2 - s^3)[r] = 0,$$

$$(B3) 3(rx, y) - 3r(x, y) + (1 - r)(rx, x, y) + [r] = 0,$$

gdzie $[r] = (rx, x, y) + (x, ry, r) - r^2((x, x, y) + (x, y, y)) - 3(r - r^2)(x, y)$.

W tym przypadku po raz pierwszy pojawiają się elementy $[r]$ o skomplikowanej

postaci, ale o bardzo dobrych własnościach, analogicznych do własności elementów $r^2 - r$ pierścienia R . Podaje je następujące

TWIERDZENIE 1.2 ([7], Wniosek 5.1.4).

Dla dowolnych $r, s \in R$ mamy

$$(1) \quad [r + s] = [r] + [s] + rs[2],$$

$$(2) \quad [rs] = r[s] + s^2[r],$$

$$(3) \quad (r^2 - r)[s] = (s^2 - s)[r],$$

$$(4) \quad 2[r] = (r^2 - r)[2], \quad [2r] = (2r^2 - r)[2],$$

$$(5) \quad [r] = [1 - r], \quad [0] = [1] = 0, \quad [2] = [-1].$$

1.2. Podzielone potęgi

Niech R będzie pierścieniem przemiennym z 1. Jeśli X jest R -modułem, to algebrą z podzielonymi potęgami na module X (zobacz [9]) nazywamy R -algebrę przemienną generowaną przez elementy $x^{(m)}$, $x \in X$, $m = 0, 1, 2, \dots$ z relacjami

$$(1) \quad x^{(0)} = 1,$$

$$(2) \quad (rx)^{(m)} = r^m x^{(m)},$$

$$(3) \quad x^{(m)} y^{(n)} = (m, n) x^{(m+n)},$$

$$(4) \quad (x + y)^{(m)} = \sum_{i+j=m} x^{(i)} y^{(j)}$$

dla $x, y \in X$, $r \in R$, gdzie $(m, n) = \binom{m+n}{n} = \binom{m+n}{m}$.

Algebrę tę oznaczamy $\Gamma_R(X)$ lub po prostu $\Gamma(X)$.

Przyjmując $\deg x^{(m)} = m$ otrzymujemy naturalną gradację $\Gamma(X)$. Składową stopnia m oznaczamy $\Gamma^m(X)$ i nazywamy m -tą podzieloną potęgą modułu X . Jest ona generowana jako R -moduł przez elementy $x_1^{(i_1)} \dots x_n^{(i_n)}$ dla $x_1, \dots, x_n \in X$, $i_1 + \dots + i_n = m$, z relacjami pochodzącymi z wypisanych powyżej. W szczególności $\Gamma^0(X) = R$, $\Gamma^1(X) = X$ oraz $\Gamma^m(R) = R \cdot 1^{(m)} \approx R$.

Zarówno Γ , jak i Γ^m są funktorami. Jeśli $f : X \rightarrow Y$ jest homomorfizmem R -modułów, to $\Gamma(f) : \Gamma(X) \rightarrow \Gamma(Y)$, $\Gamma(f)(x^{(m)}) = f(x)^{(m)}$ jest homomorfizmem algebr, a dla każdego $m = 0, 1, 2, \dots$ mamy homomorfizm R -modułów

$\Gamma^m(f) : \Gamma^m(X) \rightarrow \Gamma^m(Y)$ określony na generatorach wzorem

$$\Gamma^m(f)(x_1^{(i_1)} x_2^{(i_2)} \dots x_n^{(i_n)}) = f(x_1)^{(i_1)} f(x_2)^{(i_2)} \dots f(x_n)^{(i_n)}.$$

Formy stopnia m na X w sensie N. Roby ([9]) są reprezentowane przez $\Gamma^m(X)$. Oznacza to, że moduł form stopnia m z X do Y jest izomorficzny z $\text{Hom}_R(\Gamma^m(X), Y)$, a w szczególności moduł form stopnia m z pierścienia $R[X_1, \dots, X_n]$ do R jest izomorficzny z $\text{Hom}_R(\Gamma^m(R^n), R)$. Warto zauważyć, że przyporządkowanie $X \rightarrow \Gamma^m(X)$, $x \mapsto x^{(m)}$ jest regularnym m -odwzorowaniem, którego k -ty defekt $()$ jest określony wzorem $(x_1, \dots, x_k) = \sum_{(i)} x_1^{(i_1)} \dots x_k^{(i_k)}$, gdzie (i) oznacza ciąg takich liczb całkowitych dodatnich $i_1, \dots, i_k$, że $i_1 + \dots + i_k = m$. Na tych faktach opiera się wykorzystanie funktora Γ^m do znajdowania równości spełnianych przez odwzorowania stopnia m .

1.3. Procedura poszukiwania relacji

m -odwzorowania (odpowiednio regularne m -odwzorowania) tworzą klasę równościowo definiowalną Appl^m (odpowiednio $\overline{\text{Appl}}^m$), która jest oczywiście ścisła. Klasę m -odwzorowań (odpowiednio regularnych m -odwzorowań) nad R będziemy oznaczali przez Appl_R^m (odpowiednio $\overline{\text{Appl}}_R^m$). Niech $\Delta^m(X) = \Delta_R^m(X)$ (odpowiednio $\overline{\Delta}^m(X) = \overline{\Delta}_R^m(X)$) będzie R -modułem generowanym przez elementy $\delta^m(x), x \in X$ (odpowiednio $\overline{\delta}^m(x), x \in X$) z relacjami oznaczającymi, że $\delta^m : X \rightarrow \Delta^m(X)$ (odpowiednio $\overline{\delta}^m : X \rightarrow \overline{\Delta}^m(X)$) jest m -odwzorowaniem (odpowiednio regularnym m -odwzorowaniem). W przypadku $\overline{\delta}^m$ chodzi o relacje

$$(A1) \quad \overline{\delta}^m(rx) = r^m \overline{\delta}^m(x) \text{ dla } r \in R, x \in X,$$

$$(A2) \quad \Delta^m \overline{\delta}^m : X^m \rightarrow \overline{\Delta}^m(X) \text{ jest odwzorowaniem } m\text{-liniowym,}$$

$$(A) \quad (rx, sy, -) - r(x, sy, -) - s(rx, y, -) + rs(x, y, -) = 0,$$

gdzie $() = \Delta^{m-1}\bar{\delta}^m$.

Z definicji tej wynika, że regularne m -odwzorowanie f na X przedstawia się jednoznacznie w postaci $f = \tilde{f} \circ \bar{\delta}^m$, gdzie $\tilde{f}$ jest R -homomorfizmem. Oznacza to, że diagram

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\bar{\delta}^m} & \bar{\Delta}^m(X) \\ & \searrow f & \downarrow \tilde{f} \\ & & Y \end{array}$$

jest przemienny, a więc $\tilde{f}$ jest określony na generatorach wzorem $\tilde{f}(\bar{\delta}^m(x)) = f(x)$.

Z własności uniwersalności otrzymujemy, że $\bar{\Delta}_R^m$ jest funktorem, przy czym jeśli $f : X \rightarrow Y$ jest homomorfizmem modułów, to $\bar{\Delta}^m(f) : \bar{\Delta}^m(X) \rightarrow \bar{\Delta}^m(Y)$, $\bar{\Delta}^m(f)(\bar{\delta}^m(x)) = \bar{\delta}^m(f(x))$.

Stosując własność uniwersalności do regularnego m -odwzorowania $X \rightarrow \Gamma^m(X)$, $x \mapsto x^{(m)}$, opisanego na końcu paragrafu 1.2, otrzymujemy

TWIERDZENIE 1.3 ([5], Corollary 2.2).

Określony jest następujący homomorfizm:

$$\bar{h}^m = \bar{h}^m(X) : \bar{\Delta}^m(X) \rightarrow \Gamma^m(X), \quad \bar{h}^m(\bar{\delta}^m(x)) = x^{(m)}.$$

Ponadto $\bar{h}^m((\Delta^k \bar{\delta}^m)(x_1, \dots, x_k)) = \sum_{(i)} x_1^{(i_1)} \dots x_k^{(i_k)}$, gdzie (i) oznacza ciąg takich liczb całkowitych dodatnich $i_1, \dots, i_k$, że $i_1 + \dots + i_k = m$.

Z podanych wzorów, że $\bar{h}^m$ wyznacza przekształcenie funktorów, tzn. jeśli $f : X \rightarrow Y$ jest homomorfizmem modułów, to przemienny jest diagram

$$\begin{array}{ccc} \bar{\Delta}^m(X) & \xrightarrow{\bar{h}^m} & \Gamma^m(X) \\ \downarrow \bar{\Delta}^m & & \downarrow \Gamma^m \\ \bar{\Delta}^m(Y) & \xrightarrow{\bar{h}^m} & \Gamma^m(Y) \end{array}$$

Niech $\{x_1, \dots, x_k\}$ będzie bazą standardową modułu R^k , $k = 1, 2, \dots$. Określamy

$$\Gamma^{m,k} = \Gamma^{m,k}(R) = R\{x_1^{(i_1)} \dots x_k^{(i_k)}; \sum i_j = m, i_j \geq 1\} \subset \Gamma^m(R^k),$$

$$\overline{\Delta}^{m,k} = \overline{\Delta}^{m,k}(R) = R\{(r_1 x_1, \dots, r_k x_k); r_1, \dots, r_k \in R\} \subset \overline{\Delta}^m(R^k),$$

gdzie $() = \Delta^k \delta^m$ oraz (i) oznacza ciąg takich liczb całkowitych dodatnich $i_1, \dots, i_k$,

że $i_1 + \dots + i_k = m$. Ponadto określamy

$$\overline{h}^{m,k} = \overline{h}^m|_{\overline{\Delta}^{m,k}(R)} : \overline{\Delta}^{m,k}(R) \longrightarrow \Gamma^{m,k}(R),$$

$$\overline{h}^{m,k}(r_1 x_1, \dots, r_k x_k) = \sum_{(i)} (r_1 x_1)^{(i_1)} \dots (r_k x_k)^{(i_k)} = \sum_{(i)} r_1^{i_1} \dots r_k^{i_k} x_1^{(i_1)} \dots x_k^{(i_k)}.$$

W dalszej części pracy będziemy często pisali $((i_1, \dots, i_k))$ zamiast $x_1^{(i_1)} \dots x_k^{(i_k)}$.

Pokazuje się, że $\Gamma^{m,k}(R)$ jest modułem wolnym o bazie $((i_1, \dots, i_k)) = x_1^{(i_1)} \dots x_k^{(i_k)}$,

$i_j \geq 1, i_1 + \dots + i_k = m$.

Ponieważ Δ^m jest funktorem, możemy podstawić dowolne elementy za elementy bazy $x_1, \dots, x_k$, otrzymując R -homomorfizm na $\overline{\Delta}^m(R^k)$. W szczególności dowolna permutacja elementów $x_1, \dots, x_k$ daje nam automorfizm modułu $\overline{\Delta}^m(R^k)$, a po ograniczeniu automorfizm $\overline{\Delta}^{m,k}(R)$. Innym przykładem jest np. podstawienie x_1 za x_k , które daje homomorfizm na $\overline{\Delta}^{m,k}(R) \longrightarrow \overline{\Delta}^{m,k-1}(R)$, $(r_1 x_1, \dots, r_k x_k) \mapsto (r_1 x_1, \dots, r_k x_1)$.

Rzeczywiście, obrazem elementu $(r_1 x_1, \dots, r_k x_k)$ jest element

$$((r_1 + r_k)x_1, r_2 x_2, \dots, r_{k-1} x_{k-1}) - (r_1 x_1, r_2 x_2, \dots, r_{k-1} x_{k-1}) - (r_k x_1, r_2 x_2, \dots, r_{k-1} x_{k-1}),$$

który należy do $\overline{\Delta}^{m,k-1}(R)$.

Pokazuje się ([3]), że równości dla klasy Hom_R^m składają się z tzw. k -równości (dla $k \geq 1$), które możemy wyrazić przy pomocy wartości defektu $\Delta^k f$. Otrzymujemy je znajdując generatory jądra $Ker(\overline{h}^{m,k})$. W celu otrzymania równości z generatorów wystarczy ([3]) następująco zmienić znaczenie symboli $(r_1 x_1, \dots, r_k x_k)$: $()$ oznacza $\Delta^k f$ zamiast $\Delta^k \delta^m$ oraz $x_1, \dots, x_k$ są dowolnymi elementami z dziedziny f . Mówimy wtedy, że są to k -równości dla klasy Hom_R^m . Jeśli są one ścisłe, to mówimy, że są to k -równości dla klasy Hom^m .

Jak wynika z [3], homomorfizm $\bar{h}^{m,k}$ jest izomorfizmem dla $k = 1$ i $k \geq m - 1$. To znaczy, że (A1), (A2) i (A) tworzą ścisły system k -równości klasy Hom_R^m dla tych k . System k -równości klasy Hom_R^m jest więc ścisły dla $k = 1$ oraz $k \geq m - 1$. Poza tym przypadkiem system ten jest ścisły jedynie dla $(m, k) = (4, 2), (5, 3)$ i $(5, 2)$ (patrz [3], Theorem 6.2). System taki został znaleziony dla $(4, 2)$ w pracy [6] oraz $(5, 3)$ w pracy [2]. Wypracowane w przypadku $(4, 2)$ i $(5, 3)$ metody nie nadają się do zastosowania w ostatnim niezbadanym przypadku $(5, 2)$. W związku z tym w niniejszej pracy za pomocą innej metody znajdziemy takie systemy zarówno dla $(5, 2)$, jak i $(5, 3)$. Osiągniemy to poprzez zbadanie $Ker(\bar{h}^{5,3})$ oraz $Ker(\bar{h}^{5,2})$. Generatory jądra $Ker(\bar{h}^{5,3})$ zostały znalezione w rozdziale trzecim, natomiast generatory jądra $Ker(\bar{h}^{5,2})$ zostały znalezione w rozdziale czwartym.

ROZDZIAŁ 2

Ideały $I_n(R)$

Mówimy, że ideał I pierścienia przemiennego z jedynką R ma indeks $n < \infty$, o ile $|R/I| = n$. A zatem w pierścieniu R wyróżniamy klasę ideałów skończonego indeksu $id(R) = \{I \subset R; |R/I| < \infty\}$. Niech $max(R)$ oznacza zbiór ideałów maksymalnych skończonego indeksu.

Podstawową rolę w dalszych rozważaniach będą odgrywały zdefiniowane w [4] ideały

$$I_n(R) = (r^n - r; r \in R) = (r^n s - r s^n; r, s \in R).$$

Równość obu postaci wynika z tego, że $r^n s - r s^n = s(r^n - r) - r(s^n - s)$. Przypomnijmy podstawowe własności tych ideałów udowodnione w [4]. Ideał $I_n(R)$ jest zachowany przy przejściu do pierścienia ułamków i pierścienia ilorazowego. Inaczej mówiąc, mamy następujący

LEMAT 2.1 ([4], Lemma 5.1).

$$I_n(R_S) = I_n(R)_S, \quad I_n(R/J) = (I_n(R) + J)/J.$$

Poza tym mamy następującą charakteryzację:

TWIERDZENIE 2.1 ([4], Proposition 5.5).

$$I_n(R) = \bigcap \{M \in max(R); |R/M| - 1 \mid n - 1\}.$$

W dalszej części pracy szczególne znaczenie będą miały ideały $I(R) = I_2(R)$, $I_3(R)$, $I_4(R)$. Z powyższego twierdzenia mamy

WNIOSEK 2.1.

Zachodzą następujące równości:

$$I_2(R) = \bigcap \{M \in \max(R); |R/M| = 2\},$$

$$I_3(R) = \bigcap \{M \in \max(R); |R/M| = 2 \text{ lub } 3\},$$

$$I_4(R) = \bigcap \{M \in \max(R); |R/M| = 2 \text{ lub } 4\}.$$

WNIOSEK 2.2.

Jeżeli R jest pierścieniem lokalnym o ideale maksymalnym M , to zachodzi jeden z dwóch warunków:

$$(1) \ I_n(R) = M, \text{ gdy } |R/M| - 1 \mid n - 1$$

lub

$$(2) \ I_n(R) = R, \text{ gdy } |R/M| - 1 \nmid n - 1.$$

W szczególności

$$(a) \ I_2(R) = M \Leftrightarrow |R/M| = 2,$$

$$(b) \ I_2(R) = M \Leftrightarrow |R/M| = 2 \text{ lub } 3,$$

$$(c) \ I_2(R) = M \Leftrightarrow |R/M| = 2 \text{ lub } 4.$$

2.1. Relacje pomiędzy elementami $r^2 - r$

Głównym wynikiem pracy [8] jest następujące

TWIERDZENIE 2.2.

Niech $C(R)$ będzie R -modułem generowanym przez elementy $[r], r \in R$, z relacjami

$$(1) \ [r + s] = [r] + [s] + rs[2], \ r, s \in R,$$

$$(2) \ [rs] = r^2[s] + s[r], \ r, s \in R.$$

Wtedy istnieje R -izomorfizm $P : C(R) \longrightarrow I(R)$, taki że

$$P([r]) = r^2 - r \text{ dla } r \in R.$$

Inaczej mówiąc, ideał $I(R) = I_2(R)$ jest generowany przez elementy $[r] = r^2 - r$ z relacjami (1) i (2). W dalszych rozważaniach będziemy potrzebować analogicznych twierdzeń dla elementów $r^3 - r$ oraz $r^4 - r$. W tym celu uogólnimy powyższe twierdzenie dla wykładników będących potęgami dwójki, a następnie udowodnimy analogiczne twierdzenie dla elementów $r^3 - r$.

2.2. Relacje pomiędzy elementami $r^n - r$,

gdzie $n = 2^l, l = 1, 2, 3, \dots$

Niech n będzie ustaloną liczbą postaci $n = 2^l, l = 1, 2, \dots$. Udowodnimy, że relacje generujące pomiędzy elementami $[r] = r^n - r$ pierścienia przemennego R są następujące:

$$(1) [r + s] = [r] + [s] + p(r, s)[-1], \quad r, s \in R,$$

$$\text{gdzie } p(r, s) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2} \binom{n}{k} r^{n-k} s^k,$$

$$(2) [rs] = r^n[s] + s[r], \quad r, s \in R.$$

Należy zwrócić uwagę, że liczby $\frac{1}{2} \binom{n}{k}$ w powyższej sumie są całkowite, gdyż $n = 2^l$ oraz $0 < k < n$.

Niech $i_1, i_2, \dots, i_k$ oznaczają nieujemne liczby całkowite i niech $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ oznacza uogólniony symbol Newtona,

$$(i_1, i_2, \dots, i_k) = \frac{(i_1 + i_2 + \dots + i_k)!}{i_1! i_2! \dots, i_k!}.$$

Wprost z definicji wynika następujący

WNIOSEK 2.3.

