

Uniwersytet Śląski
Instytut Matematyki

Roksana Słowik

PODGRUPY GRUPY VERSHIKA-KEROVA

ROZPRAWA DOKTORSKA

napisana pod kierunkiem:
dr hab. inż. Waldemara Hołubowskiego

KATOWICE 2013

SPIS TREŚCI



Dr BG 3372

Wstęp	i
Wykaz oznaczeń	iii
1 Wprowadzenie	1
1.1 Pierwsze definicje	1
1.2 Generatory grup macierzy	6
1.3 Badania związane z tematyką macierzy nieskończonych	9
2 Komutanty pewnych podgrup grupy $GL_{VK}(R)$	11
2.1 Komutatory w grupach macierzy skończonego wymiaru	11
2.2 Komutatory w grupach macierzy nieskończonego wymiaru	15
2.2.1 Grupa $GL_{RB}(R)$ i jej komutant	15
2.2.2 Komutanty grup $T_{RB}(R)$ oraz $UT_{RB}(R)$	17
2.2.3 Komutanty grup $T_{Rf}(R)$ i $UT_{Rf}(R)$	21
2.2.4 Wnioski	24
3 Podgrupy wolne grupy $UT_{\infty}(R)$	26
3.1 Podgrupy wolne grup macierzowych skończonego wymiaru	26
3.2 Podgrupy wolne w grupie macierzy nieskończonych	29
3.2.1 Macierze wstęgowe i ich własności	30
3.2.2 Zastosowanie macierzy wstęgowych do konstrukcji grup wolnych . .	32
3.2.3 Pewne rodziny podgrup wolnych w $UT_{\infty}(R)$	36
3.2.4 Inne przykłady konstrukcji grupy wolnej	38
3.2.5 Własności przedstawionych podgrup	41
3.2.6 Klasyfikacja pewnych podgrup	46

4	Podgrupy paraboliczne grupy $SL_{VK}(R)$	51
4.1	Podgrupy paraboliczne i sieciowe - wprowadzenie	51
4.2	Podgrupy paraboliczne grupy $SL_{VK}(R)$	55
4.2.1	Opis podgrup parabolicznych $SL_{VK}(R)$	55
4.2.2	Własności podgrup parabolicznych $SL_{VK}(R)$	61
4.2.3	Uwagi końcowe	63
A	Pierścienie	65
A.1	Pierścienie proste i półproste	65
A.2	Pierścienie lokalne i półlokalne	66
A.3	Stabilna ranga pierścienia	67
	Bibliografia	67
	Skorowidz	71

WSTĘP

Pojęcie grupy, którego pierwsze idee pojawiły się w drugiej połowie osiemnastego wieku (prace Lagrange'a i Euler'a), raz pierwszy pojawiło się w opublikowanej dopiero po śmierci autora pracy E. Galois i od tej pory zajęło poczesne miejsce zarówno w algebrze jak i w całej matematyce. Grupy odgrywają ważną rolę w geometrii i zastosowaniach w naukach przyrodniczych. Szczególne miejsce w tej teorii zajmują grupy macierzowe. Teoria macierzy jest ważnym przedmiotem badań nie tylko matematyków zajmujących się algebrą liniową i różnymi jej zastosowaniami, ale i (a dla nas przede wszystkim) specjalistów od teorii grup. Grupy macierzy są intensywnie badane, a dzięki teorii reprezentacji wykorzystywane do opisu rozmaitych grup. Nie dziwi więc próby uogólnienia pojęcia macierzy do macierzy wymiaru nieskończonego, co dostarcza kolejnych przykładów grup oraz przestrzeni liniowych. Celowym i interesującym wydaje się więc być badanie macierzy nieskończonych.

Macierz nieskończoną można zdefiniować na różne sposoby, a także można rozpatrywać różne grupy macierzy nieskończonych. Tematem przedłożonej rozprawy jest grupa Vershika-Kerova. Celem pracy jest opis jej podgrup, które są zdefiniowane analogicznie jak podgrupy grup macierzy skończonego wymiaru oraz które są związane z ważnymi terminami pojawiającymi się w teorii grup. Badania dotyczą podgrup wolnych, komutantów, a także podgrup parabolicznych grupy Vershika-Kerova lub pewnych jej podgrup.

Rozdział pierwszy stanowi krótkie wprowadzenie do tematu. Definiujemy macierz nieskończoną oraz działania na macierzach nieskończonych. Wskazujemy własności wprowadzonego działania mnożenia, a następnie przykłady grup macierzy nieskończonego, w tym grupy Vershika-Kerova. Zamieszczamy tu również informacje dotyczące generatorów grup macierzowych, głównie skończenie wymiarowych. Rozdział kończymy zaprezentowaniem pewnych zastosowań macierzy nieskończonych oraz zagadnień z nimi związanych.

Rozdział drugi poświęcony jest dolnemu ciągowi centralnemu i ciągowi komutantów. Rozpatrujemy tu najpierw grupy macierzy, których elementy w skończonej liczbie wierszy różnią się od macierzy jednostkowej, a następnie grupę macierzy nieskończonych trójkątnych, których elementy w każdym wierszu mają skończoną liczbę współczynników niezerowych. Dla tychże grup wskazujemy komutant, a następnie uogólniając nasze metody, opisujemy dolny ciąg centralny oraz ciąg komutantów omawianych grup. Z przeprowadzonych dowodów wnioskujemy, że szerokość wszystkich wskazanych komutantów jest skończona.

Wyniki zaprezentowane w tym rozdziale zostały opublikowane w pracy [39].

Rozdział trzeci dotyczy grup wolnych. Ponieważ grupy macierzy skończone wymiarowych unitrójkątnych nie zawierają żadnych podgrup wolnych, może wydawać się interesującym znalezienie takich podgrup w grupie macierzy nieskończonych unitrójkątnych. Rozpatrujemy tu podgrupy generowane przez dwie macierze. Wskazujemy warunek konieczny, by generowana grupa była wolna rangi 2. Dla pewnej szczególnie prostej postaci generatorów formułujemy warunek konieczny i wystarczający, by otrzymana grupa była wolna. Następnie wskazujemy kolejne rodziny podgrup wolnych grupy macierzy nieskończonych unitrójkątnych. Wskazane w tym rozdziale metody są uogólnieniem rezultatów z artykułu [40].

W rozdziale czwartym koncentrujemy się na podgrupach parabolicznych. Podgrupy te zawierają wszystkie macierze górnotrójkątne. Zostały one opisane zarówno dla przypadku pełnej grupy liniowej (dowolnego wymiaru skończonego) jak i grupy Vershika-Kerova. Wykazano, że są one ściśle związane z pierścieniem nad którym zdefiniowane są nasze macierze, a dokładniej z ideałami tego pierścienia. Aby rozwinąć te badania, wprowadzamy grupę, która w tej rozprawie nazywana jest specjalną grupą Vershika-Kerova, a która jest analogonem specjalnej grupy liniowej w grupie macierzy nieskończonych. Udowodniamy, że dla grupy tej opis jej podgrup parabolicznych jest analogiczny jak dla grupy Vershika-Kerova. Wyniki przytoczone w tym rozdziale zostały opisane w pracy [24].

Powszechnie wiadomym jest, że struktura grupy macierzy zależy od pierścienia nad którym macierze te są zdefiniowane. Przedstawione w różnych rozdziałach rezultaty pozostają prawdziwe dla różnych klas pierścieni. Aby nie zakłócać rozważań dotyczących grupy komentarzami dotyczącymi własności pierścieni, pozwalamy sobie na zamieszczenie krótkiego dodatku (Dodatek A), w którym zebrane są definicje oraz parę przykładów pierścieni, które pojawiają się w tekście.

WYKAZ OZNACZEŃ

$\mathbb{N}$	zbiór liczb naturalnych (bez 0)
$\mathbb{Z}$	zbiór liczb całkowitych
$\mathbb{R}$	zbiór liczb rzeczywistych
$\mathbb{C}$	zbiór liczb zespolonych
$a = b \bmod n$	a przystaje do b modulo n
$\delta(i, j)$	delta Kroneckera; $\delta(i, i) = 1$ dla wszystkich i oraz $\delta(i, j) = 0$ dla $i \neq j$
$\lfloor a \rfloor$ ($a \in \mathbb{R}$)	największa liczba całkowita b taka, że $b \leq a$
$H \leq G$	H jest podgrupą grupy G
$\langle A \rangle$	podgrupa generowana przez zbiór A
F_n	grupa wolna rangi n
R^*	zbiór elementów odwracalnych pierścienia R
$\text{sr}(R)$	stabilna ranga pierścienia R
$\mathbb{F}_q$	ciało q - elementowe
$\mathbb{C}$	ciało liczb zespolonych
e_n	macierz jednostkowa wymiaru $n \times n$
e_∞	macierz jednostkowa nieskończona
e_{ij}	macierz, która na miejscu (i, j) ma 1, natomiast w pozostałych 0; jej rozmiar będzie wynikał z kontekstu
$\mathbf{0}$	macierz zerowa; jej rozmiar będzie wynikał z kontekstu
$t_{ij}(\alpha)$ ($i \neq j$)	macierz równa $e_n + \alpha e_{ij}$ lub $e_\infty + \alpha e_{ij}$