Dla dowolnych $i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1} \in \mathbb{N}$ mamy:

- (1) $(i_1, i_2, \dots, i_k, 0) = (i_1, i_2, \dots, i_k)$,
- (2) $(i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}) = (i_1 + i_2 + \dots + i_k, i_{k+1})(i_1, i_2, \dots, i_k)$,
- (3) $(i_1, i_2, \dots, i_k) = \binom{i_1+i_2+\dots+i_k}{i_k} \binom{i_1+i_2+\dots+i_{k-1}}{i_{k-1}} \dots \binom{i_1+i_2}{i_2}$,
- (4) jeśli $i_1 + i_2 + \dots + i_k = 2^l$, oraz co najmniej dwa z indeksów i_j są niezerowe,
to $\frac{1}{2}(i_1, i_2, \dots, i_k) \in \mathbb{Z}$.

Niech teraz $p(r_1, r_2, \dots, r_k) = \sum_I \frac{1}{2}(i_1, i_2, \dots, i_k) r_1^{i_1} r_2^{i_2} \dots r_k^{i_k}$, gdzie $\sum_I$ oznacza sumę po zbiorze I tych układów indeksów nieujemnych liczb całkowitych

$i_1, i_2, \dots, i_k$, że $i_1 + i_2 + \dots + i_k = n$ oraz co najmniej dwa z indeksów i_j są niezerowe.

W szczególności przy $k = 2$ otrzymujemy poprzednią wartość $p(r, s) =$

$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2} \binom{n}{k} r^{n-k} s^k$. W dalszej części wykorzystamy uogólniony wzór Newtona

$$(r_1 + r_2 + \dots + r_k)^m = \sum_{i_1 + \dots + i_k = m} (i_1, i_2, \dots, i_k) r_1^{i_1} r_2^{i_2} \dots r_k^{i_k}, \quad (2.1)$$

gdzie jak poprzednio zakładamy, że $i_1, i_2, \dots, i_k$ oznaczają nieujemne liczby całkowite. Z Wniosku 2.3 oraz wzoru (2.1) otrzymujemy następujący

LEMAT 2.2.

Dla dowolnych $r_1, r_2, \dots, r_k, r_{k+1} \in R$ mamy

$$p(r_1, r_2, \dots, r_k, r_{k+1}) = p(r_1 + r_2 + \dots + r_k, r_{k+1}) + p(r_1, r_2, \dots, r_k).$$

DOWÓD.

Z definicji mamy

$$p(r_1 + r_2 + \dots + r_k, r_{k+1}) = \sum_{\substack{j_1+j_2=n \\ j_1, j_2 > 0}} \frac{1}{2}(j_1, j_2)(r_1 + r_2 + \dots + r_k)^{j_1} r_{k+1}^{j_2}.$$

Na mocy wzoru (2.1) wyrażenie to jest równe

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{j_1+j_2=n \\ j_1, j_2 > 0}} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_k=j_1} \frac{1}{2}(j_1, j_2)(i_1, \dots, i_k)(r_1^{i_1} r_2^{i_2} \dots r_k^{i_k}) r_{k+1}^{j_2} = \\
& = \sum_{\substack{i_1+\dots+i_{k+1}=n \\ i_1+\dots+i_k > 0, i_{k+1} > 0}} \frac{1}{2}(i_1 + \dots + i_k, i_{k+1})(i_1, \dots, i_k) r_1^{i_1} r_2^{i_2} \dots r_k^{i_k} r_{k+1}^{i_{k+1}} = \\
& = \sum_{\substack{i_1+\dots+i_{k+1}=n \\ i_1+\dots+i_k > 0, i_{k+1} > 0}} \frac{1}{2}(i_1, \dots, i_k, i_{k+1}) r_1^{i_1} r_2^{i_2} \dots r_{k+1}^{i_{k+1}}.
\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy więc sumę po wszystkich takich układach indeksów $i_1, \dots, i_{k+1}$, wśród których przynajmniej dwa są większe od zera, przy czym jednym z nich jest i_{k+1} .

Wobec tego ostatnie wyrażenie, dzięki Wnioskowi 2.3 (1), jest to różnicą

$$p(r_1, r_2, \dots, r_k, r_{k+1}) - p(r_1, r_2, \dots, r_k), \text{ co dowodzi tezy.}$$

2.2.1. C -funkcje.

DEFINICJA 2.1.

C -funkcją nad R będziemy nazywać taką funkcję $f : R \rightarrow M$, gdzie M jest R -modulem, która spełnia następujące warunki:

$$(1) \quad f(r+s) = f(r) + f(s) + p(r, s)f(-1), \quad r, s \in R,$$

$$(2) \quad f(rs) = r^n f(s) + s f(r), \quad r, s \in R,$$

$$\text{gdzie } p(r, s) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2} \binom{n}{k} r^{n-k} s^k.$$

LEMAT 2.3.

Jeśli f jest C -funkcją, to dla dowolnych $r, s \in R$ mamy

$$(3) \quad (r^n - r)f(s) = (s^n - s)f(r),$$

$$(4) \quad 2f(r) = (r^n - r)f(-1),$$

$$(5) \quad f(0) = f(1) = 0,$$

$$(6) \quad \text{jeżeli } s \text{ jest elementem odwacalnym, to } f(s^{-1}) = -s^{-n-1}f(s).$$

DOWÓD.

Relację (3) otrzymujemy odejmując stronami dwie symetryczne wersje (2).

Relację (4) otrzymujemy z (3), przyjmując $s = -1$ i korzystając z tego, że n jest parzyste. Równości $f(0) = f(1) = 0$ otrzymujemy kładąc w (2) $r = s = 0$ lub 1 .

Niech s będzie odwracalne. Ponieważ dzięki (2) mamy $0 = f(1) = f(s \cdot s^{-1}) = s^n f(s^{-1}) + s^{-1} f(s)$, więc $s^n f(s^{-1}) = -s^{-1} f(s)$. Po pomnożeniu przez s^{-n} otrzymujemy $f(s^{-1}) = -s^{-n-1} f(s)$. $\square$

Uogólnieniem (1) jest następujący

LEMAT 2.4.

Dla dowolnych $r_1, r_2, \dots, r_k \in R$, $k \geq 2$ zachodzi następujący wzór:

$$f\left(\sum_{i=1}^k r_i\right) = \sum_{i=1}^k f(r_i) + p(r_1, r_2, \dots, r_k) f(-1).$$

DOWÓD.

Stosujemy indukcję względem k .

Na mocy warunku (1) wzór zachodzi dla $k = 2$.

Jeśli wzór zachodzi dla pewnego $k \geq 2$, to

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{k+1} r_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^k r_i + r_{k+1}\right) = f\left(\sum_{i=1}^k r_i\right) + f(r_{k+1}) + p\left(\sum_{i=1}^k r_i, r_{k+1}\right) = \\ &= \sum_{i=1}^k f(r_i) + p(r_1, r_2, \dots, r_k) f(-1) + f(r_{k+1}) + p(r_1, \dots, r_k, r_{k+1}) f(-1) = \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} f(r_i) + p(r_1, r_2, \dots, r_{k+1}) f(-1) \end{aligned}$$

dzięki Lematowi 2.2. $\square$

PRZYKŁAD 2.1.

Określamy $f : R \rightarrow R$ wzorem $f(r) = r^n - r$. Wówczas f jest C -funkcją.

Pokażemy, że elementy $r^n - r$ spełniają relacje (1)-(2).

(1) Ponieważ $(-1)^n - (-1) = 2$, więc ze wzoru dwumianowego Newtona mamy:

$$\begin{aligned} (r+s)^n - (r+s) - (r^n - r) - (s^n - s) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^{n-k} s^k - r^n - s^n = \\ &= 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2} \binom{n}{k} r^{n-k} s^k = 2p(r, s) = p(r, s)f(-1), \end{aligned}$$

$$(2) (rs)^n - rs - r^n(s^n - s) - s(r^n - r) = 0.$$

2.2.2. Funktor C .

DEFINICJA 2.2.

Niech $C(R) = C^{(n)}(R)$ będzie R -modułem generowanym przez elementy

$[r]$, $r \in R$, z relacjami:

$$(1) [r+s] = [r] + [s] + p(r, s)[-1], \quad r, s \in R,$$

$$(2) [rs] = r^n[s] + s[r], \quad r, s \in R.$$

Dokładniej, $C(R) = F(R)/K(R)$, gdzie $F(R)$ jest R -modułem wolnym o bazie $\{\bar{r}; r \in R\}$, a $K(R)$ jest podmodułem generowanym przez elementy

$$(1) \overline{r+s} - \bar{r} - \bar{s} - p(r, s)\bar{-1}, \quad r, s \in R,$$

$$(2) \overline{rs} - r^n\bar{s} - s\bar{r}, \quad r, s \in R$$

i przyjmujemy $[r] = \bar{r} + K(R)$. Odwzorowanie $c : R \rightarrow C(R)$ określone wzorem $c(r) = [r]$ jest oczywiście C -funkcją, którą będziemy nazywać kanoniczną C -funkcją. Zauważmy, że $C(R)$ jest obiektem uniwersalnym ze względu na C -funkcje, co oznacza, że dowolna C -funkcja może być jednoznacznie przedstawiona jako złożenie kanonicznej C -funkcji $c : R \rightarrow C(R)$, $c(r) = [r]$, oraz R -homomorfizmu określonego na $C(R)$. Dokładniej, mamy następujące

TWIERDZENIE 2.3.

Niech $f : R \rightarrow M$, gdzie M jest R -modułem, będzie C -funkcją. Wówczas istnieje dokładnie jeden homomorfizm R -modułów $\bar{f} : C(R) \rightarrow M$, taki że diagram

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{c} & C(R) \\ & \searrow f & \downarrow \bar{f} \\ & & M \end{array}$$

jest przemienny. Jest on określony na generatorach wzorem $\bar{f}([r]) = f(r)$.

DOWÓD.

Z przmienności wynika wzór, a więc także jedyność. Wykażemy istnienie $\bar{f}$.

Uzupełnimy diagram

$$\begin{array}{ccccc} R & \xrightarrow{i} & F(R) & \xrightarrow{\nu} & C(R) \\ & \searrow f & \downarrow g & \swarrow \bar{f} & \\ & & M & & \end{array}$$

w którym $i : R \rightarrow F(R)$ jest określone wzorem $i(r) = \bar{r}$, natomiast $\nu : F(R) \rightarrow C(R)$ jest homomorfizmem naturalnym. Oczywiście f przedłuża się do homomorfizmu g na $F(R)$, określonego na elementach bazy wzorem $g(\bar{r}) = f(r)$, a na dowolnym elemencie wzorem $g(\sum a_i \bar{r}_i) = \sum a_i f(r_i)$. Ponieważ f jest C -funkcją, więc wszystkie generatory modułu $K(R)$ przechodzą poprzez g w zero. Istnieje więc homomorfizm indukowany $\bar{f} : C(R) \rightarrow M$ określony na generatorach wzorem $\bar{f}([r]) = g(\bar{r}) = f(r)$, czyli taki, że rozważany diagram jest przemienny. $\square$

Niech $i : R \rightarrow R'$ będzie homomorfizmem pierścieni przemiennych z jedynką.

Rozważmy diagram

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{c} & C(R) \\ \downarrow i & \searrow & \downarrow C(i) \\ R' & \xrightarrow{c'} & C(R') \end{array}$$

Ponieważ $C(R')$ jest R' -modułem, więc jest również R -modułem przez cofnięcie względem i , z działaniem mnożenia określonym wzorem $rm = i(r)m$. Zauważmy, że złożenie $c' \circ i$ jest C -funkcją nad R . Istotnie,

$$\begin{aligned} (c' \circ i)(r + s) &= c'(i(r + s)) = c'(i(r) + i(s)) = \\ &= c'(i(r)) + c'(i(s)) + p(i(r), i(s))c'(-1) = \\ &= (c' \circ i)(r) + (c' \circ i)(s) + p(i(r), i(s))c'(-1), \\ (c' \circ i)(rs) &= c'(i(rs)) = c'(i(r)i(s)) = i(r)^n c'(i(s)) + i(s)c'(i(r)) = \\ &= r^n (c' \circ i)(s) + s(c' \circ i)(r). \end{aligned}$$

Zatem homomorfizm pierścieni z jedyneką $i : R \rightarrow R'$ indukuje homomorfizm R -modułów $C(i) : C(R) \rightarrow C(R')$ określony na generatorach wzorem $C(i)([r]) = [i(r)]$. Jest to homomorfizm modułów nad i , co oznacza, że $C(i)(x + y) = C(i)(x) + C(i)(y)$ oraz $C(i)(rx) = i(r)C(i)(x)$.

Określamy kategorię par w następujący sposób: obiektami są pary (R, M) , gdzie R jest pierścieniem przemiennym z jedyneką, a M jest R -modułem, natomiast odwzorowaniami są pary (i, j) , gdzie $i : R \rightarrow R'$ jest homomorfizmem pierścieni z jedyneką, natomiast $j : M \rightarrow M'$ jest homomorfizmem modułów nad i . Ponieważ oczywiście $C(ji) = C(j)C(i)$ oraz $C(id_R) = id_{C(R)}$, więc C jest funktorem z kategorii pierścieni przemiennych z jedyneką do kategorii par, przyporządkowującym pierścieniowi R parę $(R, C(R))$, a homomorfizmowi $i : R \rightarrow R'$ parę $(i, C(i))$.

2.2.3. Przemienność C z lokalizacjami. Pokażemy, że funktor C komutuje z lokalizacjami. Niech S będzie zbiorem multiplikatywnym w R i niech $i : R \rightarrow R_S$ oraz $i : M \rightarrow M_S$ będą homomorfizmami kanonicznymi, określonymi wzorami $i(r) = \frac{r}{1}$, $i(m) = \frac{m}{1}$.

TWIERDZENIE 2.4.

Dla dowolnej C -funkcji $f : R \rightarrow M$ istnieje jedyna C -funkcja $f_S : R_S \rightarrow M_S$ spełniająca warunek $f_S(i(r)) = i(f(r))$ dla $r \in R$, tzn. uzupełniającą diagram

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{i} & R_S \\ \downarrow f & & \downarrow f_S \\ M & \xrightarrow{i} & M_S \end{array}$$

do diagramu przemiennego. Jest ona dana wzorem

$$f_S\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{f(r)}{s} - \left(\frac{r}{s}\right)^n \frac{f(s)}{s} \quad (2.2)$$

lub równoważnie

$$f_S\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{sf(r) - rf(s)}{s^{n+1}}. \quad (2.3)$$

Zachodzi również następująca równość:

$$(\Delta^2 f_S)\left(\frac{r}{t}, \frac{s}{t}\right) = \frac{(\Delta^2 f)(r, s)}{t^n}. \quad (2.4)$$

Dowód.

Zauważmy najpierw, że prawe strony wzorów (2.2) i (2.3) są identyczne dla dowolnej C -funkcji f . Ich równość wynika stąd, że

$$\frac{f(r)}{s} - \left(\frac{r}{s}\right)^n \frac{f(s)}{s} = \frac{(s^n - s)f(r) - (r^n - r)f(s) + sf(r) - rf(s)}{s^{n+1}} = \frac{sf(r) - rf(s)}{s^{n+1}}$$

dzięki Lematowi 2.3 (3).

Żałóży, że istnieje uzupełnienie powyższego diagramu. Warunek przemienności oznacza, że $f_S\left(\frac{r}{1}\right) = \frac{f(r)}{1}$ dla $r \in R$. Niech $s \in S$. Jeżeli f_S jest C -funkcją, to

$$\begin{aligned} \frac{f(r)}{1} &= f_S\left(\frac{r}{1}\right) = f_S\left(\frac{r}{s} \frac{s}{1}\right) = \left(\frac{r}{s}\right)^n f_S\left(\frac{s}{1}\right) + \frac{s}{1} f_S\left(\frac{r}{s}\right) = \\ &= \left(\frac{r}{s}\right)^n \frac{f(s)}{1} + \frac{s}{1} f_S\left(\frac{r}{s}\right), \end{aligned}$$

skąd wynika wzór (2.2). To dowodzi jedności f_S .

Określamy teraz f_S wzorem (2.2). Żeby udowodnić, że f_S jest poprawnie określona,

zauważmy najpierw, że dzięki (2) mamy

$$\frac{f(rt)}{st} - \left(\frac{r}{s}\right)^n \frac{f(st)}{st} = \frac{r^n f(t) + t f(r)}{st} - \left(\frac{r}{s}\right)^n \frac{s^n f(t) + t f(s)}{st} = \frac{f(r)}{s} - \left(\frac{r}{s}\right)^n \frac{f(s)}{s}.$$

Oznacza to, że po prawej stronie wzoru (2.2) otrzymujemy to samo, jeżeli zastąpimy r przez rt i s przez st dla dowolnego $t \in S$.

Niech teraz $\frac{r}{s} = \frac{r'}{s'}$. Wówczas istnieje takie $t \in S$, że $rs't = r'st$. Ale $\frac{r}{s} = \frac{rs't}{ss't}$ oraz $\frac{r'}{s'} = \frac{r'st}{s'st}$. Ponieważ liczniki i mianowniki po prawych stronach są odpowiednio równe, więc z poprzedniego rachunku wynika, że prawe strony wzoru (2.2) dla $\frac{r}{s}$ i $\frac{r'}{s'}$ są identyczne.

Dla dowodu wzoru (2.4) zauważmy, że $f(0) = 0$, więc na mocy wzoru (2.3) mamy

$$\begin{aligned} (\Delta^2 f_S) \left(\frac{r}{t}, \frac{s}{t} \right) &= f_S \left(\frac{r+s}{t} \right) - f_S \left(\frac{r}{t} \right) - f_S \left(\frac{s}{t} \right) = \\ &= \frac{tf(r+s) - (r+s)f(t)}{t^{n+1}} - \frac{tf(r) - rf(t)}{t^{n+1}} - \frac{tf(s) - sf(t)}{t^{n+1}} = \\ &= \frac{t(f(r+s) - f(r) - f(s))}{t^{n+1}} = \frac{(\Delta^2 f)(r, s)}{t^n}. \end{aligned}$$

Pozostaje udowodnić warunki (1) i (2) dla f_S . Zauważmy, że dzięki przemienności diagramu mamy $f_S(-1) = f_S\left(\frac{-1}{1}\right) = \frac{f(-1)}{1}$, a z drugiej strony

$$p\left(\frac{a}{s}, \frac{b}{s}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2} \binom{n}{k} \left(\frac{a}{s}\right)^{n-k} \left(\frac{b}{s}\right)^k = \frac{p(a, b)}{s^n}.$$

Niech $\frac{a}{s}$ i $\frac{b}{s}$ będą dowolnymi elementami R_S .

(1) Korzystając ze wzoru (2.4) otrzymujemy

$$\begin{aligned} f_S \left(\frac{a}{s}, \frac{b}{s} \right) - f_S \left(\frac{a}{s} \right) - f_S \left(\frac{b}{s} \right) &= (\Delta^2 f_S) \left(\frac{a}{s}, \frac{b}{s} \right) = \\ &= \frac{(\Delta^2 f)(a, b)}{s^n} = \frac{p(a, b)f(-1)}{s^n} = p\left(\frac{a}{s}, \frac{b}{s}\right) f_S(-1). \end{aligned}$$

(2) Korzystając ze wzoru (2.3) otrzymujemy

$$\begin{aligned} f_S \left(\frac{a}{s}, \frac{b}{s} \right) - \left(\frac{a}{s} \right)^n f_S \left(\frac{b}{s} \right) - \frac{b}{s} f_S \left(\frac{a}{s} \right) &= \\ &= \frac{s^2 f(ab) - ab f(s^2)}{s^{2n+2}} - \frac{a^n s f(b) - b f(s)}{s^{n+1}} - \frac{b s f(a) - a f(s)}{s^{n+1}} = \\ &= \frac{s^2 f(ab) - ab f(s^2)}{s^{2n+2}} - \frac{a^n s^2 f(b) - a^n b s f(s)}{s^{2n+2}} - \frac{b s^{n+1} f(a) - a b s^n f(s)}{s^{2n+2}} = \\ &= \frac{s^2 (f(ab) - a^n f(b) - s^{n-1} b f(a)) - ab (f(s^2) - a^{n-1} s f(s) - s^n f(s))}{s^{2n+2}} = \end{aligned}$$

$$= \frac{s^2(b-bs^{n-1})f(a)-ab(s-sa^{n-1})f(s)}{s^{2n+2}} = \frac{bs((s-s^n)f(a)-(a-a^n)f(s))}{s^{2n+2}} = 0$$

dzięki (2) i (3) dla f . To kończy dowód. $\square$

Twierdzenie 2.5.

Istnieje R_S -izomorfizm $C(R)_S \approx C(R_S)$, taki że $\frac{[r]}{s} \leftrightarrow \frac{1}{s} \left[\frac{r}{1} \right]$.

Dowód.

Stosując Twierdzenie 2.4 do kanonicznej C -funkcji $c : R \rightarrow C(R)$, $c(r) = [r]$, otrzymujemy C -funkcję nad R_S określoną następująco:

$$c_S : R_S \rightarrow C(R)_S, c_S \left(\frac{r}{s} \right) = \frac{[r]}{s} - \left(\frac{r}{s} \right)^n \frac{[s]}{s}.$$

Z Twierdzenia 2.3 mamy R_S -homomorfizm $g : C(R_S) \rightarrow C(R)_S$,

określony wzorem $g \left(\left[\frac{r}{s} \right] \right) = c_S \left(\frac{r}{s} \right) = \frac{[r]}{s} - \left(\frac{r}{s} \right)^n \frac{[s]}{s}$. Z drugiej strony mamy homomorfizm $C(i) : C(R) \rightarrow C(R_S)$ nad $i : R \rightarrow R_S$, taki, że $C(i)([r]) = \left[\frac{r}{1} \right]$, który daje nam dzięki uniwersalności lokalizacji R_S -homomorfizm $h : C(R)_S \rightarrow C(R_S)$, taki że $h \left(\frac{[r]}{s} \right) = \frac{1}{s} \left[\frac{r}{1} \right]$.

Zauważmy, że $h = g^{-1}$. Istotnie,

$$g \left(h \left(\frac{[r]}{s} \right) \right) = \frac{1}{s} g \left(\left[\frac{r}{1} \right] \right) = \frac{1}{s} \left(\frac{[r]}{1} - \left(\frac{r}{1} \right)^n \frac{[1]}{1} \right) = \frac{[r]}{s}$$

dzięki (5). Z drugiej strony, dzięki (7) i (2) obliczamy, że

$$h \left(g \left(\left[\frac{r}{s} \right] \right) \right) = h \left(\frac{[r]}{s} - \left(\frac{r}{s} \right)^n \frac{[s]}{s} \right) = \frac{1}{s} \left[\frac{r}{1} \right] - \frac{r^n}{s^{n+1}} \left[\frac{s}{1} \right] = \frac{1}{s} \left[\frac{r}{1} \right] + \left(\frac{r}{1} \right)^n \frac{[1]}{s} = \left[\frac{r}{1} \frac{1}{s} \right] = \left[\frac{r}{s} \right].$$

Stąd h jest izomorfizmem. $\square$

2.2.4. Homomorfizm P . Przypomnimy, że z Przykładu 2.1 mamy C -odwzorowanie $f : R \rightarrow R$ określone wzorem $f(r) = r^n - r$. Zatem dzięki uniwersalności $C(R)$ istnieje R -homomorfizm $P = P(R) : C(R) \rightarrow R$ uzupełniający diagram

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{c} & C(R) \\ & \searrow f & \downarrow P \\ & & R \end{array}$$

Jest on określony na generatorach wzorem $P([r]) = r^n - r$ i jego obrazem jest $I_n(R)$. Homomorfizmy $P(R)$ wyznaczają przekształcenie funktorów, tzn. dla dowolnego homomorfizmu pierścieni $i : R \longrightarrow R'$ następujący diagram

$$\begin{array}{ccc} C(R) & \xrightarrow{P(R)} & R \\ \downarrow C(i) & & \downarrow i \\ C(R') & \xrightarrow{P(R')} & R' \end{array}$$

jest przemienny. Rzeczywiście,

$$P(R')(C(i)([r])) = P(R')([i(r)]) = (i(r))^n - i(r) = i(r^n - r) = i(P(R)[r]).$$

Pokażemy, że P jest monomorfizmem dla dowolnego pierścienia R .

LEMAT 2.5.

Dla dowolnego zbioru multiplikatywnego S pierścienia przemiennego R mamy następujący diagram przemienny:

$$\begin{array}{ccc} C(R)_S & & \\ f \downarrow \cong & \searrow P(R)_S & \\ C(R_S) & \xrightarrow{P(R_S)} & R_S \end{array}$$

gdzie f jest izomorfizmem z Twierdzenia 2.5. Zatem $P(R)_S$ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $P(R_S)$ jest monomorfizmem.

DOWÓD.

$$P(R_S) \left(f \left(\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} \right) \right) = P(R_S) \left(\frac{1}{s} \begin{bmatrix} r \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{s} \left(\left(\frac{r}{1} \right)^n - \frac{r}{1} \right) = \frac{r^n - r}{s} = \frac{P(R) \left(\begin{bmatrix} r \\ 1 \end{bmatrix} \right)}{s} = P(R)_S \left(\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} \right).$$

□

Zauważmy, że

$$[r^2] = [r \cdot r] = r^n[r] + r[r] = (r^n + r)[r].$$

Podstawiając r^{2^k} za r otrzymujemy następujący wzór rekurencyjny:

$$[r^{2^{k+1}}] = \left((r^{2^k})^n + r^{2^k} \right) [r^{2^k}].$$

W szczególności otrzymujemy

WNIOSEK 2.4.

Niech $r \in R$. Wtedy

$$[r^n] = [r^{2^l}] = \left((r^{2^{l-1}})^n + r^{2^{l-1}} \right) \left((r^{2^{l-2}})^n + r^{2^{l-2}} \right) \dots (r^n + r) [r].$$

Rozważmy jądro R -homomorfizmu $P : C(R) \longrightarrow R$, $P([r]) = r^n - r$ dla $r \in R$.

LEMAT 2.6.

$$I_n(R)Ker(P) = 0.$$

DOWÓD.

Niech $x = \sum_i a_i[r_i] \in Ker(P)$, to jest $\sum_i a_i(r_i^n - r_i) = 0$. Wtedy dzięki Lematowi 2.3 (3) otrzymujemy, że

$$(r^n - r)x = \sum_i a_i(r^n - r)[r_i] = \sum_i a_i(r_i^n - r_i)[r] = 0[r] = 0. \quad \square$$

Przypomnijmy, że na mocy Lematu 2.4 dla dowolnych $r_1, r_2, \dots, r_k \in R$, $k \geq 2$ zachodzi następujący wzór:

$$\left[\sum_{i=1}^k r_i \right] = \sum_{i=1}^k [r_i] + p(r_1, r_2, \dots, r_k)[-1]. \quad (2.5)$$

LEMAT 2.7.

Niech $x = \sum_{i=1}^k a_i[r_i] \in Ker(P)$, gdzie jeden z r_i jest równy -1 . Jeżeli wszystkie a_i należą do $I_n(R)^m$ dla pewnego $m \geq 0$, to $x = \sum_{i=1}^k b_i[r_i]$, gdzie wszystkie b_i należą do $I_n(R)^{nm+1}$.

DOWÓD.

Z założenia $\sum_{i=1}^k a_i r_i^n = \sum_{i=1}^k a_i r_i$. Na mocy wzoru (2.5) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left[\sum_{i=1}^k a_i r_i \right] &= \sum_{i=1}^k [a_i r_i] + p[-1] = \sum_{i=1}^k a_i [r_i] + \sum_{i=1}^k r_i^n [a_i] + p[-1], \\ \left[\sum_{i=1}^k a_i r_i^n \right] &= \sum_{i=1}^k [a_i r_i^n] + q[-1] = \sum_{i=1}^k a_i^n [r_i^n] + \sum_{i=1}^k r_i^n [a_i] + q[-1], \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
p &= p(a_1 r_1, \dots, a_k r_k) = \sum_I \frac{1}{2} (i_1, i_2, \dots, i_k) (a_1 r_1)^{i_1} (a_2 r_2)^{i_2} \dots (a_k r_k)^{i_k} = \\
&= \sum_I \frac{1}{2} (i_1, i_2, \dots, i_k) a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_k^{i_k} r_1^{i_1} r_2^{i_2} \dots r_k^{i_k} \\
q &= p(a_1 r_1^n, \dots, a_k r_k^n) = \sum_I \frac{1}{2} (i_1, i_2, \dots, i_k) (a_1 r_1^n)^{i_1} (a_2 r_2^n)^{i_2} \dots (a_k r_k^n)^{i_k} = \\
&= \sum_I \frac{1}{2} (i_1, i_2, \dots, i_k) a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_k^{i_k} (r_1^{i_1 n} r_2^{i_2 n} \dots r_k^{i_k n})^n,
\end{aligned}$$

przy czym $\sum_I$ oznacza sumę po zbiorze I tych układów indeksów nieujemnych liczb całkowitych $i_1, \dots, i_k$, że $i_1 + \dots + i_k = n$ oraz co najmniej dwa z indeksów i_j są niezerowe. Ponieważ

$$\sum_{i=1}^k a_i^n [r_i^n] + \sum_{i=1}^k r_i^n [a_i] + q[-1] = \sum_{i=1}^k a_i [r_i] + \sum_{i=1}^k r_i^n [a_i] + p[-1],$$

więc otrzymujemy

$$\begin{aligned}
x &= \sum_{i=1}^k a_i [r_i] = \sum_i a_i^n [r_i^n] + (q - p)[-1] = \\
&= \sum_{i=1}^k a_i^n \left((r_i^{2^{l-1}})^n + r_i^{2^{l-1}} \right) \left((r_i^{2^{l-2}})^n + r_i^{2^{l-2}} \right) \dots (r_i^n + r_i) [r_i] + (q - p)[-1],
\end{aligned}$$

na mocy Wniosku 2.4.

Ponieważ $a_i \in I_n(R)^m$, więc $a_i^n \in I_n(R)^{nm}$ oraz $r_i^n + r_i = (-r_i)^n - (-r_i) \in I_n(R)$,

bo n jest parzyste. Stąd

$$a_i^n \left((r_i^{2^{m-1}})^n + r_i^{2^{m-1}} \right) \left((r_i^{2^{m-2}})^n + r_i^{2^{m-2}} \right) \dots (r_i^n + r_i) \in I_n(R)^{nm+1}.$$

Zauważmy również, że $a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_k^{i_k} \in I_n(R)^{nm}$, bo $a_i \in I_n(R)^m$ oraz $i_1 + \dots + i_k = n$,

a także $(r_1^{i_1} r_2^{i_2} \dots r_k^{i_k})^n - r_1^{i_1} r_2^{i_2} \dots r_k^{i_k} \in I_n(R)$. Stąd

$$q - p = \sum_I \frac{1}{2} (i_1, i_2, \dots, i_k) a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_k^{i_k} \left((r_1^{i_1} r_2^{i_2} \dots r_k^{i_k})^n - r_1^{i_1} r_2^{i_2} \dots r_k^{i_k} \right) \in I_n(R)^{nm+1}.$$

To kończy dowód. $\square$

Z Lematu 2.7 otrzymujemy następujący

WNIOSEK 2.5.

Niech $x = \sum_{i=1}^k a_i [r_i] \in \text{Ker}(P)$ i niech M oznacza podmoduł modułu $C(R)$ generowany przez $[r_1], \dots, [r_k]$ i $[-1]$. Wtedy $x \in \bigcap_{m=0}^{\infty} I_n(R)^m M$.

DOWÓD.

Teza wynika z tego, że $nm + 1 > m$ dla $m \geq 0$, a podmoduły $I_n(R)^m M$ tworzą ciąg zstępujący. $\square$

2.2.5. Zasadnicze twierdzenie. Głównym wynikiem tego paragrafu jest następujące

TWIERDZENIE 2.6.

Niech $n = 2^l$, $l = 1, 2, \dots$ oraz $C(R) = C^{(n)}(R)$ będzie R -modułem generowanym przez elementy $[r], r \in R$, z relacjami:

$$(1) \quad [r + s] = [r] + [s] + p(r, s)[-1], \quad r, s \in R,$$

$$(2) \quad [rs] = r^n[s] + s[r], \quad r, s \in R.$$

Wtedy istnieje R -izomorfizm $P : C(R) \rightarrow I_n(R)$, taki że $P([r]) = r^n - r$ dla $r \in R$.

DOWÓD.

Rozważmy następujące przypadki:

Przypadek lokalny noetherowski.

Założmy, że R jest pierścieniem lokalnym i noetherowskim. Z Wniosku 2.2 wynika, że mamy dwa przypadki:

przypadek 1: $I_n(R) = R$. Wtedy dzięki Lematowi 2.6 otrzymujemy, że $\text{Ker}(P) = 0$.

przypadek 2: $I_n(R)$ jest ideałem maksymalnym pierścienia R . Niech $x \in \text{Ker}(P)$.

Określamy podmoduł M jak we Wniosku 2.5 i zauważamy, że jest on modulem skończenie generowanym nad lokalnym pierścieniem noetherowskim R . Wtedy przekrój we wniosku jest zerowy dzięki twierdzeniu Krulla o przekroju i w konsekwencji $x = 0$. To dowodzi, że $\text{Ker}(P) = 0$.

Przypadek noetherowski.

Założmy, że pierścień R jest noetherowski. Wtedy wszystkie jego lokalizacje względem ideałów pierwszych są lokalne i noetherowskie. Z poprzedniego przypadku i z Lematu 2.5 mamy, że P jest takim homomorfizmem, który po lokalizacji względem dowolnego ideału pierwszego jest monomorfizmem, a zatem P jest monomorfizmem.

Przypadek ogólny.

Niech $x = \sum_i a_i[r_i] \in \text{Ker}(P)$. Określamy podpierścień S pierścienia R generowany przez wszystkie elementy a_i i r_i . Ponieważ S jest skończenie generowany, więc jest noetherowski, a zatem na mocy poprzedniego przypadku $P : C(S) \rightarrow S$ jest monomorfizmem. Niech $i : S \rightarrow R$ będzie włożeniem. Ponieważ P jest przekształceniem funktorów, więc mamy diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} C(S) & \xrightarrow{P} & S \\ \downarrow C(i) & & \downarrow i \\ C(R) & \xrightarrow{P} & R \end{array}$$

Zauważmy, że $x = (C(i))(y)$, gdzie $y = \sum_i a_i[r_i] \in C(S)$.

Ponieważ $0 = P(x) = P(C(i)(y)) = i(P(y))$, więc $P(y) = 0$, bo i jest włożeniem.

Z poprzedniego przypadku wynika, że $y = 0$ i w konsekwencji $x = 0$. To kończy dowód. $\square$

WNIOSEK 2.6.

Jeżeli $n = 2^l$, $l = 1, 2, \dots$, to relacje generujące pomiędzy generatorami

$[r] = r^n - r$ ideału $I_n(R)$ są następujące:

$$(1) \quad [r + s] = [r] + [s] + p(r, s)[-1], \quad r, s \in R,$$

$$\text{gdzie } p(r, s) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2} \binom{n}{k} r^{n-k} s^k,$$

$$(2) \quad [rs] = r^n[s] + s[r], \quad r, s \in R.$$

2.3. Relacje pomiędzy elementami $r^3 - r$

W tym paragrafie znajdziemy relacje generujące pomiędzy elementami $\{r\} = r^3 - r$ pierścienia przemiennego R . W tym celu przeprowadzimy analogiczne rozumowanie, jak w poprzednim paragrafie. W związku z tym będziemy używać podobnych oznaczeń i terminów.

2.3.1. C -funkcje i Funktor C .

DEFINICJA 2.3.

C -funkcją nad R nazywamy taką funkcję $f : R \rightarrow M$, gdzie M jest R -modulem, która spełnia następujące warunki dla dowolnych $a, b, r, r', s \in R$:

- (1) $f(rs) = r^3 f(s) + sf(r)$,
- (2) $3sf(r) - 3rf(s) = (r - s)(\Delta^2 f)(r, s)$,
- (3) $(\Delta^2 f)(ar^3, bs^3) - (\Delta^2 f)(ar, bs) = 3a^2bf(r^2s) + 3ab^2f(rs^2)$,
- (4) $(\Delta^2 f)(r + r', s) = (\Delta^2 f)(r, s) + (\Delta^2 f)(r', s) + rr'sf(2)$.

Zauważmy, że warunek (4) można zastąpić warunkiem

$$(4') \quad (\Delta^3 f)(r, r', s) = rr'sf(2),$$

gdyż z warunku (1) wynika, że $f(0) = 0$ (por. poniższy lemat).

LEMAT 2.8.

Jeśli $f : R \rightarrow M$ jest C -funkcją, to dla dowolnych $r, s \in R$ mamy

- (5) $(r^3 - r)f(s) = (s^3 - s)f(r)$,
- (6) $6f(r) = (r^3 - r)f(2)$,
- (7) $f(0) = f(1) = 0$,
- (8) jeżeli s jest elementem odwracalnym, to $f(s^{-1}) = -s^{-4}f(s)$,
- (9) $(\Delta^2 f)(tr, ts) = t^3(\Delta^2 f)(r, s)$,

$$(10) \quad (t^3 - t)(\Delta^2 f)(r, s) = (3r^2s + 3rs^2)f(t),$$

$$(11) \quad \Delta^4 f = 0.$$

Dowód.