$d_{ij}(\theta)$	macierz równa $e_n + (\theta^{-1} - 1)e_{ii} + (\theta - 1)e_{jj}$ lub $e_\infty + (\theta^{-1} - 1)e_{ii} + (\theta - 1)e_{jj}$
$\text{Diag}(a_1, a_2, \dots)$	macierz blokowo-diagonalna o blokach $a_1, a_2, \dots$ na głównej przekątnej
$(g)_{r(i)}$	i - ty wiersz macierzy g
$(g)_{c(i)}$	i - ta kolumna macierzy g
$\text{GL}_n(R)$	pełna grupa liniowa macierzy wymiaru $n \times n$ nad pierścieniem R
$\text{SL}_n(R)$	specjalna grupa liniowa macierzy wymiaru $n \times n$ nad pierścieniem R
$\text{T}_n(R)$	grupa macierzy górnotrójkątnych wymiaru $n \times n$ nad pierścieniem R
$\text{UT}_n(R)$	grupa macierzy górnych unitrójkątnych wymiaru $n \times n$ nad pierścieniem R
$\text{D}_n(R)$	grupa macierzy diagonalnych wymiaru $n \times n$ nad pierścieniem R
$M_\infty(R)$	zbiór wszystkich macierzy nieskończonych
$M_{Rf}(R)$	pierścień macierzy nieskończonych nad R takich, że w każdym wierszu ilość współczynników niezerowych jest skończona
$M_{Cf}(R)$	pierścień macierzy nieskończonych nad R takich, że w każdej kolumnie ilość współczynników niezerowych jest skończona
$\text{GL}_{Rf}(R)$	grupa macierzy nieskończonych nad R takich, że w każdym wierszu ilość współczynników niezerowych jest skończona oraz takich, że ich odwrotności także posiadają tę własność
$\text{GL}_{Cf}(R)$	grupa macierzy nieskończonych nad R takich, że w każdej kolumnie ilość współczynników niezerowych jest skończona oraz takich, że ich odwrotności także posiadają tę własność
$\text{GL}_{RCf}(R)$	przecięcie grup $\text{GL}_{Rf}(R)$ i $\text{GL}_{Cf}(R)$
$\text{T}_{Rf}(R)$	grupa macierzy nieskończonych górnotrójkątnych nad R takich, że w każdej kolumnie ilość współczynników niezerowych jest skończona oraz takich, że ich odwrotności także posiadają tę własność
$[x, y]$	komutator elementów x, y ; $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$
$\gamma_i(G)$	i -ty wyraz dolnego ciągu centralnego grupy G
$G^{(i)}$	i -ty wyraz ciągu komutantów grupy G

ROZDZIAŁ

1

WPROWADZENIE

Niniejszy rozdział stanowi wprowadzenie w tematykę macierzy nieskończonych. Rozpoczynamy od zaprezentowania trudności jakie pojawiają się przy definiowaniu działania mnożenia tychże obiektów oraz ograniczeń jakie będą nakładane na macierze nieskończone, aby uzyskać strukturę grupy. Podajemy tu definicje poszczególnych grup oraz notację. Następnie krótko wspominamy o pojęciu generatorów grupy. Porównujemy informacje dotyczące generatorów grup macierzowych wymiaru skończonego i nieskończonego, przy czym na temat tych pierwszych wiemy zdecydowanie więcej. Na koniec rozdziału podajemy parę zastosowań oraz zagadnień związanych z macierzami nieskończonymi.

1.1 Pierwsze definicje

Ustalamy, że wszystkie macierze, które pojawią się w pracy są określone nad pierścieniem łącznym z jedyneką.

Definicja 1.1.1. Macierzą nieskończoną nad pierścieniem R będziemy nazywać dowolną funkcję z iloczynu kartezjańskiego $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ o wartościach w pierścieniu R .

W literaturze można natknąć się również na macierze będące funkcjami z $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ w R , my jednak pozostaniemy przy Definicji 1.1.1.

Współczynnik macierzy g znajdujący się na miejscu (i, j) oznaczamy przez g_{ij} . Ponadto wprowadzamy następujące oznaczenia: e_∞ – dla macierzy jednostkowej nieskończonej, oraz e_n – dla macierzy jednostkowej wymiaru $n \times n$, tzn.

$$(e_n)_{ij} = \delta(i, j) \quad \text{dla } 1 \leq i, j \leq n,$$

$$(e_\infty)_{ij} = \delta(i, j) \quad \text{dla } i, j \geq 1,$$

gdzie δ oznacza deltę Kroneckera.

Symbol e_{ij} może oznaczać macierz kwadratową skończonego bądź nieskończonego wymiaru taką, że $(e_{ij})_{ij} = 1$ i $(e_{ij})_{pr} = 0$ gdy $p \neq i$ lub $r \neq j$. Jej rozmiar będzie wynikał z kontekstu. Iloczyn dwóch takich macierzy jest szczególnie prosty do wyznaczenia. Mianowicie:

$$e_{ij} \cdot e_{kl} = \delta(j, k) \cdot e_{il}.$$

W pracy będziemy odwoływać się do grup macierzy skończonego wymiaru, między innymi do $GL_n(R)$ – pełnej grupy liniowej składającej się ze wszystkich macierzy odwracalnych wymiaru n nad R , a także do grupy, którą oznaczmy przez $SL_n(R)$, a przez którą będziemy tu rozumieli podgrupę $GL_n(R)$ generowaną przez wszystkie transwekcje¹. Szczególną rolę w naszych rozważaniach będą odgrywały macierze trójkątne. Przez $T_n(R)$, $UT_n(R)$, $UT_n^k(R)$ będziemy oznaczać podgrupy $GL_n(R)$ zdefiniowane jak poniżej. Zakładamy, że grupę $T_n(R)$ definiujemy zawsze nad pierścieniem przemiennym.

$$T_n(R) = \{g \in GL_n(R) : g_{ij} = 0 \text{ dla } 1 \leq j < i \leq n\}$$

$$UT_n(R) = \{g \in T_n(R) : g_{ii} = 1 \text{ dla } 1 \leq i \leq n\}$$

$$UT_n^k(R) = \{g \in UT_n(R) : g_{ij} = 0 \text{ dla } 1 \leq j - i \leq k\}$$

Elementy grupy $UT_n^k(R)$ są przedstawione jest na Rysunku 1.1.

Rysunek 1.1: Rysunek ilustrujący elementy grupy $UT_n^k(R)$.

$$\begin{bmatrix} 1 & \overbrace{0 \dots 0}^{k \rightarrow 0} & * & \dots & * \\ & 1 & 0 & \dots & 0 & * & \vdots \\ & & 1 & 0 & & & * \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dodawanie macierzy nieskończonych definiujemy analogicznie jak dodawanie macierzy skończonych, tzn. $(a + b)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ dla wszystkich $i, j \in \mathbb{N}$.

Naturalnym jest zdefiniowanie mnożenia macierzy podobnie jak dla macierzy skończonego wymiaru, tj. wedle zasady "wiersz przez kolumnę". To podejście może jednak okazać się zdradliwe.

Przykład 1.1.1. Załóżmy, że $a, b \in R \setminus \{0\}$. Niech

$$g = \begin{bmatrix} a & a & a & \dots \\ a & a & a & \\ a & a & a & \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} b & b & b & \dots \\ b & b & b & \\ b & b & b & \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

¹Proszę porównać z informacjami z Rozdziału 1.2.

Wtedy oczywiście niemożliwe jest pomnożenie g przez h , a także h przez g .

Przykład 1.1.2. Przy założeniach poprzedniego przykładu niech

$$g = \begin{bmatrix} a & a & a & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 & \cdots \\ b & 0 & 0 & \\ b & 0 & 0 & \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

Tym razem również nie jesteśmy w stanie wykonać mnożenia $g \cdot h$, możemy jednak wyznaczyć iloczyn $h \cdot g$. Dokładniej

$$hg = \begin{bmatrix} ba & ba & ba & \cdots \\ ba & ba & ba & \\ ba & ba & ba & \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

Nawet, gdy mnożenie pewnych macierzy nieskończonych jest wykonalne, może okazać się, że nie posiada ono pewnych własności, których zazwyczaj oczekujemy. Ilustruje to

Przykład 1.1.3 ([13]). Dla macierzy

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 1 & 0 & \\ 0 & -1 & 1 & \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}$$

mamy

$$(gh)k = \mathbf{0} \quad \text{i} \quad g(hk) = e_{11}.$$

A zatem możliwość zdefiniowania grupy macierzy nieskończonych staje pod znakiem zapytania. To z kolei (i nie tylko to) prowadzi do kolejnych trudności.

Przykład 1.1.4 (P. Vermes, [51]). Niech a będzie następującą macierzą o elementach z $\mathbb{C}$:

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \\ \vdots & & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

Dla dowolnego elementu $\alpha \in \mathbb{C}$ macierz

$$b_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha & -1 & \alpha & 1-\alpha & \cdots \\ 1-\alpha & -1+\alpha & 1 & -\alpha & -1+\alpha & \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ \alpha & -\alpha & 0 & \alpha & 1-\alpha & \\ 1-\alpha & -1+\alpha & 0 & 1-\alpha & -1+\alpha & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

spełnia zależność $ab_\alpha = b_\alpha a = e_\infty$. Tak więc a ma więcej niż jedną odwrotność.