Relację (5) otrzymujemy odejmując stronami dwie symetryczne wersje (1). Relację (6) otrzymujemy z (5), przyjmując $s = 2$. Równości $f(0) = f(1) = 0$ otrzymujemy kładąc w (1) $r = s = 0$ lub 1. Niech s będzie odwracalne. Ponieważ dzięki (1) mamy $0 = f(1) = f(s \cdot s^{-1}) = s^3 f(s^{-1}) + s^{-1} f(s)$, więc $-s^{-1} f(s) = s^3 f(s^{-1})$. Stąd po pomnożeniu przez s^{-3} otrzymujemy $f(s^{-1}) = s^{-4} f(s)$. Relacja (9) wynika z definicji $\Delta^2 f$ oraz (1). Istotnie,

$$\begin{aligned} (\Delta^2 f)(tr, ts) &= f(tr + ts) - f(tr) - f(ts) = \\ &= t^3 f(r + s) + (s + t)f(t) - t^3 f(r) - rf(t) - t^3 f(s) - sf(t) = \\ &= t^3(f(r + s) - f(r) - f(s)) = t^3(\Delta^2 f)(r, s). \end{aligned}$$

Relację (10) otrzymujemy z definicji $\Delta^2 f$ oraz (5). Istotnie,

$$\begin{aligned} (t^3 - t)(\Delta^2 f)(r, s) &= (t^3 - t)(f(r + s) - f(r) - f(s)) = \\ &= ((r + s)^3 - (r + s))f(t) - (r^3 - r)f(t) - (s^3 - s)f(t) = (3r^2s + 3rs^2)f(t). \end{aligned}$$

Ponieważ $f(0) = 0$, więc z (4) otrzymujemy (11). Relacja (12) wynika z trójliniowości $\Delta^3 f$. □

PRZYKŁAD 2.2.

Określamy $f : R \longrightarrow R$ wzorem $f(r) = r^3 - r$. Pokażemy, że f jest C -funkcją.

Zauważmy najpierw, że $f(0) = 0$, skąd

$$(\Delta^2 f)(r, s) = 3r^2s + 3rs^2, \tag{2.6}$$

$$(\Delta^3 f)(r, s, t) = 6rst. \tag{2.7}$$

Istotnie,

$$\begin{aligned}
 (\Delta^2 f)(r, s) &= f(r + s) - f(r) - f(s) = \\
 &= (r + s)^3 - (r + s) - (r^3 - r) - (s^3 - s) = 3r^2s + 3rs^2, \\
 (\Delta^3 f)(r, s, t) &= (\Delta^2 f)(r + s, t) - (\Delta^2 f)(r, t) - (\Delta^2 f)(s, t) = \\
 &= 3(r + s)^2t + 3(r + s)t^2 - (3r^2t + 3rt^2) - (3s^2t + 3st^2) = 6rst.
 \end{aligned}$$

Pokażemy, że funkcja f spełnia relacje (1)-(4).

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & f(rs) - r^3f(s) - sf(r) = (rs)^3 - rs - r^3(s^3 - s) - s(r^3 - r) = 0. \\
 (2) \quad & 3sf(r) - 3rf(s) - (r - s)(\Delta^2 f)(r, s) = \\
 &= 3s(r^3 - r) - 3r(s^3 - s) - (r - s)(3r^2s + 3rs^2) = 0. \\
 (3) \quad & (\Delta^2 f)(ar^3, bs^3) - (\Delta^2 f)(ar, bs) - 3a^2bf(r^2s) - 3ab^2f(rs^2) = \\
 &= 3(ar^3)^2bs^3 + 3ar^3(bs^3)^2 - (3(ar)^2bs + 3ar(bs)^2) - \\
 &- 3a^2b((r^2s)^3 - r^2s) - 3ab^2((rs^2)^3 - rs^2) = \\
 &= 3a^2b(r^6s^3 - r^2s - r^6s^3 + r^2s) + 3ab^2(r^3s^6 - rs^2 - r^3s^6 + rs^2) = 0. \\
 (4) \quad & \text{Wynika to bezpośrednio ze wzoru (2.7) i tego, że } f(2) = 6.
 \end{aligned}$$

Podobnie jak poprzednio wprowadźmy następującą definicję.

DEFINICJA 2.4.

Niech $C(R) = C^{(3)}(R)$ będzie R -modułem generowanym przez elementy $\{r\}$, $r \in R$, z relacjami:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \{rs\} = r^3\{s\} + s\{r\}, \\
 (2) \quad & 3s\{r\} - 3r\{s\} = (r - s)[r, s], \\
 (3) \quad & [ar^3, bs^3] - [ar, bs] = 3a^2b\{r^2s\} + 3ab^2\{rs^2\}, \\
 (4) \quad & [r + r', s] = [r, s] + [r', s] + rr's\{2\},
 \end{aligned}$$

gdzie $[r, s] = \{r + s\} - \{r\} - \{s\} = (\Delta^2 \{ \})(r, s)$ oraz $a, b, r, r', s \in R$.

Jak poprzednio mamy kanoniczną C -funkcję $c : R \rightarrow C(R)$ określoną wzorem $c(r) = \{r\}$. Moduł $C(R)$ jest obiektem uniwersalnym ze względu na C -funkcje, co oznacza, że dowolna C -funkcja może być jednoznacznie przedstawiona jako złożenie kanonicznej C -funkcji $c : R \rightarrow C(R)$ oraz R -homomorfizmu określonego na $C(R)$. Dokładniej, mamy następujące

TWIERDZENIE 2.7.

Niech $f : R \rightarrow M$, gdzie M jest R -modułem, będzie C -funkcją. Wówczas istnieje dokładnie jeden homomorfizm R -modułów $\bar{f} : C(R) \rightarrow M$, taki że diagram

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{c} & C(R) \\ & \searrow f & \downarrow \bar{f} \\ & & M \end{array}$$

jest przemienny. Jest on określony na generatorach wzorem $\bar{f}(\{r\}) = f(r)$.

Jeśli $i : R \rightarrow R'$ jest homomorfizmem pierścieni, to jak poprzednio otrzymujemy indukowany homomorfizm modułów $C(i) : C(R) \rightarrow C(R')$ nad i , który określony jest na generatorach wzorem $C(i)(\{r\}) = \{i(r)\}$. Podobnie pokazujemy, że C jest funktorem z kategorii pierścieni przemiennych z jedyneką do kategorii par pierścieni-moduł określonej w poprzednim paragrafie.

Podobnie jak poprzednio pokażemy, że C komutuje z lokalizacjami.

Niech S będzie zbiorem multiplikatywnym w R i niech $i : R \rightarrow R_S$ oraz

$i : M \rightarrow M_S$ będą homomorfizmami kanonicznymi.

TWIERDZENIE 2.8.

Dla dowolnej C -funkcji $f : R \rightarrow M$ istnieje jedyna C -funkcja $f_S : R_S \rightarrow M_S$ spełniająca warunek $f_S(i(r)) = i(f(r))$ dla $r \in R$, tzn. uzupełniająca diagram

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{i} & R_S \\ \downarrow f & & \downarrow f_S \\ M & \xrightarrow{i} & M_S \end{array}$$

do diagramu przemienności. Jest ona dana wzorem:

$$f_S\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{f(r)}{s} - \left(\frac{r}{s}\right)^3 \frac{f(s)}{s} \quad (2.8)$$

lub równoważnie

$$f_S\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{sf(r) - rf(s)}{s^4}. \quad (2.9)$$

Przy tym

$$(\Delta^2 f_S)\left(\frac{r}{t}, \frac{s}{t}\right) = \frac{(\Delta^2 f)(r, s)}{t^3}, \quad (2.10)$$

$$(\Delta^3 f_S)\left(\frac{r}{t}, \frac{r'}{t}, \frac{s}{t}\right) = \frac{(\Delta^3 f)(r, r', s)}{t^3}. \quad (2.11)$$

DOWÓD.

Równoważność wzorów (2.8) oraz (2.9) wynika stąd, że dla dowolnej C -funkcji f mamy

$$\frac{f(r)}{s} - \left(\frac{r}{s}\right)^3 \frac{f(s)}{s} = \frac{(s^3-s)f(r) - (r^3-r)f(s) + sf(r) - rf(s)}{s^4} = \frac{sf(r) - rf(s)}{s^4}$$

na podstawie (5) dla f .

Żałómy, że istnieje uzupełnienie powyższego diagramu. Warunek przemienności oznacza, że $f_S\left(\frac{r}{1}\right) = \frac{f(r)}{1}$ dla $r \in R$. Niech $s \in S$. Jeżeli f_S jest C -funkcją, to

$$\begin{aligned} \frac{f(r)}{1} &= f_S\left(\frac{r}{1}\right) = f_S\left(\left(\frac{r}{s}\right)\left(\frac{s}{1}\right)\right) = \left(\frac{r}{s}\right)^3 f_S\left(\frac{s}{1}\right) + \left(\frac{s}{1}\right) f_S\left(\frac{r}{s}\right) = \\ &= \left(\frac{r}{s}\right)^3 \frac{f(s)}{1} + \left(\frac{s}{1}\right) f_S\left(\frac{r}{s}\right), \end{aligned}$$

skąd wynika wzór (2.8). To dowodzi jedności f_S .

Żeby udowodnić, że f_S jest poprawnie określona, jak poprzednio, wystarczy sprawdzić, że z prawej strony wzoru (2.8) otrzymujemy to samo, jeżeli zastąpimy r przez rt i s przez st dla dowolnego $t \in S$. Dzięki (2) obliczamy, że

$$\frac{f(rt)}{st} - \left(\frac{rt}{st}\right)^3 \frac{f(st)}{st} = \frac{r^3 f(t) + t f(r)}{st} - \left(\frac{r}{s}\right)^3 \frac{s^3 f(t) + t f(s)}{st} = \frac{f(r)}{s} - \left(\frac{r}{s}\right)^3 \frac{f(s)}{s}.$$

Udowodnimy wzory (2.10) i (2.11), korzystając z tego, że $f_S(0) = 0$. Tak samo jak w dowodzie Twierdzenia 2.4 ze wzoru (2.9) otrzymujemy

$$\begin{aligned} (\Delta^2 f_S) \left(\frac{r}{t}, \frac{s}{t} \right) &= f_S \left(\frac{r}{t} + \frac{s}{t} \right) - f_S \left(\frac{r}{t} \right) - f_S \left(\frac{s}{t} \right) = \\ &= \frac{tf(r+s) - (r+s)f(t)}{t^4} - \frac{tf(r) - rf(t)}{t^4} - \frac{tf(s) - sf(t)}{t^4} = \\ &= \frac{f(r+s) - f(r) - f(s)}{t^3} = \frac{(\Delta^2 f)(r, s)}{t^3}. \end{aligned}$$

Wzór (2.11) wynika ze wzoru (2.10). Istotnie,

$$\begin{aligned} (\Delta^3 f_S) \left(\frac{r}{t}, \frac{r'}{t}, \frac{s}{t} \right) &= (\Delta^2 f_S) \left(\frac{r}{t} + \frac{r'}{t}, \frac{s}{t} \right) - (\Delta^2 f_S) \left(\frac{r}{t}, \frac{s}{t} \right) - (\Delta^2 f_S) \left(\frac{r'}{t}, \frac{s}{t} \right) = \\ &= \frac{(\Delta^2 f)(r+r', s)}{t^3} - \frac{(\Delta^2 f)(r, s)}{t^3} - \frac{(\Delta^2 f)(r', s)}{t^3} = \frac{(\Delta^3 f)(r, r', s)}{t^3}. \end{aligned}$$

Pozostaje udowodnić, że f_S jest C -funkcją. Niech $\frac{a}{s}, \frac{b}{s}, \frac{c}{s}, \frac{r}{t}, \frac{s}{t}$ będą dowolnymi elementami R_S . Wówczas

$$\begin{aligned} (1) \quad & f_S \left(\frac{r}{t} \frac{s}{t} \right) - \left(\frac{r}{t} \right)^3 f_S \left(\frac{s}{t} \right) - \left(\frac{s}{t} \right)^3 f_S \left(\frac{r}{t} \right) = \\ &= \frac{t^2 f(rs) - rs f(t^2)}{t^8} - \left(\frac{r}{t} \right)^3 \frac{tf(s) - sf(t)}{t^4} - \frac{r}{t} \frac{tf(r) - rf(t)}{t^4} = \\ &= \frac{t^2(r^3 f(s) + s f(r)) - rs(t^3 f(t) + t f(t))}{t^8} - \frac{r^3(t^2 f(s) - st f(t))}{t^8} - \frac{s(t^4 f(r) - rt^3 f(t))}{t^8} = \\ &= \frac{st^2 f(r) - rst f(t) + r^3 st f(t) - st^4 f(r)}{t^8} = \\ &= \frac{st(t-t^3)f(r) - (r-r^3)st f(t)}{t^8} = 0 \end{aligned}$$

dzięki (1) i (6) dla f .

$$\begin{aligned} (2) \quad & 3 \frac{s}{t} f_S \left(\frac{r}{t} \right) - 3 \frac{r}{t} f_S \left(\frac{s}{t} \right) = 3 \frac{s(tf(r) - rf(t))}{t^5} - 3 \frac{r(tf(s) - sf(t))}{t^5} = \\ &= \frac{3sf(r) - 3rf(s)}{t^4} = \frac{(r-s)(\Delta^2 f)(r, s)}{t^4} = \left(\frac{r}{t} - \frac{s}{t} \right) (\Delta^2 f_S) \left(\frac{r}{t}, \frac{s}{t} \right) \end{aligned}$$

dzięki (2) dla f i wzorowi (2.10)

(3) Korzystając ze wzoru (2.10) oraz (10) dla f otrzymujemy

$$(\Delta^2 f_S) \left(\frac{a}{t} \left(\frac{r}{t} \right)^3, \frac{b}{t} \left(\frac{s}{t} \right)^3 \right) - (\Delta^2 f_S) \left(\frac{a}{t} \frac{r}{t}, \frac{b}{t} \frac{s}{t} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\Delta^2 f)(ar^3, bs^3)}{t^{12}} - \frac{(\Delta^2 f)(ar, bs)}{t^6} = \frac{(\Delta^2 f)(ar^3, bs^3) - (\Delta^2 f)(ar, bs)}{t^{12}} - \frac{(t^9 - t^3)(\Delta^2 f)(ar, bs)}{t^{15}} = \\
&= \frac{3a^2bt^3f(r^2s) + 3ab^2t^3f(rs^2)}{t^{15}} - \frac{(3(ar)^2bs + 3ar(bs^2))f(t^3)}{t^{15}} = \\
&= 3\frac{a^2bt^3f(r^2s) - r^2sf(t^3)}{t^{12}} + 3\frac{ab^2t^3f(rs^2) - rs^2f(t^3)}{t^{12}} = \\
&= 3\frac{a^2b}{t^3}f_S\left(\frac{r^2s}{t^3}\right) + 3\frac{ab^2}{t^3}f_S\left(\frac{rs^2}{t^3}\right) = 3\left(\frac{a}{t}\right)^2\frac{b}{t}f_S\left(\left(\frac{r}{t}\right)^2\frac{s}{t}\right) + 3\frac{a}{t}\left(\frac{b}{t}\right)^2f_S\left(\frac{r}{t}\left(\frac{s}{t}\right)^2\right).
\end{aligned}$$

(4') Zauważmy, że dzięki przemienności diagramu mamy $f_S(\frac{2}{1}) = \frac{f(2)}{1}$, więc ze wzoru (2.11) otrzymujemy, że

$$(\Delta^3 f_S)\left(\frac{r}{t}, \frac{r'}{t}, \frac{s}{t}\right) = \frac{(\Delta^3 f)(r, r', s)}{t^3} = \frac{rr'sf(2)}{t^3} = \frac{r}{t}\frac{r'}{t}\frac{s}{t}\frac{f(2)}{1}.$$

□

TWIERDZENIE 2.9.

Istnieje R_S -izomorfizm $C(R)_S \approx C(R_S)$, taki że $\frac{\{r\}}{s} \leftrightarrow \frac{1}{s} \left\{ \frac{r}{1} \right\}$.

DOWÓD.

Przeprowadzimy analogiczne rozumowanie jak w poprzednim przypadku. Stosując Lemat 2.8 do kanonicznej C -funkcji $c : R \rightarrow C(R)$, $c(r) = \{r\}$, otrzymujemy C -funkcję $c_S : R_S \rightarrow C(R)_S$ nad R_S , $c_S\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{\{r\}}{s} - \left(\frac{r}{s}\right)^3 \frac{\{s\}}{s}$. Z Twierdzenia 2.7 mamy R_S -homomorfizm $g : C(R_S) \rightarrow C(R)_S$, $g\left(\left\{\frac{r}{s}\right\}\right) = c_S\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{\{r\}}{s} - \left(\frac{r}{s}\right)^3 \frac{\{s\}}{s}$. Z drugiej strony mamy homomorfizm $C(i) : C(R) \rightarrow C(R_S)$ nad $i : R \rightarrow R_S$ określony na generatorach wzorem $C(i)(\{r\}) = \left\{\frac{r}{1}\right\}$, który daje nam R_S -homomorfizm

$h : C(R)_S \rightarrow C(R_S)$, taki że $h\left(\frac{\{r\}}{s}\right) = \frac{1}{s}\left\{\frac{r}{1}\right\}$. Zauważmy, że $h = g^{-1}$. Istotnie,

$$g\left(h\left(\frac{\{r\}}{s}\right)\right) = \frac{1}{s}g\left(\left\{\frac{r}{1}\right\}\right) = \frac{1}{s}\left(\frac{\{r\}}{1} - \left(\frac{r}{1}\right)^3 \frac{\{1\}}{1}\right) = \frac{\{r\}}{s}$$

dzięki (7). Z drugiej strony, dzięki (8) i (1) obliczamy, że

$$\begin{aligned}
h\left(g\left(\left\{\frac{r}{s}\right\}\right)\right) &= h\left(\frac{\{r\}}{s} - \left(\frac{r}{s}\right)^3 \frac{\{s\}}{s}\right) = \\
&= \frac{1}{s}\left\{\frac{r}{1}\right\} - \frac{r^3}{s^4}\left\{\frac{s}{1}\right\} = \frac{1}{s}\left\{\frac{r}{1}\right\} + \left(\frac{r}{1}\right)^3 \frac{1}{s} = \left\{\frac{r}{1}\frac{1}{s}\right\} = \left\{\frac{r}{s}\right\}.
\end{aligned}$$

Stąd h jest izomorfizmem.

□

2.3.2. Homomorfizm P . Przypomnijmy, że z Przykładu 2.2 mamy C –funkcję $f : R \rightarrow R$ określoną wzorem $f(r) = r^3 - r$. Zatem na mocy Twierdzenia 2.7 istnieje R –homomorfizm $P = P(R) : C(R) \rightarrow R$ uzupełniający diagram

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{c} & C(R) \\ & \searrow f & \downarrow P \\ & & R \end{array}$$

Jest on określony na generatorach wzorem $P(\{r\}) = r^3 - r$ i jego obrazem jest $I_3(R)$. Homomorfizmy $P(R)$ wyznaczają przekształcenie funktorów, tzn. dla dowolnego homomorfizmu pierścieni $i : R \rightarrow R'$ następujący diagram

$$\begin{array}{ccc} C(R) & \xrightarrow{P(R)} & R \\ \downarrow C(i) & & \downarrow i \\ C(R') & \xrightarrow{P(R')} & R' \end{array}$$

jest przemienny. Rzeczywiście,

$$P(R')(C(i)(\{r\})) = P(R')(\{i(r)\}) = (i(r))^3 - i(r) = i(r^3 - r) = i(P(R)\{r\}).$$

Pokażemy, że P jest monomorfizmem dla dowolnego pierścienia R .

LEMAT 2.9.