Nietrudno zauważyć, że zamiast $\mathbb{C}$ można definiować a oraz b_α nad dowolnym pierścieniem z 1 uzyskując ten sam wynik.

Przedstawione przykłady prowadzą do naturalnego pytania czy w zbiorze $M_\infty(R)$ można w ogóle mówić o wprowadzeniu grupy z działaniem mnożenia zdefiniowanym jak na początku rozdziału. Okazuje się to możliwe po wprowadzeniu pewnych dodatkowych założeń. Podamy teraz przykłady różnych ograniczeń jakie można nałożyć na macierze nieskończone, aby otrzymany zbiór (wraz z mnożeniem) tworzył grupę.

Pierwszym przykładem grupy w $M_\infty(R)$ może być stabilna grupa liniowa. Grupę $GL_n(R)$ (dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$) możemy utożsamiać z podgrupą grupy $GL_{n+1}(R)$ poprzez włożenie, które macierzy $g \in GL_n(R)$ przyporządkowuje macierz

$$\left[\begin{array}{c|c} g & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \in GL_{n+1}(R).$$

Przy tej interpretacji można mówić o sumie mnogościowej $\cup_{n=1}^\infty GL_n(R)$. Suma ta jest grupą, którą nazywamy stabilną grupą liniową, i którą oznaczamy przez $GL(R)$. A zatem $GL(R)$ możemy traktować jako grupę, której elementy są zawarte w $M_\infty(R)$ i są postaci

$$\left[\begin{array}{c|c} g & 0 \\ \hline 0 & e_\infty \end{array} \right]$$

dla pewnego $g \in GL_n(R)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, tzn. posiadają tę własność, że na głównej przekątnej mają tylko skończoną liczbę elementów różnych od jedynki, a poza główną przekątną - tylko skończoną ilość elementów różnych od zera.

Analogicznie wprowadza się specjalną stabilną grupę liniową (którą oznaczamy przez $SL(R)$), trójkątną ($T(R)$) oraz unitrójkątną ($UT(R)$) stabilną grupę liniową.

Grupę wprowadzoną powyżej można powiększyć. Rozważmy podzbiór $M_\infty(R)$ składający się z macierzy postaci

$$\left[\begin{array}{c|c} g & h \\ \hline 0 & e_\infty \end{array} \right] \tag{1.1}$$

dla pewnej $g \in GL_n(R)$, gdzie n może być dowolną liczbą naturalną, oraz pewnej macierzy h odpowiedniego wymiaru. Z poniższych rachunków:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c|c} g_1 & h_1 \\ \hline 0 & e_\infty \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} g_2 & h_2 \\ \hline 0 & e_\infty \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{c|c} g_1 g_2 & g_1 h_2 + h_1 \\ \hline 0 & e_\infty \end{array} \right], \\ \left[\begin{array}{c|c} g & h \\ \hline 0 & e_\infty \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} g^{-1} & -g^{-1}h \\ \hline 0 & e_\infty \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{c|c} g^{-1} & -g^{-1}h \\ \hline 0 & e_\infty \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} g & h \\ \hline 0 & e_\infty \end{array} \right] = e_\infty \end{aligned}$$

łatwo widać, że ten podzbiór tworzy grupę, którą oznaczamy symbolem $GL_{RB}(R)$. (Oznaczenie pochodzi od *row banded*. Nic jest nam znany polski odpowiednik nazwy tej grupy.)

Warto wspomnieć, że podgrupa grupy $GL_{RB}(R)$ składająca się z macierzy postaci (1.1), gdzie $g \in SL_n(R)$, jest grupą prostą.

Kolejnym przykładem grupy w $M_\infty(R)$ jest zbiór wszystkich macierzy odwracalnych, które w każdej kolumnie posiadają jedynie skończoną liczbę współczynników niezerowych oraz których odwrotności w każdej kolumnie posiadają jedynie skończoną liczbę współczynników niezerowych. Zauważmy, że z tejsze skończoności wynika zarówno poprawne określenie mnożenia takich macierzy przez siebie, jak i łączność tego mnożenia. Grupę tę oznaczamy przez $GL_{Cf}(R)$, natomiast pierścień wszystkich macierzy z $M_\infty(R)$ posiadających jedynie skończoną liczbę elementów niezerowych w każdej kolumnie (lecz niekoniecznie odwracalnych) - przez $M_{Cf}(R)$.

Analogicznie definiujemy pierścień $M_{Rf}(R)$ - jako zbiór wszystkich macierzy z $M_\infty(R)$, które w każdym wierszu mają jedynie skończoną liczbę współczynników niezerowych, oraz grupę $GL_{Rf}(R)$, której elementami są macierze z $M_{Rf}(R)$, które są odwracalne i których odwrotności również należą do $M_{Rf}(R)$.

Niech ponadto $M_{RCf}(R) = M_{Rf}(R) \cap M_{Cf}(R)$ oraz $GL_{RCf}(R) = GL_{Rf}(R) \cap GL_{Cf}(R)$. Oczywiście $GL_{RCf}(R)$ również jest grupą.

Dodajmy jeszcze, że zbiór macierzy odwracalnych, które w każdym wierszu posiadają skończoną ilość elementów niezerowych, nie tworzy grupy. Dla dowolnego pierścienia (z jedynką) mamy bowiem:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & 1 & -1 & \\ & & & 1 & \ddots \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ & 1 & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ & 1 & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & 1 & -1 & \\ & & & 1 & \ddots \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} = e_\infty.$$

Zatem istnieją macierze odwracalne, które w każdym wierszu mają skończoną liczbę współczynników niezerowych, a ich odwrotności nie posiadają tej własności.

Skupmy się teraz na grupie $GL_{Cf}(R)$. Wskażemy dwie istotne podgrupy tej grupy. Będziemy teraz zakładać, że R jest pierścieniem przemiennym.

Pierwszą podgrupą jest zbiór wszystkich macierzy górnotrójkątnych, których współczynniki znajdujące się na głównej przekątnej są odwracalne w R . Istotnie, każda taka macierz w kolumnie n -tej ma co najwyżej n współczynników niezerowych, czyli skończoną ich liczbę. Ponadto, iloczyn dwóch macierzy górnotrójkątnych oraz odwrotna do macierzy górnotrójkątnej nad pierścieniem przemiennym są macierzami górnotrójkątnymi. Grupę tę oznaczamy przez $T_\infty(R)$. W niej zawarta jest jeszcze jedna ważna grupa macierzy nieskończonych - składająca się ze wszystkich macierzy unitrójkątnych - $UT_\infty(R)$.

Drugą podgrupą $GL_{Cf}(R)$, którą chcielibyśmy przedstawić i której poświęcona jest ta praca jest grupa Vershika-Kerova.

Rozważmy wszystkie macierze postaci

$$\begin{bmatrix} g & h \\ 0 & k \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

gdzie $g \in GL_n(R)$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, $k \in T_\infty(R)$, oraz h jest macierzą nad R odpowiedniego wymiaru. O elementach tych można myśleć jako o macierzach bliskich macierzom

trójkątnym. Z faktu, że

$$\begin{bmatrix} g_1 & h_1 \\ 0 & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_2 & h_2 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 g_2 & g_1 h_2 + h_1 k_2 \\ 0 & k_1 k_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} g & h \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g^{-1} & -g^{-1} h k^{-1} \\ 0 & k^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g^{-1} & -g^{-1} h k^{-1} \\ 0 & k^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g & h \\ 0 & k \end{bmatrix} = e_\infty,$$

oraz tego, że macierze nieskończone górnotrójkątne, które są odwracalne, tworzą grupę, wynika, że zbiór wszystkich macierzy postaci (1.2) również jest grupą. Nazywamy ją grupą Vershika-Kerova i będziemy oznaczać symbolem $GL_{VK}(R)$. Została ona wprowadzona przez S. Vershika i V. Kerova w pracy [28], w której autorzy badają reprezentacje, ich charakter, a także charakter unitarne tej grupy. Pierwsze badania tej grupy dotyczyły macierzy zdefiniowanych nad ciałami skończonymi. Warto dodać, że początki grupy $GL_{VK}(R)$ sięgają nieco dalej, a inspiracją do podjęcia tego tematu były wcześniejsze badania autorów dotyczące reprezentacji nieskończonych grup permutacji. Wspomnijmy ponadto, że grupa Vershika-Kerova nie jest granicą prostą (jak np. stabilna grupa liniowa) ani granicą odwrotną (jak np. grupa macierzy trójkątnych), lecz tak zwaną IP - granicą².

1.2 Generatory grup macierzy

Założmy, że G jest dowolną grupą nietrywialną, natomiast M jej pewnym niepustym podzbiorem, który nie zawiera elementu neutralnego. Zbiór

$$\{g_1^{\epsilon_1} \cdots g_n^{\epsilon_n} : g_1, \dots, g_n \in M, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \{1, -1\}, n \in \mathbb{N}\}$$

jest podgrupą G . Nazywamy ją podgrupą generowaną przez M i oznaczamy $\langle M \rangle$, a każdy z elementów M nazywamy generatorem $\langle M \rangle$. W szczególności, jeśli $M = \{g_1, \dots, g_n\}$, to piszemy $\langle g_1, \dots, g_n \rangle$ zamiast $\langle \{g_1, \dots, g_n\} \rangle$.

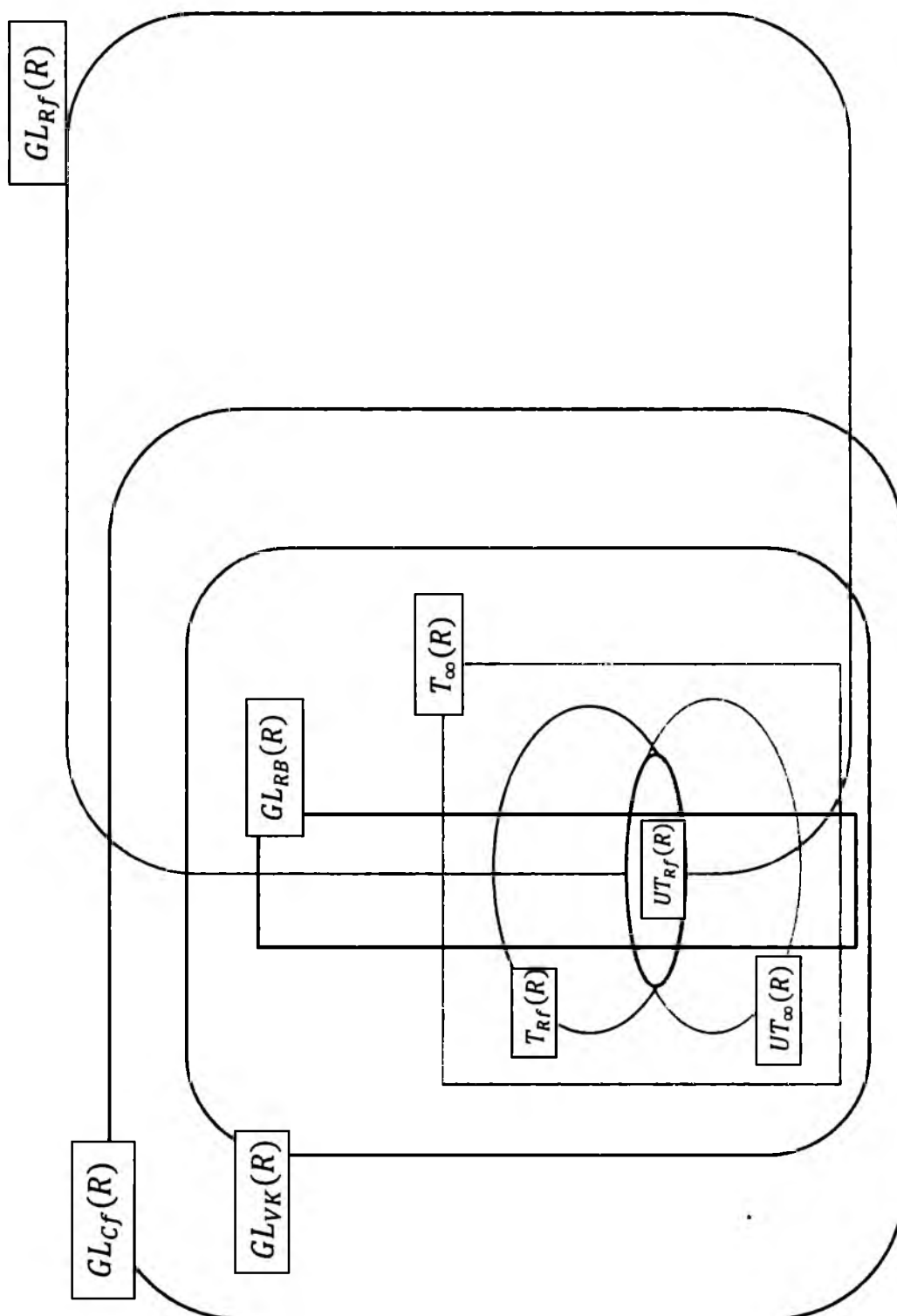
Dla nas interesujące są oczywiście generatory grup macierzowych. W przypadku grup macierzy skończonego wymiaru wiadomo o nich całkiem sporo, zwłaszcza, w przypadku, gdy są to macierze nad pewnym ciałem. Niech K będzie ciałem, zawierającym więcej niż dwa elementy, a n liczbą naturalną. Wprowadźmy oznaczenia:

$$t_{ij}(\alpha) = e_n + \alpha e_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \alpha \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie } \alpha \neq 0,$$

$$d(\beta) = e_n + (\beta - 1)e_{nn} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \beta \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie } \beta \in K^*.$$

²Od *inductive-projective limit*.

Rysunek 1.2: Rysunek ilustrujący zależności pomiędzy grupami przedstawionymi w Rozdziale 1.1.



Macierze $t_{ij}(\alpha)$ nazywamy transwekcjami. Klasyczne jest twierdzenie mówiące, że zbiór wszystkich $t_{ij}(\alpha)$ wraz ze wszystkimi macierzami $d(\beta)$ generuje pełną grupę liniową, podczas gdy zbiór samych transwekcji generuje specjalną grupę liniową. Dla dowolnego pierścienia zbiorem generującym jest zbiór wszystkich transwekcji wraz ze wszystkimi macierzami diagonalnymi. Grupę unitrójkątną generują z kolei wszystkie transwekcje $t_{ij}(\alpha)$ takie, że $i < j$, natomiast grupę trójkątną - generatory $UT_n(R)$ oraz macierze diagonalne.

Niestety ani dla grupy Vershika-Kerova ani dla grupy macierzy nieskończonych górnótrójkątnych nie jest znany do tej pory żaden (nietrywialny³) zbiór generatorów. Stanowi to pewne utrudnienie w badaniu tych grup. Należy jednak wspomnieć, że problem znajdowania generatorów był badany dla pewnej podgrupy grupy Vershika-Kerova. Dokładniej, chodzi o grupę $GL_{Rf}(R)$ - macierzy, które w każdym wierszu mają skończoną liczbę elementów niezerowych oraz których odwrotności również posiadają tę własność. Zagadnienie to było rozpatrywane przez P. Vermesa oraz F. Ayresa. Zanim przytoczymy rozwiązanie tego problemu wprowadzimy pewne pojęcie, które będzie powracać w naszych rozważaniach.

Definicja 1.2.1. Macierz m wymiaru skończonego bądź nieskończonego nazywamy blokowo-diagonalną, jeśli jest macierzą blokową, tzn.

$$m = \left[\begin{array}{c|c|c} m_{11} & m_{12} & \cdots \\ \hline m_{21} & m_{22} & \\ \hline \vdots & & \ddots \end{array} \right] \quad \text{gdzie } m_{ij} \in M_{i'j'}(R) \quad \text{dla pewnych } i', j'$$

taką, że jeśli $i = j$, to $i' = j'$ oraz jeśli $i \neq j$, to m_{ij} jest macierzą zerową.

A zatem, macierze blokowo-diagonalne są postaci

$$m = \left[\begin{array}{c|c|c} m_1 & 0 & \cdots \\ \hline 0 & m_2 & \\ \hline \vdots & & \ddots \end{array} \right] \quad \text{gdzie } m_i \in M_{i'i'}(R) \quad \text{dla pewnych } i'.$$

Okazuje się, że to właśnie tej postaci macierze generują naszą grupę. Mianowicie prawdziwe są twierdzenia

Twierdzenie 1.2.1 (F. Ayres, [4]). *Dowolna macierz z grupy $GL_{Rf}(\mathbb{C})$ może być zapisana jako iloczyn macierzy trójkątnej z tej grupy oraz dwóch macierzy blokowo-diagonalnych.*

Twierdzenie 1.2.2 (F. Ayres, [4]). *Dowolna macierz z grupy $GL_{RCf}(\mathbb{C})$ może być zapisana jako iloczyn co najwyżej czterech macierzy blokowo-diagonalnych.*

Powyższe twierdzenia zostały sformułowane przez autora dla macierzy nad ciałem liczb zespolonych, jednak czytając dowody można dostrzec, że rezultat pozostaje prawdziwy dla dowolnego ciała, a także szerokiej klasy pierścieni. Podobnie jest zresztą z jeszcze jednym wynikiem, który tu przytaczamy, a którym posłużymy się w dalszej części pracy. Jego punkt

³Mamy tu na myśli taki, który jest różny od całej grupy. Oczywiście nietrudno stwierdzić, że grupa $GL_{VK}(R)$ jest generowana przez wszystkie elementy $T_\infty(R)$ i $GL(R)$, jednak nie rozwiązuje to problemu generatorów $T_\infty(R)$.

pierwszy został najpierw udowodniony dla przypadku macierzy nad ciałem liczb zespolonych, a następnie, w naturalny sposób uogólniony przez W. Hołubowskiego dla przypadku macierzy nad dowolnym pierścieniem łącznym, z 1. Dowody przedstawione w pracach tych autorów pozwalają nam zaobserwować prawdziwość punktu drugiego zaprezentowanego tu twierdzenia.