Dla dowolnego zbioru multiplikatywnego S pierścienia przemiennego R mamy następujący diagram przemienny:

$$\begin{array}{ccc} C(R)_S & & \\ f \downarrow \cong & \searrow P(R)_S & \\ C(R_S) & \xrightarrow{P(R_S)} & R_S \end{array}$$

gdzie f jest izomorfizmem z Twierdzenia 2.9. Zatem $P(R)_S$ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $P(R_S)$ jest monomorfizmem.

DOWÓD.

$$\begin{aligned} P(R_S) \left(f \left(\frac{\{r\}}{s} \right) \right) &= P(R_S) \left(\frac{1}{s} \{ \frac{r}{1} \} \right) = \\ &= \frac{1}{s} \left(\left(\frac{r}{1} \right)^3 - \frac{r}{1} \right) = \frac{r^3 - r}{s} = \frac{P(R)(\{r\})}{s} = P(R)_S \left(\frac{\{r\}}{s} \right). \end{aligned}$$

□

Stosując relację (1) otrzymujemy następujący

LEMAT 2.10.

Dla dowolnego $r \in R$ zachodzą wzory:

- (1) $\{r^2\} = (r^3 + r)\{r\},$
- (2) $\{r^2s\} = rs\{r\} + r^3s\{r\} + r^6\{s\},$
- (3) $\{r^3\} = (r^6 + r^4 + r^2)\{r\},$

DOWÓD.

Zauważmy, że

- (1) $\{r^2\} = \{r \cdot r\} = r^3\{r\} + r\{r\} = (r^3 + r)\{r\},$
- (2) $\{r^2s\} = r^6\{s\} + s\{r^2\} = r^6\{s\} + s(r^3 + r)\{r\} = rs\{r\} + r^3s\{r\} + r^6\{s\}.$

Własność (3) otrzymujemy z (2) przy $s = r$.

□

Przypomnijmy, że z własności (4') mamy $(\Delta^3\{ \})(r, s, t) = rst2,$

a z Lematu 2.8 (11) wynika, że $\Delta^4\{ \} = 0$. Stąd i na mocy wzoru (1.2) otrzymujemy

WNIOSEK 2.7.

Dla dowolnego skończonego układu elementów $r_i \in R$ zachodzi następujący wzór:

$$\left\{ \sum_i r_i \right\} = \sum_i \{r_i\} + \sum_{i < j} [r_i, r_j] + \sum_{i < j < k} r_i r_j r_k \{2\}.$$

Rozważmy jądro R -homomorfizmu $P : C(R) \longrightarrow R, P(\{r\}) = r^3 - r$.

LEMAT 2.11.

$$I_3(R)Ker(P) = 0.$$

DOWÓD.

Niech $x = \sum_i a_i \{r_i\} \in \text{Ker}(P)$, to jest $\sum_i a_i (r_i^3 - r_i) = 0$.

Wtedy dzięki (5) otrzymujemy, że

$$(r^3 - r)x = \sum_i a_i (r^3 - r) \{r_i\} = \sum_i a_i (r_i^3 - r_i) \{r\} = 0 \{r\} = 0. \quad \square$$

LEMAT 2.12.

Niech $x = \sum_{i=1}^k a_i \{r_i\} \in \text{Ker}(P)$, gdzie jeden z r_i jest równy 2. Jeżeli wszystkie a_i należą do $I_3(R)^m$ dla pewnego $m \geq 0$ oraz jeżeli spełniony jest jeden z warunków:

$$(1) \quad r_1, \dots, r_k \in I_3(R)$$

lub

$$(2) \quad 3 \in I_3(R),$$

to $x = \sum_{i=1}^k b_i \{r_i\}$, gdzie wszystkie b_i należą do $I_3(R)^{3m+1}$.

DOWÓD.

Z założenia $\sum_{i=1}^k a_i r_i^3 = \sum_{i=1}^k a_i r_i$, co będziemy zapisywali jako $\sum_i a_i r_i^3 = \sum_i a_i r_i$.

Na mocy Wniosku 2.7, Lematu 2.10 oraz warunku (1) Definicji 2.4 otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_i a_i r_i \right\} &= \sum_i \{a_i r_i\} + \sum_{i < j} [a_i r_i, a_j r_j] + \sum_{i < j < k} a_i r_i a_j r_j a_k r_k \{2\} = \\ &= \sum_i a_i \{r_i\} + \sum_i r_i^3 \{a_i\} + \sum_{i < j} [a_i r_i, a_j r_j] + \sum_{i < j < k} a_i r_i a_j r_j a_k r_k \{2\} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_i a_i r_i^3 \right\} &= \sum_i \{a_i r_i^3\} + \sum_{i < j} [a_i r_i^3, a_j r_j^3] + \sum_{i < j < k} a_i r_i^3 a_j r_j^3 a_k r_k^3 \{2\} = \\ &= \sum_i a_i^3 \{r_i^3\} + \sum_i r_i^3 \{a_i\} + \sum_{i < j} [a_i r_i^3, a_j r_j^3] + \sum_{i < j < k} a_i r_i^3 a_j r_j^3 a_k r_k^3 \{2\} = \\ &= \sum_i a_i^3 (r_i^6 + r_i^4 + r_i^2) \{r_i\} + \sum_i r_i^3 \{a_i\} + \sum_{i < j} [a_i r_i^3, a_j r_j^3] + \sum_{i < j < k} a_i r_i^3 a_j r_j^3 a_k r_k^3 \{2\}. \end{aligned}$$

Ponieważ lewe strony powyższych równości są identyczne, więc na mocy warunku

(3) Definicji 2.4 otrzymujemy

$$\begin{aligned} x = \sum_i a_i \{r_i\} &= \sum_i a_i^3 (r_i^2 + r_i^4 + r_i^6) \{r_i\} + \sum_{i < j} [a_i r_i^3, a_j r_j^3] - \sum_{i < j} [a_i r_i, a_j r_j] + \\ &+ \sum_{i < j < k} a_i r_i^3 a_j r_j^3 a_k r_k^3 \{2\} - \sum_{i < j < k} a_i r_i a_j r_j a_k r_k \{2\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_i a_i^3(r_i^6 + r_i^4 + r_i^2)\{r_i\} + \sum_{i < j} 3a_i^2a_j\{r_i^2r_j\} + \sum_{i < j} 3a_ia_j^2\{r_iri_j^2\} + \\
&+ \sum_{i < j < k} a_ia_ja_k(r_i^3r_j^3r_k^3 - r_iri_jr_k)\{2\} = \\
&= \sum_i a_i^3((r_i^2)^3 - r_i^2 + r_i(r_i^3 - r_i) + 3r_i^2)\{r_i\} + \sum_{i < j} 3a_i^2a_j(r_iri_j\{r_i\} + r_i^3r_j\{r_i\} + r_i^6\{r_j\}) + \\
&+ \sum_{i < j} 3a_ia_j^2(r_iri_j\{r_j\} + r_iri_j^3\{r_j\} + r_j^6\{r_i\}) + \sum_{i < j < k} a_ia_ja_k((r_iri_jr_k)^3 - r_iri_jr_k)\{2\}.
\end{aligned}$$

Zauważmy, że $(r_i^2)^3 - r_i^2, r_i^3 - r_i, (r_iri_jr_k)^3 - r_iri_jr_k \in I_3(R)$.

Stąd $a_ia_ja_k((r_iri_jr_k)^3 - r_iri_jr_k) \in I_3(R)^{3m+1}$. Jeżeli $3 \in I_3(R)$, to oczywiście $3a_i^2a_j, 3a_ia_j^2$ oraz $a_i^3((r_i^2)^3 - r_i^2 + r_i(r_i^3 - r_i) + 3r_i^2)$ należą do $I_3(R)^{3m+1}$. W przeciwnym razie, jeżeli wszystkie r_i należą do $I_3(R)$, to $a_i^2a_jr_i, a_ia_j^2r_j, i a_i^3((r_i^2)^3 - r_i^2 + r_i(r_i^3 - r_i) + 3r_i^2)$ należą do $I_3(R)^{3m+1}$. Stąd wszystkie współczynniki w powyższych sumach należą do $I_3(R)^{3m+1}$. $\square$

WNIOSEK 2.8.

Niech $x = \sum_{i=1}^k a_i\{r_i\} \in \text{Ker}(P)$ i niech M oznacza podmoduł modułu $C(R)$ generowany przez $\{r_i\}, \dots, \{r_k\}$ i $\{2\}$.

Niech spełniony będzie jeden z warunków:

$$(1) \ r_1, \dots, r_k \in I_3(R) \text{ oraz } 2 \in I_3(R)$$

lub

$$(2) \ 3 \in I_3(R).$$

Wtedy $x \in \bigcap_{k=0}^{\infty} I_3(R)^m M$.

Dowód.

Jak poprzednio teza wynika stąd, że $3m + 1 > m$ dla $m \geq 0$ i z tego, że podmoduły $I_3(R)^m M$ tworzą ciąg zstępujący. $\square$

2.3.3. Zasadnicze Twierdzenie. Głównym wynikiem tego paragrafu jest następujące

Twierdzenie 2.10.

Niech $C(R) = C^{(3)}(R)$ będzie R -modułem generowanym przez elementy $\{r\}$, $r \in R$, z relacjami:

$$(1) \{rs\} = r^3\{s\} + s\{r\},$$

$$(2) 3s\{r\} - 3r\{s\} = (r - s)[r, s],$$

$$(3) [ar^3, bs^3] - [ar, bs] = 3a^2b\{r^2s\} + 3ab^2\{rs^2\},$$

$$(4) [r + r', s] = [r, s] + [r', s] + rr's\{2\}$$

dla dowolnych $a, b, r, r', s \in R$, gdzie $[r, s] = \{r + s\} - \{r\} - \{s\} = (\Delta^2\{ \})(r, s)$.

Wtedy istnieje R -izomorfizm $P : C(R) \longrightarrow I_3(R)$, taki że $P(\{r\}) = r^3 - r$ dla $r \in R$.

Dowód.

Rozważmy następujące przypadki:

Przypadek lokalny noetherowski.

Żałóżmy, że R jest pierścieniem lokalnym i noetherowskim. Wtedy mamy dwa przypadki:

przypadek 1: $I_3(R) = R$. Wtedy dzięki Lematowi 2.11 mamy $\text{Ker}(P) = 0$.

przypadek 2: $I_3(R)$ jest ideałem maksymalnym, czyli ciało ilorazowe pierścienia R ma dwa lub trzy elementy (por. Wniosek 2.1).

przypadek 2a: Jeśli ciało ilorazowe ma trzy elementy, to $3 \in I_3(R)$. Określamy podmoduł M jak we Wniosku 2.8. W tym przypadku spełniony jest warunek (2), zatem spełniona jest teza. Ponieważ M jest modulem skończenie generowanym nad lokalnym pierścieniem noetherowskim R , więc przekrój we Wniosku 2.8 jest zerowy

dzięki twierdzeniu Krulla o przekroju i w konsekwencji $x = 0$.

przypadek 2b: Załóżmy teraz, że ciało ilorazowe ma dwa elementy; są nimi $I_3(R)$ oraz $1 + I_3(R) = U(R)$, a ponadto $2 \in I_3(R)$. Dzięki relacji (2) Definicji 2.4 przy $s = 1$ otrzymujemy, że

$$3\{r\} - 3r\{1\} = (r-1)(\{r+1\} - \{r\} - \{1\}),$$

skąd $(r+2)\{r\} = (r-1)\{r+1\}$. W związku z tym jeśli $r \in U(R)$, to również $r+2 \in U(R)$, skąd $\{r\} = \frac{r-1}{r+2}\{r+1\}$, przy czym $r+1$ jest nieodwracalny. Niech $x = \sum_i a_i \{r_i\} \in \text{Ker}(P)$. Jeżeli jakieś r_i jest odwracalne, to $\{r_i\}$ przedstawiamy w postaci $\frac{r_i-1}{r_i+2}\{r_i+1\}$, co oznacza, iż możemy założyć, że wszystkie r_i w powyższej sumie są nieodwracalne, czyli należą do $I_3(R)$. Ponadto, jak zauważyliśmy powyżej $2 \in I_3(R)$. Określamy podmoduł M jak we Wniosku 2.8. W tym przypadku spełniony jest warunek (1), a więc jak poprzednio $x = 0$.

To dowodzi, że $\text{Ker}(P) = 0$, czyli P jest monomorfizmem.

Przypadek noetherowski.

Założmy, że pierścień R jest noetherowski; wtedy wszystkie jego lokalizacje są noetherowskie. Z poprzedniego przypadku i z Lematu 2.9 mamy, że P jest takim homomorfizmem, który po lokalizacji względem dowolnego ideału pierwszego jest monomorfizmem, co oznacza, że P jest monomorfizmem.

Przypadek ogólny.

Niech $x = \sum_i a_i [r_i] \in \text{Ker}(P)$. Określamy podpierścień S pierścienia R generowany przez wszystkie elementy a_i i r_i . Ponieważ S jest skończenie generowany, więc jest noetherowski, a zatem na mocy poprzedniego przypadku $P : C(S) \rightarrow S$ jest monomorfizmem. Niech $i : S \rightarrow R$ będzie włożeniem. Wtedy podobnie jak poprzednio $x = (C(i))(y)$, gdzie $y = \sum_i a_i [r_i] \in C(S)$. Ponieważ $P(y) = P(x) = 0$, więc $y = 0$ i w konsekwencji $x = 0$. To kończy dowód. $\square$

Otrzymujemy więc następujący

WNIOSEK 2.9.

Relacje generujące pomiędzy generatorami $\{r\} = r^3 - r$ ideału $I_3(R)$

są następujące:

$$(1) \{rs\} = r^3\{s\} + s\{r\},$$

$$(2) 3s\{r\} - 3r\{s\} = (r - s)(\{r + s\} - \{r\} - \{s\})$$

$$(3) \{ar^3 + bs^3\} - \{ar^3\} - \{bs^3\} - \{ar + bs\} + \{ar\} + \{bs\} = \\ = 3a^2b\{r^2s\} + 3ab^2\{rs^2\},$$

$$(4) \{r + s + t\} = \{r + s\} + \{s + t\} + \{r + t\} - \{r\} - \{s\} - \{t\} + rst\{2\}$$

dla $a, b, r, s, t \in R$.

ROZDZIAŁ 3

3-równości dla klasy Hom^5

Głównym celem tego rozdziału jest znalezienie relacji tworzących pełny zestaw 3-równości dla klasy Hom^5 . Jedną z wersji pełnego zestawu 3-równości dla klasy Hom^5 została znaleziona w pracy [2]. Podamy ją w pierwszej części rozdziału. Ponieważ metody zastosowane w pracy [2] nie pozwalają znaleźć 2-równości w drugiej części rozdziału przedstawimy inną metodę, która pozwala znaleźć pełny zestaw zarówno 3-równości, jak 2-równości.

3.1. Pełny zestaw 3-równości - pierwsza wersja

Zacytujmy główny wynik pracy [2].

TWIERDZENIE 3.1 ([2], Theorem 8).

Następujące relacje tworzą pełny zestaw 3-równości dla klasy Hom^5 :

(A1), (A2), (A) oraz

$$(B) \quad B(r, s, t) := (rx, sy, tz) - r(x, sy, tz) - s(rx, y, tz) - t(rx, sy, z) + \\ + rs(x, y, tz) + rt(x, sy, z) + st(x, sy, tz) - rst(x, y, z) = 0,$$

$$(B1) \quad B_1(r, s) := (x, ry, sz) - r(x, y, sz) - s(x, ry, z) + rs(x, y, z) - \\ - (s - s^2)(C_3(r) + [r]) = 0,$$

$$(B2) \quad B_2(r, s) := (rsx, y, z) - r(sx, y, z) - s^3(rx, y, z) + rs^3(x, y, z) - \\ - (s^2 - s^3)C_3(r) = 0,$$

$$(S) \quad S(r) := (rx, y, z) + (x, ry, z) + (x, y, rz) - (r^3 + 2r)(x, y, z) + \\ + (1 - r)[r] = 0,$$

gdzie $r, s, t \in R$, x, y, z są dowolnymi elementami z dziedziny odwzorowania,

$$\begin{aligned} C_3(r) &= 3(rx, y, z) - 3r(x, y, z) + (1 - r)(rx, x, y, z), \\ [r] &= (rx, x, y, z) + (x, ry, y, z) + (x, y, rz, z) - \\ &\quad - r^2((x, x, y, z) + (x, y, y, z) + (x, y, z, z)) - 3(r - r^2)(x, y, z), \end{aligned}$$

a (x, y, z) oraz (x, y, z, t) oznaczają wartość odpowiednio trzeciego i czwartego defektu rozważanego odwzorowania.

3.2. Pełny zestaw 3-równości - druga wersja

Znajdziemy inny pełny zestaw 3-równości dla klasy Hom^5 używając alternatywnej metody, niezależnej od wyników pracy [2]. Przypomnijmy, że problem znalezienia poszukiwanych relacji sprowadza się do wyznaczenia generatorów jądra homomorfizmu $\bar{h}^{5,3} : \bar{\Delta}^{5,3}(R) \longrightarrow \Gamma^{5,3}(R)$, określonego wzorem

$$\begin{aligned} \bar{h}^{5,3}(rx, sy, tz) &= r^3 st((3, 1, 1)) + rs^3 t((1, 3, 1)) + rst^3((1, 1, 3)) + \\ &\quad + r^2 s^2 t((2, 2, 1)) + r^2 st^2((2, 1, 2)) + rs^2 t^2((1, 2, 2)), \end{aligned} \quad (3.1)$$

gdzie $((i, j, k)) = x^{(i)}y^{(j)}z^{(k)}$, a $(rx, sy, tz) = (\Delta^3 \bar{\delta}^3)(rx, sy, tz)$.

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} \sigma &= ((3, 1, 1)) + ((1, 3, 1)) + ((1, 1, 3)) + ((2, 2, 1)) + ((2, 1, 2)) + ((1, 2, 2)), \\ \sigma_3 &= ((3, 1, 1)) + ((1, 3, 1)) + ((1, 1, 3)), \\ \sigma_2 &= ((2, 2, 1)) + ((2, 1, 2)) + ((1, 2, 2)). \end{aligned}$$

Wówczas $\bar{h}^{5,3}(x, y, z) = \sigma = \sigma_2 + \sigma_3$.

Z pracy [4] znamy następujący opis modułu $\bar{\Gamma}^{5,3}(R) = Im(\bar{h}^{5,3})$:

TWIERDZENIE 3.2 ([4], Theorem 5.9).

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^{5,3}(R) = R\sigma \oplus I_2(R)((1, 2, 2)) \oplus I_2(R)((2, 1, 2)) \oplus I_2(R)((2, 2, 1)) \oplus \\ \oplus I_3(R)((1, 3, 1)) \oplus I_3(R)((3, 1, 1)). \end{aligned}$$

Jak łatwo zauważyć, przedstawienie elementu $\bar{h}^{5,3}(rx, sy, tz)$ w tej sumie prostej jest następujące:

$$\begin{aligned} \bar{h}^{5,3}(rx, sy, tz) = rst^3\sigma + rt(s^2t - st^2)((1, 2, 2)) + st(r^2t - rt^2)((2, 1, 2)) + \\ + (r^2s^2t - rst^3)((2, 2, 1)) + s(r^3t - rt^3)((3, 1, 1)) + r(s^3t - st^3)((1, 3, 1)), \quad (3.2) \end{aligned}$$

gdzie, jak łatwo zauważyć, $r^2s^2t - rst^3 = rs(t+1)(t-t^2) - t(rs - (rs)^2) \in I_2(R)$.