Twierdzenie 1.2.3 (W. Hołubowski). *Niech R będzie pierścieniem łącznym, z jedyneką.*

1. *Grupa $UT_{Rf}(R)$ jest generowana przez macierze blokowo-diagonalne. Ponadto, każdy element tej grupy jest iloczynem co najwyżej dwóch takich macierzy.*
2. *Jeśli R jest pierścieniem przemiennym, to grupa $T_{Rf}(R)$ jest generowana przez macierze blokowo-diagonalne. Ponadto, każdy element tej grupy jest iloczynem co najwyżej dwóch takich macierzy.*

1.3 Badania związane z tematyką macierzy nieskończonych

Wspomnimy tu o kilku zastosowaniach macierzy nieskończonych.

Można zauważyć, że macierze (dowolnego wymiaru) odgrywają ważną rolę w algebrze. W szczególności udowodniono, że macierze nieskończone posiadają własności, które są określane jako uniwersalne. Dokładniej, jeśli F jest dowolnym ciałem, a A - dowolną F - algebrą skończonego lub przeliczalnego wymiaru, to A ma wierną reprezentację w algebrze $M_{Rf}(F)$. Ponadto, jeśli algebra A ma jedynekę, to można wybrać reprezentację taką, że obrazem tej jedynki jest macierz jednostkowa. Analogiczny rezultat jest prawdziwy dla grupoidów, tzn. jeśli G jest dowolnym skończonym lub przeliczalnym grupoidem, to istnieje zanurzenie G w $M_{\infty}(R)$ dla dowolnego pierścienia R . Dzięki temu, badania dotyczące wszystkich algebr nad ciałem mogą być sprowadzane do badań macierzy nieskończonych.

Czysto algebraiczne badania macierzy nieskończonych dotyczą grup, półgrup, pierścieni i modułów, a także przestrzeni liniowych. Można więc znaleźć publikacje ich dotyczące zarówno opisujące ciekawe własności oraz przykłady różnych grup, czasem opisy pseudoodwrotności, jak i artykuły związane np. z wartościami własnymi.

Interesującym wydaje się również, że można doszukać się związku pomiędzy logiką matematyczną a macierzami nieskończonymi, który prowadzi do zastosowań w teorii grup.

Macierze nieskończone pojawiają się i znajdują zastosowania w różnych zagadnieniach, nie zawsze czysto algebraicznych. Jedno z takich zastosowań było motywacją do podjęcia badań nad takimi macierzami pod koniec XIX wieku.

Rozważmy mianowicie równanie różniczkowe. Jego rozwiązanie możemy zapisać w postaci szeregu Laurenta. A zatem, aby poznać rozwiązanie, możemy rozwiązać układ równań wiążący współczynniki szeregu. Otrzymujemy więc układ przeliczalnie wielu równań z przeliczalnie wieloma niewiadomymi. Analogicznie, próby rozwiązywania równań całkowych doprowadziły do rozważań dotyczących nieskończonych form liniowych. Badania te pomogły wskazać związki pomiędzy istnieniem rozwiązania nieskończonego układu równań liniowych oraz istnienia macierzy odwrotnej (lub jednostronnie odwrotnej) do pewnej macierzy nieskończonej, a także zauważyć związki pomiędzy zbieżnością pewnych szeregów a

ograniczonością współczynników w odpowiedniej macierzy nieskończonej. Rozważania te oraz pokrewne były i są kontynuowane. Między innymi, problemem wiążącym szeregi oraz macierze nieskończone jest pytanie czy szereg, który powstaje z szeregu zbieżnego poprzez zastąpienie każdego wyrazu pewną (skończoną) kombinacją liniową wyrazów szeregu wyjściowego, pozostaje zbieżny, a jeśli tak, to czy zmienia się jego suma. Podobne tematy są poruszane w pracach związanych z ciągami prawie zbieżnymi oraz statystycznie zbieżnymi. Macierze nieskończone znalazły też zastosowanie w rozważaniach dotyczących funkcji holomorficznych, teorii operatorów, a także aproksymacji w przestrzeniach Hilberta oraz statystyce. Wymienione problemy zostały sprowadzone do pewnych nieskończonych układów równań liniowych z przeliczalną liczbą niewiadomych. Stąd, macierze nieskończone są badane przez wielu autorów, a nieskończone układy równań zajmują specjalne miejsce w algebrze liniowej (i nie tylko). Od pierwszych prób ich rozwiązywania, które zostały podjęte ponad wiek temu i które polegały na zastąpieniu danego układu odpowiednio "dużym" układem skończonym, poprzez formułowanie różnych warunków koniecznych i dostatecznych na istnienie rozwiązania, aż po metody numeryczne, można powiedzieć, że równania, które można wyrazić za pomocą macierzy nieskończonych budzą zainteresowanie matematyków.

Macierze nieskończone pojawiają się również w mechanice kwantowej. Już w latach dwudziestych XX - ego wieku operatory działające na stanach kwantowych zostały opisane za pomocą macierzy nieskończonych, które służyły m.in. do reprezentacji stanu układu, a także do opisu eksperymentów symulujących pracę akceleratorów cząstek. Występujące w tych zagadnieniach macierze mogą kodować informacje o możliwych oddziaływaniach między cząstkami. Jednym z ważnych problemów tej teorii jest zagadnienie własne. Inne problemy tej teorii są m.in. związane z rachunkiem prawdopodobieństwa.

Kolejnym zastosowaniem macierzy nieskończonych jest numeryczne rozwiązywanie pewnych równań różniczkowych cząstkowych⁴.

Nasze macierze znalazły też zastosowanie w nieskończonym programowaniu liniowym, a więc zagadnieniach związanych z procesami Markova w przestrzeniach borelowskich, projektowaniu systemów kontrolnych, problemami "wąskiego gardła". Pojawiają się one również w półnieskończonym programowaniu liniowym, np. przy różnych problemach statystycznych czy planowaniu trajektorii robotów.

⁴Dokładniej, stwierdzenie to dotyczy macierzy diagonalnie dominujących.

ROZDZIAŁ

2

KOMUTANTY PEWNYCH PODGRUP GRUPY $GL_{VK}(R)$

W tym rozdziale wyznaczymy komutanty podgrup grupy Vershika-Kerova. Ponadto wskażemy dolne ciągi centralne oraz ciągi komutantów badanych podgrup.

Rozważania rozpoczniemy od informacji dotyczących komutatorów macierzy skończonego wymiarowych. Następnie zbadamy grupy macierzy nieskończonych, które w skończonej liczbie wierszy różnią się od macierzy jednostkowej. Kolejnym krokiem będzie wskazanie ciągów dolnego centralnego oraz komutantów grupy macierzy nieskończonych górnotrójkątnych, które w każdym wierszu mają skończoną liczbę elementów niezerowych. W ostatnim podrozdziale połączymy te wyniki.

2.1 Komutatory w grupach macierzy skończonego wymiaru

Rozdział rozpoczynamy od przypomnienia podstawowych definicji.

Definicja 2.1.1. Dla dowolnej grupy G oraz $g, h \in G$ element $g^{-1}h^{-1}gh$ nazywamy komutatorem g i h . Oznaczamy go $[g, h]$.

Definicja 2.1.2. Jeśli H_1, H_2 są podgrupami G , to ich (wzajemnym) komutantem (lub grupą pochodną) nazywamy podgrupę G , która jest generowana przez wszystkie komutatory postaci $[h_1, h_2]$, gdzie $h_1 \in H_1, h_2 \in H_2$. Komutanta H_1, H_2 oznaczamy symbolem $[H_1, H_2]$.

Dla grupy G kładziemy

$$G^{(0)} = G, \quad G^{(n+1)} = [G^{(n)}, G^{(n)}] \quad \text{dla } n \geq 0.$$

Definicja 2.1.3. Ciąg podgrup $G = G^{(0)} \geq G^{(1)} \geq G^{(2)} \geq G^{(3)} \geq \dots$ nazywamy ciągiem komutantów G (lub ciągiem pochodnych).

Grupę, dla której $G^{(n)} = \{1\}$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ nazywamy rozwiązalną, a najmniejszą liczbę n spełniającą ten warunek - stopniem jej rozwiązalności.

Wprowadzamy ponadto oznaczenie

$$\gamma_1(G) = G, \quad \gamma_{n+1}(G) = [\gamma_n(G), G] \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Definicja 2.1.4. Ciąg podgrup $G = \gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) \geq \gamma_3(G) \geq \gamma_4(G) \geq \dots$ nazywamy dolnym ciągiem centralnym G .

Grupę, dla której $\gamma_n(G) = \{1\}$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ nazywamy nilpotentną, natomiast najmniejszą liczbę n spełniającą tę równość - stopniem jej nilpotentności. Grupę taką, że $\cap_n \gamma_n(G) = \{1\}$ nazywamy rezydualnie nilpotentną.

Nas oczywiście będą interesowały komutatory w grupach macierzowych. Dla tychże grup skończonego wymiaru prawdziwy jest poniższy

Lemat 2.1.1. *Niech R będzie łącznym, przemiennym pierścieniem, który spełnia warunek $sr(R) = 1$, oraz zawiera element θ taki, że $\theta, 1 - \theta \in R^*$. Wtedy*

1. $[GL_n(R), GL_n(R)] = SL_n(R)$;
2. $[SL_n(R), SL_n(R)] = SL_n(R)$;
3. $[T_n(R), T_n(R)] = UT_n(R)$;
4. $\gamma_i(UT_n(R)) = UT_n^{i-1}(R)$ dla $1 \leq i \leq n$;
5. $(UT_n(R))^{(i)} = UT_n^{2^i-1}(R)$ dla $1 \leq i \leq \lfloor \log_2 n \rfloor$.

Dowód: Dowody są albo uogólnieniami albo bezpośrednimi wnioskami z [27] (rozdz.1), [2] (chap.2), oraz [14, 15, 47]. $\square$

Oprócz opisu komutantów pewnych grup, będziemy zainteresowani pojęciem, które jest ściśle z komutantem związane.

Definicja 2.1.5. Jeśli każdy element z komutanta grupy G możemy przedstawić jako iloczyn co najwyżej m komutatorów, oraz m jest najmniejszą liczbą o tej własności, to m nazywamy szerokością komutanta grupy G i piszemy $c(G) = m$. W przeciwnym razie mówimy, że szerokość komutanta jest nieskończona i piszemy $c(G) = \infty$.

W przypadku, gdy pierścień jest dowolny, wskazano przykłady (w pracy [14]), dla których szerokość komutanta pewnych grup macierzowych jest nieskończona. Niemniej jednak, przy pewnych założeniach, szerokość ta jest nie tylko skończona, ale też wyznaczona dość dokładnie. Między innymi znane są twierdzenia

Twierdzenie 2.1.1 (R.K. Dennis, L.N. Vaserstein). *Niech R będzie pierścieniem łącznym, przemiennym, takim, że $sr(R) = 1$. Wtedy*

$$c(GL_n(R)) \leq c(SL_n(G)) \leq 5.$$

Twierdzenie 2.1.2 (E. Wheland, L.N. Vaserstein). *Niech R będzie pierścieniem łącznym, przemiennym, takim, że $sr(R) = 1$. Załóżmy ponadto, że $n \geq 3$ albo $n = 2$ i 1 może być przedstawiona jako suma dwóch elementów odwracalnych w R . Wtedy $c(GL_n(R)) \leq 2$.*

Nietrudno zauważyć, że założeniem stale powtarzającym się w tym rozdziale jest stabilna ranga pierścienia równa 1. Stabilna ranga ma istotny wpływ na szerokość komutanta (dokładniej: im większa ranga, tym większa szerokość) oraz stopień skomplikowania opisu tej podgrupy. W dalszej części rozdziału będziemy powracać do założenia $sr(R) = 1$.

Jako, że macierze nieskończone trójkątne stanowią ważną i interesującą podgrupę grupy Vershika - Kerova, zacznijmy od uzyskania informacji na temat szerokości $c(T_n(R))$. W pracy [14] można znaleźć następujący

Lemat 2.1.2 (R.K. Dennis, L.N. Vaserstein). *Niech R będzie pierścieniem łącznym, z 1, oraz niech $n \geq 3$. Wtedy każda macierz należąca do grupy $T_n(R) \cap E_n(R)$ jest iloczynem co najwyżej dwóch komutatorów z $E_n(R)$.*

Wynik ten, aczkolwiek ciekawy, nie pozwala nam niestety stwierdzić czy podobne ograniczenie jest prawdziwe, gdy chcemy wyrazić macierz trójkątną (a dokładniej unitrójkątną) jako iloczyn komutatorów elementów z $T_n(R)$. Niemniej jednak autorzy umieścili w dowodzie tegoż lematu stwierdzenie, które formułujemy tu jako

Lemat 2.1.3 (R.K. Dennis, L.N. Vaserstein). *Niech R będzie pierścieniem łącznym, z 1. Każda macierz $a \in UT_n^1(R)$ może być zapisana jako komutator macierzy $e + \sum_{i=1}^{n-1} e_{i,i+1}$ oraz pewnej macierzy $t \in T_n(R)$.*

Dowód: Niech $a \in UT_n^1(R)$. Dla uproszczenia notacji $e + \sum_{i=1}^{n-1} e_{i,i+1}$ oznaczmy przez s . Definiujemy $\tilde{a}$ jako iloczyn $s \cdot a$. Macierz ta spełnia warunek $\tilde{a}_{i,i+1} = 1$ dla wszystkich $1 \leq i \leq n-1$. Pokażemy, że mamy równość $u^{-1}\tilde{a}u = s$ dla pewnej macierzy unitrójkątnej u . Rozpisując $\tilde{a}u = us$ otrzymujemy, że współczynniki u muszą spełniać poniższy układ równań.

$$u_{k,l-1} = u_{k+1,l} + \sum_{i>2} \tilde{a}_{k,k+i} u_{k-i,l} \quad \text{dla } l-k \geq 2 \quad (2.1)$$

Zauważmy, że współczynniki u z kolumny $l-1$ - szej zależą od współczynników u z kolumny l - tej. Możemy najpierw ustalić dowolnie ostatnią kolumnę u , a następnie wyliczać z (2.1) kolejne współczynniki z kolumny $l-2$ - giej, $l-3$ - ciej, itd. Mamy więc $usa = su$, a stąd $a = [s, u^{-1}]$, czyli tezę. $\square$

Posługując się powyższym lematem, możemy udowodnić

Lemat 2.1.4. *Niech R będzie pierścieniem łącznym, przemiennym, z 1, zawierającym element θ taki, że $\theta, 1-\theta \in R^*$. Wtedy $c(T_n(R)) \leq 2$.*

Dowód: Nietrudno zauważyć, że $[T_n(R), T_n(R)] \subseteq UT_n(R)$. Rozważmy dowolną macierz $a \in UT_n(R)$.

Jeśli $a \in UT_n^1(R)$, to oczywiście z Lematu 2.1.3, otrzymujemy, że a jest komutatorem.

Założmy teraz, że $a \in UT_n(R) \setminus UT_n^1(R)$. Definiujemy macierze

$$b_1 = e_n - \sum_{i=1}^{n-1} a_{i,i+1}(1-\theta)^{-1}(-\theta)^{i \bmod 2} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12}(\theta^{-1}-1)^{-1} & & & \\ & 1 & a_{23}(\theta-1)^{-1} & & \\ & & 1 & a_{34}(\theta^{-1}-1)^{-1} & \\ & & & 1 & a_{45}(\theta-1)^{-1} \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

oraz

$$b_2 = \sum_{i=1}^n \theta^{i \bmod 2} e_{ii} = \begin{bmatrix} \theta & & & \\ & 1 & & \\ & & \theta & \\ & & & \ddots \end{bmatrix},$$

gdzie θ jest elementem R pojawiającym się w założeniu, tzn. $\theta, 1-\theta \in R^*$. Ich komutator $b = [b_1, b_2]$ spełnia warunek $b_{i,i+1} = a_{i,i+1}$ dla $1 \leq i \leq n-1$. Kładziemy teraz $c = b^{-1}a$. Ponieważ $a_{i,i+1} = b_{i,i+1} + c_{i,i+1}$, mamy $c_{i,i+1} = 0$. Stąd, na podstawie Lematu 2.1.3, macierz c jest komutatorem pewnych macierzy trójkątnych. Ostatecznie więc, każda macierz $a \in UT_n(R)$ może być przedstawiona jako iloczyn co najwyżej dwóch komutatorów. $\square$

Analogicznie udowodnimy kolejne dwa lematy.

Lemat 2.1.5. *Niech R będzie pierścieniem łącznym, z 1, oraz niech $m \geq 2$. Wtedy każda macierz $a \in UT_n^m(R)$ jest komutatorem macierzy $e_n + \sum_{i=1}^{n-1} e_{i,i+1}$ oraz pewnej macierzy $u \in UT_n^{m-1}(R)$.*

Dowód: Niech $a \in UT_n^m(R)$. Macierz $e_n + \sum_{i=1}^{n-1} e_{i,i+1}$ oznaczmy przez s . Zdefiniujemy $\tilde{a}$ jako iloczyn $s \cdot a$. Macierz $\tilde{a}$ ma następujące własności:

1. $\tilde{a}_{i,i+1} = 1$, gdyż $\tilde{a}_{i,i+1} = s_{ii}a_{i,i+1} + s_{i,i+1}a_{i+1,i+1} = 1 \cdot a_{i,i+1} + s_{i,i+1} \cdot 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1$;
2. $\tilde{a}_{uv} = 0$ dla wszystkich par indeksów u, v spełniających warunki $1 \leq u \leq n-2$, $u+2 \leq v \leq u+m$; wynika to z faktu, że $\tilde{a}_{uv} = \sum_{i=u}^v s_{ui}a_{iv} = s_{uu}a_{uv} + s_{u,u+1}a_{u+1,v} = 0$.