Znajdziemy elementy modułu $\bar{\Delta}^{5,3}(R) = R\{(rx, sy, tz), r, s, t \in R\} \subset \bar{\Delta}^5(R^3)$,

których obrazami poprzez $\bar{h}^{5,3}$ są składniki powyższej sumy.

Rozważmy następujące elementy modułu $\bar{\Delta}^{5,3}(R)$:

$$\begin{aligned} C_3(r) &= 3(rx, y, z) - 3r(x, y, z) + (1-r)(rx, x, y, z), \\ [r] &= (rx, x, y, z) + (x, ry, y, z) + (x, y, rz, z) - r^2((x, x, y, z) + (x, y, y, z) + \\ &+ (x, y, z, z)) - 3(r - r^2)(x, y, z) \end{aligned}$$

dla $r, s, t \in R$.

Wprowadzamy następujące oznaczenia:

$$U_1(r) = C_3(r) + [r] = 3(rx, y, z) - 3r(x, y, z) + (1-r)(rx, x, y, z) + [r]$$

oraz symetrycznie

$$U_2(r) = 3(x, ry, z) - 3r(x, y, z) + (1-r)(x, ry, y, z) + [r],$$

$$U_3(r) = 3(x, y, rz) - 3r(x, y, z) + (1-r)(x, y, rz, z) + [r],$$

a także

$$V_1(r) = 2(rx, y, z) - 2r(x, y, z) + (1-r)(rx, x, y, z)$$

oraz symetrycznie

$$V_2(r) = 2(x, ry, z) - 2r(x, y, z) + (1 - r)(x, ry, y, z),$$

$$V_3(r) = 2(x, y, rz) - 2r(x, y, z) + (1 - r)(x, y, rz, z).$$

LEMAT 3.1.

Dla każdego $r \in R$ mamy

$$\bar{h}^{5,3}(rx, x, y, z) = (3r^2 + 3r)((3, 1, 1)) + 2r(((2, 1, 2)) + ((2, 2, 1))),$$

$$\bar{h}^{5,3}(x, ry, y, z) = (3r^2 + 3r)((1, 3, 1)) + 2r(((1, 2, 2)) + ((2, 2, 1))),$$

$$\bar{h}^{5,3}(x, y, rz, z) = (3r^2 + 3r)((1, 1, 3)) + 2r(((1, 2, 2)) + ((2, 1, 2))),$$

skąd

$$\bar{h}^{5,3}((rx, x, y, z) + (x, ry, y, z) + (x, y, rz, z)) = (3r^2 + 3r)\sigma_3 + 4r\sigma_2.$$

DOWÓD.

Wystarczy udowodnić pierwszą równość.

Ponieważ $(rx, x, y, z) = ((r + 1)x, y, z) - (rx, y, z) - (x, y, z)$, więc

$$\begin{aligned} \bar{h}^{5,3}((rx, x, y, z)) &= (r + 1)^3((3, 1, 1)) + (r + 1)((1, 3, 1)) + (r + 1)((1, 1, 3)) + \\ &+ (r + 1)^2((2, 2, 1)) + (r + 1)^2((2, 1, 2)) + (r + 1)((1, 2, 2)) - \\ &- (r^3((3, 1, 1)) + r((1, 3, 1)) + r((1, 1, 3)) + r^2((2, 2, 1)) + r^2((2, 1, 2)) + r((1, 2, 2))) - \\ &- (((3, 1, 1)) + ((1, 3, 1)) + ((1, 1, 3)) + ((2, 2, 1)) + ((2, 1, 2)) + ((1, 2, 2))) = \\ &= (3r^2 + 3r)((3, 1, 1)) + 2r(((2, 1, 2)) + ((2, 2, 1))). \end{aligned} \quad \square$$

LEMAT 3.2.

Dla każdego $r \in R$ mamy

$$\bar{h}^{5,3}([r]) = (r - r^2)((1, 2, 2)) + ((2, 1, 2)) + ((2, 2, 1)).$$

Dowód.

Na mocy Lematu 3.1 otrzymujemy, że

$$\begin{aligned}\bar{h}^{5,3}([r]) &= (3r^2 + 3r)\sigma_3 + 4r\sigma_2 - r^2(6\sigma_3 + 4\sigma_2) - 3(r - r^2)(\sigma_2 + \sigma_3) = \\ &= (r - r^2)\sigma_2 = (r - r^2)((1, 2, 2)) + ((2, 1, 2)) + ((2, 2, 1))).\end{aligned}\quad \square$$

LEMAT 3.3.

Dla każdego $r \in R$ mamy

$$\bar{h}^{5,3}(C_3(r)) = (r^2 - r)((2, 1, 2)) + ((2, 2, 1))).$$

Dowód.

Na mocy Lematu 3.1 otrzymujemy, że

$$\begin{aligned}\bar{h}^{5,3}(C_3(r)) &= 3(r^3((3, 1, 1)) + r((1, 3, 1)) + r((1, 1, 3)) + \\ &+ r^2((2, 2, 1)) + r^2((2, 1, 2)) + r((1, 2, 2))) - 3r\sigma + \\ &+ (1 - r)((3r^2 + 3r)((3, 1, 1)) + 2r(((2, 1, 2)) + ((2, 2, 1)))) = \\ &= 3r^3((3, 1, 1)) + 3r((1, 3, 1)) + 3r((1, 1, 3)) + \\ &+ 3r^2((2, 2, 1)) + 3r^2((2, 1, 2)) + 3r((1, 2, 2)) - 3r\sigma + \\ &+ (3r - 3r^3)((3, 1, 1)) + (2r - 2r^2)((2, 1, 2)) + ((2, 2, 1))) = \\ &= (r^2 - r)((2, 1, 2)) + ((2, 2, 1))).\end{aligned}\quad \square$$

WNIOSEK 3.1.

Dla każdego $r \in R$ zachodzą następujące równości:

$$\bar{h}^{5,3}(U_1(r)) = (r - r^2)((1, 2, 2)),$$

$$\bar{h}^{5,3}(U_2(r)) = (r - r^2)((2, 1, 2)),$$

$$\bar{h}^{5,3}(U_3(r)) = (r - r^2)((2, 2, 1)).$$

LEMAT 3.4.

Dla każdego $r \in R$ zachodzą następujące równości:

$$\bar{h}^{5,3}(V_1(r)) = (r - r^3)((3, 1, 1)),$$

$$\bar{h}^{5,3}(V_2(r)) = (r - r^3)((1, 3, 1)),$$

$$\bar{h}^{5,3}(V_3(r)) = (r - r^3)((1, 1, 3)).$$

DOWÓD.

Na mocy Lematu 3.1 mamy

$$\begin{aligned} \bar{h}^{5,3}(V_1(r)) &= 2(r^3((3, 1, 1)) + r((1, 3, 1)) + r((1, 1, 3)) + \\ &+ r^2((2, 2, 1)) + r^2((2, 1, 2)) + r((1, 2, 2))) \\ &- 2r(((3, 1, 1)) + ((1, 3, 1)) + ((1, 1, 3)) + ((2, 2, 1)) + ((2, 1, 2)) + ((1, 2, 2))) + \\ &+ (1 - r)((3r^2 + 3r)((3, 1, 1)) + 2r(((2, 1, 2)) + ((2, 2, 1)))) = \\ &= (2r^3 - 2r + 3r^2 + 3r - 3r^3 - 3r^2)((3, 1, 1)) + \\ &+ (2r^2 - 2r + 2r - 2r^2)((2, 1, 2)) + ((2, 2, 1))) = (r - r^3)((3, 1, 1)). \end{aligned}$$

Dzięki symetrii otrzymujemy pozostałe wersje. □

Niech

$$\begin{aligned} D(r, s, t) &= (rx, sy, tz) - r s t^3(x, y, z) - r t(s U_1(t) - t U_1(s)) - s t(r U_2(t) - t U_2(r)) - \\ &- (r s(t + 1) U_3(t) - t U_3(r s)) - s(r V_1(t) - t V_1(r)) - r(s V_2(t) - t V_2(s)). \end{aligned}$$

WNIOSEK 3.2.

$$\bar{h}^{5,3}(D(r, s, t)) = 0.$$

DOWÓD.

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \bar{h}^{5,3}(s U_1(t) - t U_1(s)) &= s(t - t^2)((1, 2, 2)) - t(s - s^2)((1, 2, 2)) = (s^2 t - s t^2)((1, 2, 2)), \\ \bar{h}^{5,3}(r U_2(t) - t U_2(r)) &= r(t - t^2)((2, 1, 2)) - t(r - r^2)((2, 1, 2)) = (r^2 t - r t^2)((2, 1, 2)), \\ \bar{h}^{5,3}(r s(t + 1) U_3(t) - t U_3(r s)) &= r s(t + 1)(t - t^2)((2, 2, 1)) - t(r s - (r s)^2)((2, 2, 1)) = \end{aligned}$$

$$= (r^2s^2t - rst^3)((2, 2, 1)),$$

$$\bar{h}^{5,3}(rV_1(t) - tV_1(r)) = r(t - t^3)((3, 1, 1)) - t(r - r^3)((3, 1, 1)) = (r^3t - rt^3)((3, 1, 1)),$$

$$\bar{h}^{5,3}(sV_2(t) - tV_2(s)) = s(t - t^3)((1, 3, 1)) - t(s - s^3)((1, 3, 1)) = (s^3t - st^3)((1, 3, 1)).$$

Porównując ze wzorem (3.2) otrzymujemy tezę. $\square$

Przedstawiając dowolny generator (rx, sy, tz) przy pomocy $D(r, s, t)$ oraz elementów typu $U_1(r)$, $U_2(r)$, $U_3(r)$, $V_1(r)$, $V_2(r)$, otrzymujemy następujący rozkład:

WNIOSEK 3.3.

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}^{5,3}(R) &= D(R) + R(x, y, z) + \\ &+ U_1(R) + U_2(R) + U_3(R) + V_1(R) + V_2(R), \end{aligned}$$

gdzie $D(R) = R\{D(r, s, t); r, s, t \in R\}$, $U_i(R) = R\{U_i(r); r \in R\}$ dla $i = 1, 2, 3$ oraz $V_i(R) = R\{V_i(r); r \in R\}$ dla $i = 1, 2$.

TWIERDZENIE 3.3.

$Ker(\bar{h}^{5,3}) = K$, gdzie K jest podmodułem generowanym przez następujące elementy:

- (1) $D(r, s, t)$,
- (2) $U_i(r + s) - U_i(r) - U_i(s) - rsU_i(2)$, $i = 1, 2, 3$,
- (3) $U_i(rs) - r^2U_i(s) - sU_i(r)$, $i = 1, 2, 3$,
- (4) $V_i(rs) - r^3V_i(s) - sV_i(r)$, $i = 1, 2$,
- (5) $3sV_i(r) - 3rV_i(s) - (r - s)(V_i(r + s) - V_i(r) - V_i(s))$, $i = 1, 2$,
- (6) $V_i(ar^3 + bs^3) - V_i(ar^3) - V_i(bs^3) - V_i(ar + bs) + V_i(ar) + V_i(bs) -$
 $- 3a^2bV_i(r^2s) - 3ab^2V_i(rs^2)$, $i = 1, 2$,
- (7) $V_i(r + s + t) - V_i(r + s) - V_i(s + t) - V_i(r + t) +$
 $+ V_i(r) + V_i(s) + V_i(t) - rstV_i(2)$, $i = 1, 2$,

gdzie $r, s, t \in R$.

DOWÓD.

Zauważmy, że $K \subset Ker(\bar{h}^{5,3})$. Istotnie, dzięki Wnioskowi 3.2 wiemy, że $D(r, s, t) \in Ker(\bar{h}^{5,3})$. Dzięki Przykładowi 2.1 wiemy, że wartości $\bar{h}^{5,3}$ na elementach (2)-(3) są zerowe, natomiast dzięki Przykładowi 2.2 wiemy, że wartości $\bar{h}^{5,3}$ na elementach (4)-(7) są zerowe. Zatem $\bar{h}^{5,3}$ indukuje homomorfizm $h' : \bar{\Delta}^{5,3}(R)/K \longrightarrow \bar{\Gamma}^{5,3}(R) \subset \Gamma^{5,3}(R)$. Oznaczmy przez $\overline{U_i(R)}$ (odpowiednio $\overline{V_i(R)}$) obraz $U_i(R)$ (odpowiednio $V_i(R)$) przez homomorfizm naturalny. Wówczas $h'(\overline{U_1(R)}) = I_2(R)((1, 2, 2))$ i analogicznie $h'(\overline{U_2(R)}) = I_2(R)((2, 1, 2))$, $h'(\overline{U_3(R)}) = I_2(R)((2, 2, 1))$, $h'(\overline{V_1(R)}) = I_3(R)((3, 1, 1))$, $h'(\overline{V_2(R)}) = I_3(R)((1, 3, 1))$. Pokażemy, że ograniczenia h' do tych podmodułów są monomorfizmami. Dla przykładu pokażemy, że $h'|_{\overline{U_1(R)}}$ jest monomorfizmem. Ponieważ $((1, 2, 2))$ jest elementem bazy modułu $\Gamma^{5,3}(R)$, więc możemy rozważyć złożenie $h'' : \overline{U_1(R)} \longrightarrow I_2(R)$ homomorfizmu $h'|_{\overline{U_1(R)}}$ z izomorfizmem $I_2(R)((1, 2, 2)) \approx I_2(R)$, przeciwnym do rzutowania na $I_2(R)$, określone na generatorach wzorem $h''(\overline{U_1(r)}) = r^2 - r$. Rozważmy odwzorowanie $\overline{U_1} : R \longrightarrow \overline{U_1(R)}$ określone wzorem $\overline{U_1}(r) = \overline{U_1(r)}$. Ponieważ elementy $\overline{U_1(r)}$ spełniają odpowiednie relacje dzięki (2)-(3), więc $\overline{U_1}$ jest C -funkcją. Z własności uniwersalności (Twierdzenie 2.3) istnieje więc homomorfizm $i : C(R) \longrightarrow \overline{U_1(R)}$ określony wzorem $i(c(r)) = \overline{U_1(r)}$. Ale dzięki Twierdzeniu 2.2 istnieje izomorfizm $P : C(R) \longrightarrow I_2(R)$ określony wzorem $P([r]) = r^2 - r$, a więc taki, że $P = h'' \circ i$. Ponieważ P jest izomorfizmem oraz i jest epimorfizmem, więc h'' jest monomorfizmem, a w konsekwencji $h'|_{\overline{U_1(R)}}$ jest monomorfizmem. Analogicznie pokazujemy, że pozostałe ograniczenia są monomorfizmami, korzystając z relacji pochodzących z pozostałych generatorów modułu K ((2)-(7)). Niech teraz $x \in Ker(\bar{h}^{5,3})$, a więc $\bar{x} \in Ker(h')$. Korzystając z przedstawienia we Wniosku 3.3 i tego, że $D(R) \subset K$, mamy $\bar{x} = \overline{r(x, y, z)} + \overline{u_1} + \overline{u_2} + \overline{u_3} + \overline{v_1} + \overline{v_2}$,

gdzie $r \in R$, $u_i \in U_i(R)$, $i = 1, 2, 3$ oraz $v_i \in V_i(R)$, $i = 1, 2$. Stąd

$$0 = h'(\bar{x}) = r\sigma + h'(\bar{u}_1) + h'(\bar{u}_2) + h'(\bar{u}_3) + h'(\bar{v}_1) + h'(\bar{v}_2).$$

Ponieważ każdy składnik sumy po prawej stronie należy do innego składnika prostego modułu $\bar{\Gamma}^{5,3}$, więc $h'(\bar{u}_1) = h'(\bar{u}_2) = h'(\bar{u}_3) = h'(\bar{v}_1) = h'(\bar{v}_2) = 0$. Mamy także $r\sigma = 0$, a w konsekwencji $r = 0$. Korzystając z tego, że odpowiednie ograniczenia homomorfizmu h' są monomorfizmami otrzymujemy, że $\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = \bar{u}_3 = \bar{v}_1 = \bar{v}_2 = 0$, a zatem $\bar{x} = 0$, skąd $x \in K$. □

Pomijając symetryczne wersje otrzymujemy następujące

TWIERDZENIE 3.4.

Następujące relacje tworzą pełny zestaw 3-równości dla klasy Hom^5 :

(A1), (A2), (A) oraz

$$(1) D(r, s, t) = 0,$$

$$(2) U(r + s) = U(r) + U(s) + rsU(2),$$

$$(3) U(rs) = r^2U(s) + sU(r),$$

$$(4) V(rs) = r^3V(s) + sV(r),$$

$$(5) 3sV(r) - 3rV(s) = (r - s)(V(r + s) - V(r) - V(s)),$$

$$(6) V(ar^3 + bs^3) - V(ar^3) - V(bs^3) - V(ar + bs) + V(ar) + V(bs) = \\ = 3a^2bV(r^2s) - 3ab^2V(rs^2),$$

$$(7) V(r + s + t) - V(r + s) - V(s + t) - V(r + t) + V(r) + V(s) + V(t) - rstV(2) = 0,$$

gdzie $r, s, t \in R$, x, y, z są dowolnymi elementami z dziedziny odwzorowania,

$$U(r) = 3(rx, y, z) - 3r(x, y, z) + (1 - r)(rx, x, y, z) + \\ + (rx, x, y, z) + (x, ry, y, z) + (x, y, rz, z) - r^2((x, x, y, z) + (x, y, y, z) + \\ + (x, y, z, z)) - 3(r - r^2)(x, y, z),$$

$$V(r) = 2(rx, y, z) - 2r(x, y, z) + (1 - r)(rx, x, y, z),$$

$$D(r, s, t) = (rx, sy, tz) - rst^3(x, y, z) - rt(sU_1(t) - tU_1(s)) - st(rU_2(t) - tU_2(r)) - \\ - (rs(t+1)U_3(t) - tU_3(rs)) - s(rV_1(t) - tV_1(r)) - r(sV_2(t) - tV_2(s)),$$

przy czym $U_1(R) = U(R)$, $V_1(R) = V(R)$, a $U_2(R)$, $U_3(R)$ (odpowiednio $V_2(R)$) są symetrycznymi wersjami $U(R)$ (odpowiednio $V(R)$), a (x, y, z) oraz (x, y, z, t) oznaczają wartość odpowiednio trzeciego i czwartego defektu rozważanego odwzorowania.

3.3. Modyfikacja drugiej wersji

Pokażemy teraz, że w Twierdzeniu 3.4 relację (2) można opuścić, a (3) zmodyfikować. Zastosujemy tu pewne fakty pochodzące z [2]. Niech $P : \bar{\Delta}^{5,3}(R) \rightarrow R$ będzie różnicą złożenia homomorfizmu $\bar{h}^{5,3}$ z odwzorowaniami współrzędnych przy elementach bazy $((3, 1, 1)$ i $((1, 2, 2))$. Jest to więc homomorfizm określony wzorem $P(rx, sy, tz) = r^3st - rs^2t^2$. Nietrudno sprawdzić (zob. [2], Lemma 1, Corollary 1), że wiemy, że $P([r]) = r^2 - r$ dla każdego $r \in R$.

TWIERDZENIE 3.5 ([2], Theorem 2).

Ograniczenie homomorfizmu $P : \bar{\Delta}^{5,3}(R) \rightarrow R$ do podmodułu $[R] = R\{[r]; r \in R\}$ modułu $\bar{\Delta}^{5,3}(R)$ ustala izomorfizm $[R]$ z ideałem $I(R) = (r^2 - r; r \in R)$.

DOWÓD.

Oczywiście ograniczenie P do $[R]$ jest epimorfizmem. Pozostaje więc udowodnić, że jest monomorfizmem. Załóżmy, że $\sum_i a_i[r_i] \in \text{Ker}(P)$ dla pewnych $a_i, r_i \in R$, a zatem $\sum_i a_i(r_i^2 - r_i) = 0$. Wobec tego $\sum_i a_i r_i^2 = \sum_i a_i r_i = s$. Rozważmy element

$$u = \sum_i a_i(r_i x_1, x_2, x_3, x_4) \in \bar{\Delta}^{5,4}(R),$$

gdzie $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ jest bazą standardową R^4 . Ponieważ $\bar{h}^{5,4}$ jest monomorfizmem (por. Rozdział 1) oraz

$$\bar{h}^{5,4}(u) = \sum_i a_i(r_i^2 x_1^{(2)} x_2 x_3 x_4 + r_i x_1 x_2^{(2)} x_3 x_4 + r_i x_1 x_2 x_3^{(2)} x_4 + r_i x_1 x_2 x_3 x_4^{(2)}) =$$

$$= s(x_1^{(2)} x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2^{(2)} x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3^{(2)} x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4^{(2)}) = \bar{h}^{5,4}(s(x_1, x_2, x_3, x_4)),$$

więc $u = s(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Przejdźmy teraz do modułu $\bar{\Delta}^{5,3}(R)$ przez podstawienie

$x_1, x_4 \mapsto x, x_2 \mapsto y, x_3 \mapsto z$. Dokładniej mówiąc, zastosujmy homomorfizm

$\bar{\Delta}^5(f) : \bar{\Delta}^5(R^4) \longrightarrow \bar{\Delta}^5(R^3)$, gdzie $f : R^4 \longrightarrow R^3$ jest homomorfizmem określonym

na bazie jak powyżej. Z równości

$$\sum_i a_i(r_i x_1, x_2, x_3, x_4) = s(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

otrzymujemy

$$\sum_i a_i(r_i x, x, y, z) = s(x, x, y, z).$$

Dzięki symetrii otrzymujemy również

$$\sum_i a_i(x, r_i y, y, z) = s(x, y, y, z),$$

$$\sum_i a_i(x, y, r_i z, z) = s(x, y, z, z).$$

Stąd

$$\begin{aligned} \sum_i a_i[r_i] &= \sum_i a_i(r_i x, x, y, z) + \sum_i a_i(r_i x, y, y, z) + \sum_i a_i(x, y, r_i z, z) - \\ &\quad - \sum_i a_i r_i^2(x, x, y, z) - \sum_i a_i r_i^2(x, y, y, z) - \sum_i a_i r_i^2(x, y, z, z) - \\ &\quad - 3 \sum_i a_i(r_i - r_i^2)(x, y, z) = \\ &= s(x, x, y, z) + s(x, y, y, z) + s(x, y, z, z) - \\ &\quad - s(x, x, y, z) - s(x, y, y, z) - s(x, y, z, z) = 0. \end{aligned}$$

□

Z powyższego twierdzenia wynika, że elementy typu $[r]$ spełniają założenia

Twierdzenia 2.2, otrzymujemy więc

WNIOSEK 3.4 ([2], Corollary 2).

Dla dowolnych $r, s \in R$ mamy

$$(1) \quad [r + s] = [r] + [s] + rs[2],$$

$$(2) \quad [rs] = r[s] + s^2[r],$$

$$(3) \quad (r^2 - r)[s] = (s^2 - s)[r],$$

$$(4) \quad 2[r] = (r^2 - r)[2], \quad [2r] = (2r^2 - r)[2],$$

$$(5) \quad [r] = [1 - r], \quad [0] = [1] = 0, \quad [2] = [-1],$$

$$(6) \quad \text{jeżeli } r^2 - r = 2s, \text{ to } [r] = s[2],$$

$$(7) \quad \text{jeżeli } s \text{ jest odwracalne, to } [s^{-1}] = -s^{-3}[s].$$

Dzięki uniwersalności powyższe równości zachodzą również dla dowolnego regularnego 5-odwzorowania f . W dalszym ciągu również zakładamy, że f jest dowolnym regularnym 5-odwzorowaniem, $() = \Delta^3 f$ oraz x, y, z są dowolnymi elementami z dziedziny f .

LEMAT 3.5 ([2], Lemma 6).

Dla dowolnych $r, s \in R$ mamy

$$(1) \quad 2(rx, sx, y, z) = 2rs(x, x, y, z) + (rs^2 + r^2s - 2rs)(x, x, x, y, z),$$

$$(2) \quad C_3(2) = (x, x, y, z) - (x, x, x, y, z),$$

$$(3) \quad (-rx, y, z) + (rx, y, z) = r^2 C_3(2),$$

$$(4) \quad B_2(r, -1) = (r^2 - r)C_3(2) - 2C_3(r).$$

DOWÓD.

(1) Zauważmy, że na mocy Twierdzenia 1.1 (5), przy $r = 2$, mamy

$$2(sx, x, y, z) = (s^2 - s)(2x, x, y, z) + (4s - 2s^2)(x, x, y, z).$$

Stąd i dzięki regularności (własność (A)) otrzymujemy

$$\begin{aligned} 2(rx, sx, y, z) &= 2(r(x, sx, y, z) + s(rx, x, y, z) - rs(x, x, y, z)) = \\ &= r((s^2 - s)(2x, x, y, z) + (4s - 2s^2)(x, x, y, z)) + \\ &+ s((r^2 - r)(2x, x, y, z) + (4r - 2r^2)(x, x, y, z)) - 2rs(x, x, y, z) = \\ &= (rs^2 + r^2s - 2rs)(2x, x, y, z) + (6rs - 2rs^2 - 2r^2s)(x, x, y, z) = \\ &= (rs^2 + r^2s - 2rs)(x, x, x, y, z) + (2rs^2 + 2r^2s - 4rs)(x, x, y, z) + \\ &+ (6rs - 2rs^2 - 2r^2s)(x, x, y, z) = (rs^2 + r^2s - 2rs)(x, x, x, y, z) + 2rs(x, x, y, z). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad C_3(2) &= 3(2x, y, z) - 3 \cdot 2(x, y, z) - (2x, x, y, z) = \\
&= 3(x, x, y, z) - (2(x, x, y, z) + (x, x, x, y, z)) = (x, x, y, z) - (x, x, x, y, z).
\end{aligned}$$

(3) Dzięki (A), (A2), (1) oraz (2) obliczamy, że

$$\begin{aligned}
(-rx, y, z) + (rx, y, z) &= -(-rx, rx, y, z) = (rx, rx, y, z) + (-rx, rx, rx, y, z) = \\
&= 2r(rx, x, y, z) - r^2(x, x, y, z) - r^3(x, x, x, y, z) = \\
&= 2r^2(x, x, y, z) + (r^3 - r^2)(x, x, x, y, z) - r^2(x, x, y, z) - r^3(x, x, x, y, z) = \\
&= r^2((x, x, y, z) - (x, x, x, y, z)) = r^2 C_3(2).
\end{aligned}$$

(4) Dzięki (3) otrzymujemy, że

$$(-rx, y, z) - r(-x, y, z) + (rx, y, z) - r(x, y, z) = (r^2 - r)C_3(2).$$

Zatem

$$\begin{aligned}
B_2(r, -1) &= (-rx, y, z) - r(-x, y, z) + (rx, y, z) - r(x, y, z) - 2C_3(r) = \\
&= (r^2 - r)C_3(2) - 2C_3(r).
\end{aligned}$$

□

TWIERDZENIE 3.6 ([2], Proposition 1).

Dla dowolnych $r, s \in R$ mamy

$$(1) \quad C_3(r + s) = C_3(r) + C_3(s) + rsC_3(2),$$

$$(2) \quad C_3(rs) - rC_3(s) - s^2C_3(r) = 3B_2(r, s) - (s^2 - s^3)B_2(r, -1),$$

gdzie $B_2(r, s)$ zostało zdefiniowane w Twierdzeniu 3.1.

DOWÓD.

(1) Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
C_3(r + s) - C_3(r) - C_3(s) &= \\
&= 3((r + s)x, y, z) - 3(r + s)(x, y, z) + (1 - (r + s))((r + s)x, x, y, z) - \\
&- 3(rx, y, z) + 3r(x, y, z) - (1 - r)(rx, x, y, z) - \\
&- 3(sx, y, z) + 3s(x, y, z) - (1 - s)(sx, x, y, z) = \\
&= 3(rx, sx, y, z) + (1 - (r + s))((rx, x, y, z) + (sx, x, y, z) + (rx, sx, x, y, z)) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (1 - r)(rx, x, y, z) - (1 - s)(sx, x, y, z) = \\
& = 3(rx, sx, y, z) - r(sx, x, y, z) - s(rx, x, y, z) + (1 - r - s)(rx, sx, x, y, z).
\end{aligned}$$

Na mocy (A2), Lematu 3.5 i (A) ostatnie wyrażenie jest równe

$$\begin{aligned}
& 2(rx, sx, y, z) + ((rx, sx, y, z) - r(sx, x, y, z) - s(rx, x, y, z)) + \\
& + (rs - r^2s - rs^2)(x, x, x, y, z) = \\
& = 2rs(x, x, y, z) + (rs^2 + r^2s - 2rs)(x, x, x, y, z) - rs(x, x, y, z) + \\
& + (rs - r^2s - rs^2)(x, x, x, y, z) = \\
& = rs(x, x, y, z) - rs(x, x, x, y, z) = rsC_3(2).
\end{aligned}$$

(2) Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
& C_3(rs) - rC_3(s) - s^3C_3(r) - 3(B_2(r, s) + (s^2 - s^3)C_3(r)) = \\
& = 3(rsx, y, z) - 3rs(x, y, z) + (1 - rs)(rsx, x, y, z) - \\
& - r(3(sx, y, z) - 3s(x, y, z) + (1 - s)(sx, x, y, z)) + \\
& - s^3(3(rx, y, z) - 3r(x, y, z) + (1 - r)(rx, x, y, z)) - \\
& - 3((rsx, y, z) - r(sx, y, z) - s^3(rx, y, z) + rs^3(x, y, z)) = \\
& = (1 - rs)(rsx, x, y, z) - r(1 - s)(sx, x, y, z) - (1 - r)s^3(rx, x, y, z).
\end{aligned}$$

Dzięki regularności (Twierdzenie 1.1) (3) i (5), ostatnie wyrażenie jest równe

$$\begin{aligned}
& (1 - rs)(r(sx, x, y, z) + s^2(rx, xy, z) - rs^2(x, x, y, z)) + \\
& + (rs - r)(sx, x, y, z) + (rs^3 - s^3)(rx, x, y, z) = \\
& = s(r - r^2)(sx, x, y, z) + (s^2 - s^3)(rx, x, y, z) - (1 - rs)rs^2(x, x, y, z) = \\
& = s((s - s^2)(rx, x, y, z) + (rs^2 - r^2s)(x, x, y, z)) + (s^2 - s^3)(rx, x, y, z) + \\
& + (r^2s^3 - rs^2)(x, x, y, z) = \\
& = 2(s^2 - s^3)(rx, x, y, z) - (s^2 - s^3)(r + r^2)(x, x, y, z).
\end{aligned}$$

Stosując Lemat 3.5 (1) i (2) otrzymujemy, że ostatni element jest równy

$$\begin{aligned}
& (s^2 - s^3)(2r(x, x, y, z) + (r^2 - r)(x, x, x, y, z)) - (s^2 - s^3)(r + r^2)(x, x, y, z) = \\
& = (s^2 - s^3)(r - r^2)((x, x, y, z) - (x, x, x, y, z)) = (s^2 - s^3)(r - r^2)C_3(2).
\end{aligned}$$

Ostatecznie, dzięki Lematowi 3.5 (4) otrzymujemy, że

$$\begin{aligned}
 & C_3(rs) - rC_3(s) - s^2C_3(r) = \\
 & = 3(B_2(r, s) + (s^2 - s^3)C_3(r)) - (s^2 - s^3)C_3(r) - (s^2 - s^3)(r^2 - r)C_3(2) = \\
 & = 3((B_2(r, s) + (s^2 - s^3)C_3(r)) - (s^2 - s^3)C_3(r)) - \\
 & - (s^2 - s^3)(B_2(r, -1) + 2C_3(r) - 2C_3(r)) = \\
 & = 3B_2(r, s) - (s^2 - s^3)B_2(r, -1).
 \end{aligned}$$

□

WNIOSEK 3.5.

Dla dowolnych $r, s \in R$ mamy

$$(1) \quad U(r + s) - U(r) - U(s) - rsU(2) = 0,$$

$$(2) \quad U(rs) - r^2U(s) - sU(r) = 3B_2(r, s) - (s^2 - s^3)B_2(r, -1),$$

Oznacza to, że główny wynik możemy zapisać jako następujące

TWIERDZENIE 3.7.

Następujące relacje tworzą pełny zestaw 3-równości dla klasy Hom^5 :

(A1), (A2), (A) oraz

$$(1) \quad D(r, s, t) = 0,$$

$$(2) \quad 3B_2(r, s) - (s^2 - s^3)B_2(r, -1) = 0,$$

$$(3) \quad V(rs) = r^3V(s) + sV(r),$$

$$(4) \quad 3sV(r) - 3rV(s) = (r - s)(V(r + s) - V(r) - V(s)),$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & V(ar^3 + bs^3) - V(ar^3) - V(bs^3) - V(ar + bs) + V(ar) + V(bs) = \\
 & = 3a^2bV(r^2s) + 3ab^2V(rs^2) = 0,
 \end{aligned}$$

$$(6) \quad V(r + s + t) - V(r + s) - V(s + t) - V(r + t) + V(r) + V(s) + V(t) - rstV(2) = 0,$$

gdzie $r, s, t \in R$, x, y, z są dowolnymi elementami z dziedziny odwzorowania,

przy czym $D(r, s, t)$ zostało zdefiniowane w Twierdzeniu 3.4,

$$B_2(r, s) = (rsx, y, z) - r(sx, y, z) - s^3(rx, y, z) + rs^3(x, y, z) - \\ - (s^2 - s^3)(3(rx, y, z) - 3r(x, y, z) + (1 - r)(rx, x, y, z)),$$

$$V(r) = 2(rx, y, z) - 2r(x, y, z) + (1 - r)(rx, x, y, z).$$

ROZDZIAŁ 4

2-równości dla klasy Hom^5

Głównym celem tego rozdziału jest znalezienie relacji tworzących pełny zestaw 2-równości dla klasy Hom^5 . Użyjemy tych samych metod, co w poprzednim rozdziale. Tym razem problem znalezienia poszukiwanych relacji sprowadza się do wyznaczenia generatorów jądra homomorfizmu $\bar{h}^{5,2} : \bar{\Delta}^{5,2}(R) \longrightarrow \Gamma^{5,2}(R)$, określonego wzorem

$$\bar{h}^{5,2}(rx, sy) = r^4s((4, 1)) + r^3s^2((3, 2)) + r^2s^3((2, 3)) + rs^4((1, 4)), \quad (4.1)$$

gdzie $((i, j)) = x^{(i)}y^{(j)}$, a $(rx, sy) = (\Delta^2\bar{\delta}^3)(rx, sy)$.

Z pracy [4] znamy następujący opis modułu $\bar{\Gamma}^{5,2}(R) = Im(\bar{h}^{5,2})$:

TWIERDZENIE 4.1 ([4], Theorem 5.9).

$$\bar{\Gamma}^{5,2}(R) = R\sigma \oplus I_3(R)((3, 2)) \oplus I_3(R)((2, 3)) \oplus I_4(R)((4, 1) + ((2, 3))).$$

Jak łatwo zauważyć przedstawienie elementu $\bar{h}^{5,2}(rx, sy)$ w tej sumie prostej jest następujące:

$$\begin{aligned} \bar{h}^{5,2}(rx, sy) = & rs^4\sigma + s(r^3s - rs^3)((3, 2)) + r(rs^3 - r^3s)((2, 3)) + \\ & +(r^4s - rs^4)((2, 3) + ((4, 1))), \end{aligned} \quad (4.2)$$

gdzie σ oznacza sumę wszystkich elementów bazowych modułu $\Gamma^{5,2}(R)$, to znaczy

$$\sigma = ((4, 1)) + ((3, 2)) + ((2, 3)) + ((1, 4)).$$

Jak poprzednio potrzebujemy elementów, których obrazy są odpowiednimi wielokrotnościami elementów bazowych. Dokładniej, szukamy elementów, na których wartości $\bar{h}^{5,2}$ wynoszą: $(r^3 - r)((3, 2))$, $(r^3 - r)((2, 3))$ oraz $(r^4 - r)((2, 3) + ((4, 1)))$.

Przypomnijmy, że dla każdego $r \in R$ mamy następujące elementy $\bar{\Delta}^{5,3}(R)$:

$$[r] = (rx, x, y, z) + (x, ry, y, z) + (x, y, rz, z) - r^2((x, x, y, z) + (x, y, y, z) + (x, y, z, z)) - 3(r - r^2)(x, y, z),$$

$$C_3(r) = 3(rx, y, z) - 3r(x, y, z) + (1 - r)(rx, x, y, z),$$

$$U_1(r) = C_3(r) + [r].$$

Rozważmy następujący diagram:

$$\begin{array}{ccc} \bar{\Delta}^{5,3}(R) \subset \bar{\Delta}^5(Rx \oplus Ry \oplus Rz) & \xrightarrow{\bar{h}^5} & \Gamma^5(Rx \oplus Ry \oplus Rz) \\ & \downarrow \bar{\Delta}^5(f) & \downarrow \Gamma^5(f) \\ \bar{\Delta}^{5,2}(R) \subset \bar{\Delta}^5(Rx \oplus Ry) & \xrightarrow{\bar{h}^5} & \Gamma^5(Rx \oplus Ry) \end{array}$$

gdzie homomorfizm $f : Rx \oplus Ry \oplus Rz \rightarrow Rx \oplus Ry$ jest określony na elementach bazy w następujący sposób: $f(x) = x$, $f(y) = x$, $f(z) = y$. Powyższy diagram jest przemienny, gdyż $\bar{h}^5$ jest przekształceniem funktorów.

Oznaczmy $W'_1(r) = (\bar{\Delta}^5(f))(U_1(r))$ i zauważmy, że

$$\begin{aligned} W'_1(r) &= 3(rx, x, y) - 3r(x, x, y) + (1 - r)(rx, x, x, y) + \\ &+ (rx, x, x, y) + (x, rx, x, y) + (x, x, ry, y) - r^2((x, x, x, y) + (x, x, x, y) + \\ &+ (x, x, y, y)) - 3(r - r^2)(x, x, y) = \\ &= 3(rx, x, y) + (3 - r)(rx, x, x, y) + (x, x, ry, y) - \\ &- r^2(2(x, x, x, y) + (x, x, y, y)) - 3(2r - r^2)(x, x, y) \in \bar{\Delta}^{5,2}(R). \end{aligned}$$

Z poprzedniego rozdziału wiemy, że $\bar{h}^{5,3}(U_1(r)) = (r - r^2)((1, 2, 2))$. Zatem

$$\begin{aligned} \bar{h}^{5,2}(W'_1(r)) &= \bar{h}^5(W'_1(r)) = \bar{h}^5((\bar{\Delta}^5(f))(U_1(r))) = \\ &= \Gamma^5(f) \left((\bar{h}^5)(U_1(r)) \right) = \Gamma^5(f)((r - r^2)((1, 2, 2))) = \\ &= (r - r^2)\Gamma^5(f)((1, 2, 2)) = (r - r^2)\Gamma^5(f)(xy^{(2)}z^{(2)}). \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\Gamma^5(f)(xy^{(2)}z^{(2)}) = xx^{(2)}y^{(2)} = (1, 2)x^{(3)}y^{(2)} = 3((3, 2)).$$

Stąd otrzymujemy, że $\bar{h}^{5,2}(W_1'(r)) = 3(r - r^2)((3, 2))$.

Zamieniając rolami x i y otrzymujemy element

$$\begin{aligned} W_2'(r) &= 3(x, ry, y) - 3r(x, y, y) + (1 - r)(x, ry, y) + \\ &+ (rx, x, y, y) + (x, ry, y, y) + (x, y, ry, y) - r^2((x, x, y, y) + (x, y, y, y) + \\ &+ (x, y, y, y)) - 3(r - r^2)(x, y, y) = \\ &= 3(x, ry, y) + (3 - r)(x, ry, y, y) + (x, x, ry, y) - \\ &- r^2((x, x, y, y) + 2(x, y, y, y)) - 3(2r - r^2)(x, y, y), \end{aligned}$$

taki że $\bar{h}^{5,2}(W_2'(r)) = 3(r - r^2)((2, 3))$.

WNIOSEK 4.1.

Zachodzą następujące równości:

$$\bar{h}^{5,2}((r + 1)W_1'(r)) = 3(r - r^3)((3, 2)),$$

$$\bar{h}^{5,2}((r + 1)W_2'(r)) = 3(r - r^3)((2, 3)).$$

Korzystając ze wzoru (4.1) otrzymujemy

$$\bar{h}^{5,2}(rx, y) = r^4((4, 1)) + r^3((3, 2)) + r^2((2, 3)) + r((1, 4)),$$

$$\bar{h}^{5,2}(-rx, y) = r^4((4, 1)) - r^3((3, 2)) + r^2((2, 3)) - r((1, 4)).$$

Odejmując stronami otrzymujemy

$$\bar{h}^{5,2}((rx, y) - (-rx, y)) = 2r^3((3, 2)) + 2r((1, 4)),$$

skąd w szczególności $\bar{h}^{5,2}((x, y) - (-x, y)) = 2((3, 2)) + 2((1, 4))$,

Oznaczmy $W_1''(r) = (rx, y) - (-rx, y) - r((x, y) - (-x, y))$.

Wówczas z powyższego wynika, że $\bar{h}^{5,2}(W_1''(r)) = 2(r^3 - r)((3, 2))$.

Symetrycznie otrzymujemy element

$$W_2''(r) = (x, ry) + (-x, ry) - r((x, y) + (-x, y)),$$

taki że $\bar{h}^{5,2}(W_2''(r)) = 2(r^3 - r)((2, 3))$.

Oznaczmy

$$W_1(r) = -(r+1)W_1'(r) - W_1''(r),$$

$$W_2(r) = -(r+1)W_2'(r) - W_2''(r).$$

Z Wniosku 4.1 i powyższych rachunków wynika

WNIOSEK 4.2.

Zachodzą następujące równości:

$$\bar{h}^{5,2}(W_1(r)) = (r^3 - r)((3, 2)),$$

$$\bar{h}^{5,2}(W_2(r)) = (r^3 - r)((2, 3)).$$

Na mocy wzoru (4.2) otrzymujemy

$$\bar{h}^{5,2}(rx, y) = r\sigma + (r^3 - r)((3, 2)) - r(r^3 - r)((2, 3)) + (r^4 - r)((2, 3) + ((4, 1))). \quad (4.3)$$

Oznaczmy $T(r) = (rx, y) - r(x, y) - W_1(r) + rW_2(r)$.

WNIOSEK 4.3.

Zachodzi następująca równość:

$$\bar{h}^{5,2}(T(r)) = (r^4 - r)((2, 3) + ((4, 1))).$$

DOWÓD.

Korzystając ze wzoru (4.3) oraz Wniosku 4.2 otrzymujemy

$$\begin{aligned} \bar{h}^{5,2}(T(r)) &= r\sigma + (r^3 - r)((3, 2)) - r(r^3 - r)((2, 3)) + (r^4 - r)((2, 3) + ((4, 1))) - \\ &- r\sigma - (r^3 - r)((3, 2)) + r(r^3 - r)((2, 3)) = (r^4 - r)((2, 3) + ((4, 1))). \quad \square \end{aligned}$$

Przeprowadzimy teraz analogiczne rozumowanie, jak w poprzednim rozdziale.

Niech

$$\begin{aligned} D(r, s) &= (rx, sy) - rs^4(x, y) - s(sW_1(r) - rW_1(s)) - \\ &- r(rW_2(s) - sW_2(r)) - (sT(r) - rT(s)). \end{aligned}$$

WNIOSEK 4.4.

$$\bar{h}^{5,2}(D(r, s)) = 0,$$

Dowód.

Zauważmy, że

$$\bar{h}^{5,2}(sW_1(r) - rW_1(s)) = (s(r^3 - r) - r(s^3 - s))((3, 2)) = (r^3s - rs^3)((3, 2)),$$

$$\bar{h}^{5,2}(rW_2(s) - sW_2(r)) = (r(s^3 - s) - s(r^3 - r))((2, 3)) = (rs^3 - r^3s)((2, 3)),$$

$$\begin{aligned} \bar{h}^{5,2}(rT(s) - sT(r)) &= (r(s^4 - s) - s(r^4 - r))((2, 3)) + ((4, 1)) = \\ &= (r^4s - rs^4)((2, 3)) + ((4, 1)). \end{aligned}$$

Porównując ze wzorem (4.2) otrzymujemy tezę. □

Przedstawiając dowolny generator (rx, sy) przy pomocy $D(r, s)$ oraz elementów typu $W_1(r)$, $W_2(r)$, $T(r)$ otrzymujemy następujący rozkład:

WNIOSEK 4.5.

$$\bar{\Delta}^{5,2}(R) = R\{D(r, s); r, s, t \in R\} + R(x, y, z) + W_1(R) + W_2(R) + T(R),$$

gdzie $W_i(R) = R\{W_i(r); r \in R\}$ dla $i = 1, 2$ oraz $T(R) = R\{T(r); r \in R\}$.

TWIERDZENIE 4.2.

Jądro $Ker(\bar{h}^{5,2}) = K$, gdzie K jest podmodulem generowanym przez następujące elementy:

$$(1) D(r, s),$$

$$(2) W_i(rs) - r^3W_i(s) - sW_i(r), \quad i = 1, 2,$$

$$(3) 3sW_i(r) - 3rW_i(s) - (r - s)(W_i(r + s) - W_i(r) - W_i(s)), \quad i = 1, 2,$$

$$\begin{aligned} (4) W_i(ar^3 + bs^3) - W_i(ar^3) - W_i(bs^3) - W_i(ar + bs) + W_i(ar) + W_i(bs) - \\ - 3a^2bW_i(r^2s) - 3ab^2W_i(rs^2), \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

- (5) $W_i(r+s+t) - W_i(r+s) - W_i(s+t) - W_i(r+t) +$
 $+ W_i(r) + W_i(s) + W_i(t) - rstW_i(2), i = 1, 2,$
 (6) $T(r+s) - T(r) - T(s) - (2r^3s + 3r^2s^2 + 2rs^2)T(-1),$
 (7) $T(rs) - r^4T(s) - sT(r),$

gdzie $a, b, r, s \in R$.

DOWÓD.

Jak poprzednio zauważmy, że $K \subset Ker(\bar{h}^{5,2})$. Istotnie, dzięki Wnioskowi 4.4 wiemy, że $D(r, s) \in Ker(\bar{h}^{5,2})$. Dzięki Przykładowi 2.2 wiemy, że wartości $\bar{h}^{5,2}$ na elementach (2)-(5) są zerowe, natomiast dzięki Przykładowi 2.1 wiemy, że wartości $\bar{h}^{5,2}$ na elementach (6)-(7) są zerowe. Zatem $\bar{h}^{5,2}$ indukuje homomorfizm $h' : \bar{\Delta}^{5,2}(R)/K \rightarrow \bar{\Gamma}^{5,2}(R) \subset \Gamma^{5,2}(R)$. Oznaczmy przez $\overline{W_1(R)}$ (odpowiednio $\overline{W_2(R)}, \overline{T(R)}$) obraz $V_1(R)$ (odpowiednio $W_2(R), T(R)$) przez homomorfizm naturalny. Wówczas $h'(\overline{V_1(R)}) = I_3(R)((3, 2))$ i analogicznie $h'(\overline{V_2(R)}) = I_3(R)((2, 3))$, $h'(\overline{W(R)}) = I_4(R)((4, 1) + ((2, 3)))$ Jak poprzednio (dzięki Twierdzeniu 2.10) można pokazać, że ograniczenia $h'|_{\overline{W_1(R)}}, h'|_{\overline{W_2(R)}}$ są monomorfizmami oraz że (dzięki Twierdzeniu 2.6) ograniczenie $h'|_{\overline{T(R)}}$ jest monomorfizmem. Niech teraz $x \in Ker(\bar{h}^{5,2})$, skąd $\bar{x} \in Ker(h')$. Wtedy na mocy Wniosku 4.5 i tego że $D(r, s) \in K$, mamy $\bar{x} = r\overline{(x, y)} + \overline{w_1} + \overline{w_2} + \overline{t}$, gdzie $r \in R, w_i \in W_i(R), i = 1, 2$ oraz $t \in T(R)$. Stąd $0 = h'(\bar{x}) = r\sigma + h'(\overline{w_1}) + h'(\overline{w_2}) + h'(\overline{t})$. Ponieważ każdy składnik sumy po prawej stronie należy do innego składnika prostego modułu $\bar{\Gamma}^{5,2}$, więc $r = 0$ oraz $h'(\overline{w_1}) = h'(\overline{w_2}) = h'(\overline{t}) = 0$. Korzystając z tego, że ograniczenia homomorfizmu h' są monomorfizmami otrzymujemy, że $\overline{w_1} = \overline{w_2} = \overline{w} = 0$. Zatem $\bar{x} = 0$, skąd $x \in K$. $\square$

Opuszczając symetryczne wersje relacji otrzymujemy następujące

TWIERDZENIE 4.3.

Następujące relacje tworzą pełny zestaw 2-równości dla klasy Hom^5 :

(A1), (A2), (A) oraz

$$(1) D(r, s) = 0,$$

$$(2) W(rs) = r^3W(s) + sW(r),$$

$$(3) 3sW(r) - 3rW(s) = (r - s)(W(r + s) - W(r) - W(s)),$$

$$(4) W(ar^3 + bs^3) - W(ar^3) - W(bs^3) - W(ar + bs) + W(ar) + W(bs) = \\ = 3a^2bW(r^2s) + 3ab^2W(rs^2),$$

$$(5) W(r + s + t) - W(r + s) - W(s + t) - W(r + t) + \\ + W(r) + W(s) + W_i(t) - rstW(2) = 0,$$

$$(6) T(r + s) = T(r) + T(s) + (2r^3s + 3r^2s^2 + 2rs^2)T(-1),$$

$$(7) T(rs) = r^4T(s) + sT(r),$$

gdzie $a, b, r, s, t \in R$, x, y, z są dowolnymi elementami z dziedziny odwzorowania,

$$W(r) = -(r + 1)(3(rx, x, y) + (3 - r)(rx, x, x, y) + (x, x, ry, y) - \\ - r^2(2(x, x, x, y) + (x, x, y, y)) - 3(2r - r^2)(x, x, y)) - \\ - ((rx, y) - (-rx, y) - r((x, y) - (-x, y))),$$

$$T(r) = (rx, y) - r(x, y) + \\ - (-(r + 1)(3(rx, x, y) + (3 - r)(rx, x, x, y) + (x, x, ry, y) - \\ - r^2(2(x, x, x, y) + (x, x, y, y)) - 3(2r - r^2)(x, x, y)) - \\ - ((rx, y) - (-rx, y) - r((x, y) - (-x, y)))) + \\ r(-(r + 1)(3(x, ry, y) + (3 - r)(x, ry, y, y) + (x, x, ry, y) - \\ - r^2((x, x, y, y) + 2(x, y, y, y)) - 3(2r - r^2)(x, y, y)) - \\ - ((x, ry) + (-x, ry) - r((x, y) + (-x, y)))),$$

$$D(r, s) = (rx, sy) - rs^4(x, y) - s(sW_1(r) - rW_1(s)) - \\ - r(rW_2(s) - sW_2(r)) - (sT(r) - rT(s)),$$

przy czym $W_1(r) = W(r)$, $W_2(r)$ jest symetryczną wersją $W_1(r)$, a (x, y) , (x, y, z) oraz (x, y, z, t) oznaczają wartość odpowiednio drugiego, trzeciego i czwartego defektu rozważanego odwzorowania.

ROZDZIAŁ 5

Podsumowanie

Poniższe twierdzenie podsumowuje dotychczasowe badania nad relacjami spełnianymi przez odwzorowania stopnia 5, zawarte w Podrozdziale 3.2 oraz Rozdziale 4.

TWIERDZENIE 5.1.

Następujące relacje tworzą pełny zestaw równości spełnianych przez odwzorowania stopnia 5, czyli definiują klasę $ED(Hom^5)$:

$$(1) \text{ relacje } (A1), (A2), (A3),$$

$$(2) D(r, s, t) = 0,$$

$$(3) U(r + s) = U(r) + U(s) + rsU(2),$$

$$(4) U(rs) = r^2U(s) + sU(r),$$

$$(5) V(rs) = r^3V(s) + sV(r),$$

$$(6) 3sV(r) - 3rV(s) = (r - s)(V(r + s) - V(r) - V(s)),$$

$$(7) V(ar^3 + bs^3) - V(ar^3) - V(bs^3) - V(ar + bs) + V(ar) + V(bs) = \\ = 3a^2bV(r^2s) - 3ab^2V(rs^2),$$

$$(8) V(r+s+t) - V(r+s) - V(s+t) - V(r+t) + V(r) + V(s) + V(t) - rstV(2) = 0,$$

$$(9) D(r, s) = 0,$$

$$(10) W(rs) = r^3W(s) + sW(r),$$

$$(11) 3sW(r) - 3rW(s) = (r - s)(W(r + s) - W(r) - W(s)),$$

$$(12) W(ar^3 + bs^3) - W(ar^3) - W(bs^3) - W(ar + bs) + W(ar) + W(bs) - \\ - 3a^2bW(r^2s) - 3ab^2W(rs^2) = 0,$$

$$(13) \quad W(r+s+t) - W(r+s) - W(s+t) - W(r+t) + \\ + W(r) + W(s) + W(t) - rstW(2) = 0,$$

$$(14) \quad T(r+s) = T(r) + T(s) + (2r^3s + 3r^2s^2 + 2rs^2)T(-1),$$

$$(15) \quad T(rs) = r^4T(s) + sT(r),$$

gdzie wyrażenia $D(r, s), U(r), V(r)$ zostały zdefiniowane Twierdzeniu 3.4, a wyrażenia $D(r, s, t), W(r), T(r)$ zostały zdefiniowane w Twierdzeniu 4.3. Ponadto

1) równość (3) można opuścić, a równość (4) zastąpić równością (2)

z Twierdzenia 3.7,

2) równości (2)-(8) można zastąpić równościami (B), (B1), (B2), (S)

z Twierdzenia 3.1.

Zauważmy, że w dowodach kluczowych twierdzeń (Twierdzenia 3.3 oraz Twierdzenia 4.2) nie korzysta się z postaci elementów $U(r)$, $V(r)$, $W(r)$, $T(r)$. Istotne jest tylko to, aby ich obrazy spełniały relacje analogiczne do tych, jakie spełniają elementy $r^2 - r$, $r^3 - r$ oraz $r^4 - r$. Oznacza to, że gdyby udało się znaleźć prostsze elementy o powyższych własnościach, również ostateczne równości mogłyby być prostsze. Zwróćmy również uwagę, że przy dodatkowych założeniach dotyczących pierścienia R ostateczny zestaw równości również mógłby być prostszy. Łatwo zauważyć, że przy pomocy elementów $W'_1(r)$, (odpowiednio $W''_1(r)$) moglibyśmy otrzymać prostsze równości w przypadku pierścieni z odwracalną trójką, (odpowiednio dwójką). Na koniec warto zauważyć, że zastosowana w tej pracy metoda może być również użyta do znalezienia relacji dla klasy Hom^4 .

Bibliografia

- [1] M. Ferrero, A. Micali, *Sur les n -applications*, Bull. Soc. Math. France Mém. 59 (1979), 33-53
- [2] M. Maciejewski, A. Prószyński, *Mappings of degree 5, part I*, Colloquium Mathematicum 117 (2009), 223-241 part I
- [3] A. Prószyński, *Equationally definable functors and polynomial mappings*, Journal of Pure and Applied Algebra 56 (1989), 59-84
- [4] A. Prószyński, *Forms and mappings. I: Generalities*, Fund. Math. 122 (1984), 219-235
- [5] A. Prószyński, *Forms and mappings. III: Regular m -applications*, Comment. Math. 28 (1989), 305-330
- [6] A. Prószyński, *Forms and mappings. IV: Degree 4*, Bull. Polish Acad. Sci. 37 (1989), 269-278
- [7] A. Prószyński, *Odwzorowania wyższych stopni*, WSP, Bydgoszcz 1987
- [8] A. Prószyński, *Relations between elements $r^2 - r$* , Bull. Polish Acad. Sci. 55 No. 4 (2007), 317-323
- [9] N. Roby, *Lois polynômes et lois formelles en théorie des modules*, Ann. Éc. Norm. Sup. 80 (1963), 213-348