W dowodzie Lematu 2.1.3 zauważyliśmy, że macierz $\tilde{a}$ o własnościach jakie wymieniliśmy powyżej, jest sprzężona z macierzą s . Dokładniej, mamy równość $u^{-1}\tilde{a}u = s$, pod warunkiem, że współczynniki macierzy u spełniają układ równań (2.1). Zauważmy, że jeśli w tymże układzie macierz a spełnia warunek $a_{i,i+j} = 0$ dla $a \leq j \leq m$, $1 \leq i \leq n-j$, to (2.1) przyjmie formę

$$u_{k,l-1} = u_{k+1,l} + \sum_{m>2} \tilde{a}_{k,k+i} u_{k-i,l}. \quad (2.2)$$

Można zaobserwować, że równania układu (2.2), w których $l-k \leq m-1$, są postaci $u_{k,l-1} = u_{k+1,l}$. Dla tych k, l , możemy zatem przyjąć $u_{k,l-1} = 0$. Kolejne współczynniki wyliczamy indukcyjnie, podobnie jak przy rozwiązywaniu układu (2.1). Mając wyznaczoną macierz u , z równości $u^{-1}sau = s$, otrzymujemy $a = [s, u^{-1}]$. $\square$

Lemat 2.1.6. *Niech R będzie pierścieniem łącznym, z 1, oraz niech $m \geq 1$. Dowolna macierz $a \in UT_n^{2^m-1}(R)$ może być zapisana jako komutator macierzy $e_n + \sum_{i=1}^{n-2^{m-1}} e_{i,i+2^{m-1}}$ oraz pewnej macierzy $u \in UT_n^{2^{m-1}-1}(R)$.*

Dowód: Postępujemy tu podobnie jak przy dowodzie poprzednich lematów. Ustalamy, że $a \in UT_n^{2^m-1}(R)$ oraz, że $e_n + \sum_{i=1}^{n-2^{m-1}} e_{i,i+2^{m-1}}$ będziemy oznaczać przez s . Analogicznie jak poprzednio kładziemy $\tilde{a} = s \cdot a$. Mamy $u\tilde{a} = su$ pod warunkiem, że spełniony jest układ równań

$$u_{k,l-2^{m-1}} = u_{k+2^{m-1},l} - \tilde{a}_{kl} + \sum_{2^{m-1} \leq 2^m l - i \leq i-k} u_{ki} \tilde{a}_{il} \quad \text{dla } l-k \geq 2^{m-1}. \quad (2.3)$$

Tym razem możemy ustalić, że $u_{kl} = 0$ dla $l-k < 2^{m-1}$ oraz wyznaczyć pozostałe współczynniki za pomocą (2.3). Ostatecznie otrzymujemy $a = [s, u]$. $\square$

2.2 Komutatory w grupach macierzy nieskończonego wymiaru

2.2.1 Grupa $GL_{RB}(R)$ i jej komutant

Nasze rozważania rozpoczniemy od badania grup macierzy nieskończonych postaci

$$\left[\begin{array}{c|c} g & h \\ \hline 0 & e_\infty \end{array} \right], \quad (2.4)$$

gdzie $g \in GL_n(R)$, $n \in \mathbb{N}$ jest ustalone. Grupę tę oznaczamy $GL_{RB}(n, R)$. Sumę grup $\cup_{n=1}^\infty GL_{RB}(n, R)$, która również jest grupą, oznaczamy przez $GL_{RB}(R)$.

W $GL_{RB}(n, R)$ wprowadzamy podgrupę składającą się z elementów postaci (2.4), gdzie $g \in SL_n(R)$, natomiast sumę tych podgrup oznaczamy przez $SL_{RB}(R)$. Warto przypomnieć, że zostało udowodnione (w pracy [12]), że dla dowolnego ciała F grupa $SL_{RB}(F)$ jest prosta.

Naturalnym jest przypuszczać, że $SL_{RB}(n, R)$ jest komutantem $GL_{RB}(n, R)$. Istotnie, udowodnimy teraz poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 2.2.1. *Niech R będzie pierścieniem łącznym, przemennym, z 1, oraz niech $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Komutantem grupy $GL_{RB}(n, R)$ jest grupa $SL_{RB}(n, R)$.*
2. *Komutantem grupy $SL_{RB}(n, R)$ jest grupa $SL_{RB}(n, R)$.*
3. *Prawdziwa jest równość $[SL_{RB}(n, R), GL_{RB}(n, R)] = SL_{RB}(n, R)$.*

Dowód: (1) Niech $m_1, m_2 \in GL_{RB}(n, R)$ będą postaci

$$m_1 = \left[\begin{array}{c|c} g_1 & h_1 \\ \hline 0 & e \end{array} \right], \quad m_2 = \left[\begin{array}{c|c} g_2 & h_2 \\ \hline 0 & e \end{array} \right]. \quad (2.5a)$$

Wtedy ich komutator wynosi

$$[m_1, m_2] = \left[\begin{array}{c|c} [g_1, g_2] & h \\ \hline 0 & e \end{array} \right], \quad (2.5b)$$

gdzie

$$h = g_1^{-1}(g_2^{-1} - e_n)h_1 + g_1^{-1}g_2^{-1}(g_1 - e_n)h_2. \quad (2.5c)$$

Ponieważ $[g_1, g_2] \in SL_n(R)$, otrzymujemy stąd, że $[GL_{RB}(n, R), GL_{RB}(n, R)] \subseteq SL_{RB}(n, R)$.

Założmy teraz, że s postaci (2.4) należy do $SL_{RB}(n, R)$. Z Lematu 2.1.1 wnioskujemy, że dla dowolnej macierzy $g \in SL_n(R)$, g można przedstawić jako iloczyn skończonej liczby komutatorów. Skupmy się zatem na h .

Naszym celem jest znalezienie takich $m_1, m_2 \in GL_{RB}(n, R)$ postaci (2.5a), że spełniona jest zależność:

$$(g_1 - e_n)h_2 + (e_n - g_2)h_1 = g_2g_1h.$$

W tym celu kładziemy

$$g_1 = e_n + \sum_{i=1}^{n-1} e_{i,i+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & 1 & 1 & 0 & & 0 \\ & & & 1 & 1 & 0 \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad g_2 = e_n - e_{n1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & & 1 & \\ -1 & 0 & & & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$h_1 = \begin{bmatrix} (g_2g_1h)_{r(n)} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad h_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ (g_2g_1h)_{r(1)} \\ (g_2g_1h)_{r(2)} \\ \vdots \\ (g_2g_1h)_{r(n-1)} \end{bmatrix},$$

gdzie przez $(a)_{r(i)}$ rozumiemy i -ty wiersz macierzy a . Udało nam się zatem uzyskać komutator postaci (2.4) o dowolnej macierzy h . Teraz, aby zakończyć dowód wystarczy zauważyć, że

$$\left[\begin{array}{c|c} g & h \\ \hline 0 & e_\infty \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} [g_1, g_2] & h \\ \hline 0 & e_\infty \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} [g_1, g_2]^{-1}g & 0 \\ \hline 0 & e_\infty \end{array} \right]. \quad (2.6)$$

Ponieważ macierz $[g_1, g_2]^{-1}g \in SL_n(R)$, może ona być przedstawiona jako iloczyn skończonej liczby komutatorów. Ostatecznie więc $[GL_{RB}(n, R), GL_{RB}(n, R)] = SL_{RB}(n, R)$.

(2) Zauważmy, że dla pierścienia R spełniającego założenia naszego twierdzenia mamy równość $[SL_n(R), SL_n(R)] = SL_n(R)$. Ponadto w dowodzie podpunktu (1) macierze g_1 oraz g_2 , wybrane przez nas do skonstruowania dowolnej macierzy h , są elementami grupy $SL_n(R)$. Mamy zatem $[SL_{RB}(n, R), SL_{RB}(n, R)] = SL_{RB}(n, R)$.

(3) Prawdziwość ostatniego podpunktu wynika oczywiście z podpunktu drugiego. $\square$

Z powyższego twierdzenia wynikają następujące wnioski.

Wniosek 2.2.1. Niech R będzie pierścieniem łącznym, z 1. Równość $[GL_{RB}(R), GL_{RB}(R)] = SL_{RB}(R)$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $[GL_n(R), GL_n(R)] = SL_n(R)$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Dowód: Jeśli dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy $[GL_n(R), GL_n(R)] = SL_n(R)$, to rozumując jak w dowodzie Twierdzenia 2.2.1, mamy $[GL_{RB}(n, R), GL_{RB}(n, R)] = SL_{RB}(n, R)$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ każdy element z $SL_{RB}(R)$ należy do $SL_{RB}(n, R)$ dla pewnego n , a także każdy element $[GL_{RB}(R), GL_{RB}(R)]$ jest postaci $[g, h]$, gdzie $g, h \in GL_{RB}(n, R)$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, to mamy $[GL_{RB}(R), GL_{RB}(R)] = SL_{RB}(R)$.

Jeśli natomiast mamy $[GL_{RB}(R), GL_{RB}(R)] = SL_{RB}(R)$, to dowolna macierz m postaci (2.4), gdzie $g \in SL_n(R)$ ($n \in \mathbb{N}$, dowolne), należy do komutanta $[GL_{RB}(R), GL_{RB}(R)]$. Stąd na podstawie wzoru (2.6) wynika, że g jest iloczynem elementów komutanta $GL_n(R)$. Zatem $SL_n(R) \subseteq [GL_n(R), GL_n(R)]$. Ponieważ prawdziwa jest inkluzja $[GL_n(R), GL_n(R)] \subseteq SL_n(R)$, która kończy nasz dowód. $\square$

Wniosek 2.2.2. *Jeśli R jest pierścieniem łącznym, przemiennym, z 1, takim, że $sr(R) = 1$, a także zawierającym element θ taki, że $\theta, 1 - \theta \in R^*$, to prawdziwa jest nierówność*

$$c(GL_{RB}(R)) \leq 3.$$

Dowód: Dla pierścienia spełniającego podane założenia mamy $[GL_{RB}(R), GL_{RB}(R)] = SL_{RB}(R)$. Dowolny element grupy $SL_{RB}(R)$ może być przedstawiony jako

$$\left[\begin{array}{c|c} g & h \\ \hline 0 & e_\infty \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} g' & h \\ \hline 0 & e_\infty \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} g'' & 0 \\ \hline 0 & e_\infty \end{array} \right],$$

gdzie pierwszy z czynników jest komutatorem skonstruowanym jak w dowodzie Twierdzenia 2.2.1, natomiast $g'' \in SL_n(R)$. Zatem na mocy Twierdzeń 2.1.2 oraz 2.2.1, dowolna macierz z komutanta może być przedstawiona jako iloczyn co najwyżej trzech komutatorów. $\square$

2.2.2 Komutanty grup $T_{RB}(R)$ oraz $UT_{RB}(R)$

Przejdziemy teraz do zbadania kolejnych dwóch istotnych podgrup grupy $GL_{RB}(R)$.

Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ podgrupę $GL_{RB}(n, R)$, składającą się z macierzy postaci

$$\left[\begin{array}{c|c} g & h \\ \hline 0 & e_\infty \end{array} \right], \tag{2.7}$$

gdzie $g \in T_n(R)$, oznaczamy przez $T_{RB}(n, R)$, natomiast sumę tych grup przez $T_{RB}(R)$. Z kolei zbiór macierzy postaci (2.7), dla których $g \in UT_n(R)$, oznaczamy przez $UT_{RB}(n, R)$, natomiast sumę $\cup_{i=1}^\infty UT_{RB}(n, R)$ przez $UT_{RB}(R)$. Dla tychże grup prawdziwe jest poniższe

Twierdzenie 2.2.2. *Niech R będzie pierścieniem łącznym, przemiennym, z 1, stabilnej rangi 1, oraz zawierającym element θ taki, że $\theta, 1 - \theta \in R^*$. Niech ponadto $n \in \mathbb{N}$. Wtedy*

1. $[T_{RB}(n, R), T_{RB}(n, R)] = UT_{RB}(n, R)$;
2. $[UT_{RB}(n, R), T_{RB}(n, R)] = UT_{RB}(n, R)$.

Dowód: Ponieważ mamy równość

$$[m_1, m_2] = \left[\left[\begin{array}{c|c} g_1 & h_1 \\ \hline 0 & e_\infty \end{array} \right], \left[\begin{array}{c|c} g_2 & h_2 \\ \hline 0 & e_\infty \end{array} \right] \right] = \left[\begin{array}{c|c} [g_1, g_2] & h \\ \hline 0 & e_\infty \end{array} \right], \quad (2.8a)$$

gdzie

$$h = g_1^{-1}(g_2^{-1} - e_n)h_1 + g_1^{-1}g_2^{-1}(g_1 - e_n)h_2, \quad (2.8b)$$

a także z Rozdziału 2.1. wiemy, że $[T_n(R), T_n(R)] = [UT_n(R), T_n(R)] = UT_n(R)$, wystarczy wykazać, że dla pewnych $m_1 \in UT_{RB}(n, R)$, $m_2 \in T_{RB}(n, R)$ możemy uzyskać dowolną macierz h . Istotnie, wystarczy zdefiniować m_1 i m_2 następująco:

$$g_1 = e_n, \quad g_2 = (1-\theta) \cdot e_n = \begin{bmatrix} 1-\theta & & & \\ & 1-\theta & & \\ & & 1-\theta & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad h_1 = \begin{bmatrix} \theta^{-1}(g_2 g_1 h)_{r(1)} \\ \theta^{-1}(g_2 g_1 h)_{r(2)} \\ \vdots \\ \theta^{-1}(g_2 g_1 h)_{r(n)} \end{bmatrix}, \quad h_2 = \mathbf{0},$$

gdzie θ jest elementem R pojawiającym się w założeniach naszego twierdzenia. $\square$

Z Twierdzenia 2.2.2 wysuwamy następujący

Wniosek 2.2.3. *Niech R będzie pierścieniem łącznym, przemiennym, z 1, stabilnej rangi 1, oraz zawierającym element θ taki, że $\theta, 1-\theta \in R^*$. Wtedy*

$$[T_{RB}(R), T_{RB}(R)] = [UT_{RB}(R), T_{RB}(R)] = UT_{RB}(R).$$

Dowód: Ponownie zauważamy, że inkluzje

$$[T_{RB}(R), T_{RB}(R)], [UT_{RB}(R), T_{RB}(R)] \subseteq UT_{RB}(R)$$

są oczywiste.

Rozważmy dowolną macierz $m \in UT_{RB}(R)$. Z definicji naszej grupy, musi istnieć liczba naturalna n taka, że $m \in UT_{RB}(n, R)$. Z Twierdzenia 2.2.2 wiemy, że m należy do komutanta $[UT_{RB}(n, R), T_{RB}(n, R)]$, który z kolei jest zawarty w $[UT_{RB}(R), T_{RB}(R)]$. To kończy dowód. $\square$

Opiszemy teraz dolny ciąg centralny oraz ciąg komutantów $UT_{RB}(n, R)$. W tym celu wprowadzimy definicje kolejnych podgrup. Mianowicie

$$UT_{RB}(n, k, R) := \left\{ \left[\begin{array}{c|c} g & h \\ \hline 0 & e_\infty \end{array} \right] \mid g \in UT_n^k(R), j > n-k \Rightarrow (h)_j = \mathbf{0} \right\} \quad \text{dla } k \geq 1.$$

Elementy tej grupy są przedstawione na Rysunku 2.1. Dodatkowo przyjmiemy, że $UT_{RB}(n, 0, R)$ pokrywa się z grupą $UT_{RB}(n, R)$.

Okazuje się, że właśnie te podgrupy są wyrazami ciągów dolnego centralnego oraz komutantów naszej grupy.

Twierdzenie 2.2.3. *Niech R będzie pierścieniem łącznym, przemiennym, z 1, oraz niech $n \in \mathbb{N}$. Wtedy*

Rysunek 2.1: Elementy grupy $UT_{RB,\infty}(n, k, R)$. Przyjmujemy, że puste miejsca oznaczają współczynniki zerowe, natomiast symbole $*$ - dowolne elementy pierścienia R .

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * & \\ & 1 & 0 & \dots & 0 & * & \vdots & \\ & & 1 & 0 & & & * & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 1 \\ \hline & & & & & & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & 1 \end{array} \right]$$

1. $\gamma_k(UT_{RB}(n, R)) = UT_{RB}(n, k-1, R)$ dla $k \geq 1$;
2. $UT_{RB}^{(k)}(n, R) = UT_{RB}(n, 2^k - 1, R)$ dla $0 \leq k \leq \lfloor \log_2 n \rfloor$.

Dowód: Oba dowody będą indukcyjne ze względu na k .

1. Oczywiście dla $k = 1$ mamy równość $\gamma_1(UT_{RB}(n, R)) = UT_{RB}(n, 0, R)$.

Założmy teraz, że teza naszego twierdzenia jest spełniona dla wszystkich i takich, że $1 \leq i \leq k$. Rozważmy wzajemny komutant $[UT_{RB}(n, k, R), UT_{RB}(n, R)]$. Jeśli m_1, m_2 są postaci (2.8a), gdzie $g_1 \in UT_n^k(R)$, $g_2 \in UT_n(R)$, to oczywiście $[g_1, g_2] \in UT_n^{k+1}(R)$, a także z Lematu 2.1.5 wiemy, że $g \in UT_n^{k+1}(R)$ można przedstawić jako komutator $g_1 \in UT_n^k(R)$ oraz $g_2 \in UT_n(R)$. Skoncentrujemy się zatem na macierzach h, h_1 oraz h_2 .

Założmy, że ostatnie k wiersze macierzy h_1 to wiersze zerowe. Zauważmy, że ponieważ $g_1 \in UT_n^k(R)$, to w $g_1 - e_n$ elementy niezerowe występują wyłącznie powyżej k -tej przekątnej. Zatem wszystkie elementy w ostatnich $k+1$ wierszach macierzy $g_1^{-1}g_2^{-1}(g_1 - e_n)h_2$ są równe 0. Z kolei dla dowolnego $j \geq 1$, jedynie ostatnie $j-1$ elementy wiersza j -tego mogą być niezerowe w produkcie $g_1^{-1}(g_2^{-1} - e_n)$. Kiedy pomnożymy je przez h_1 (otrzymując $g_1^{-1}(g_2^{-1} - e_n)h_1$), będą one mnożone przez współczynniki z ostatnich $n-j-1$ wierszy h_1 , które są zerowe. Sytuację tę ilustruje Rysunek 2.2.

Ponieważ $h = g_1^{-1}(g_2^{-1} - e_n)h_1 + g_1^{-1}g_2^{-1}(g_1 - e_n)h_2$, otrzymujemy stąd, że ostatnie $k+1$ wiersze h są wierszami zerowymi.

Chcemy jeszcze wykazać, że pozostałe wiersze h mogą być dowolne. W tym celu wy-

Rysunek 2.2: Ilustracja do dowodu Twierdzenia 2.2.3.

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & * & * & * \\ & & & & * & * \\ & & & & & * \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & * \\ & & & & 0 & * \\ & & & & \vdots & * \\ & & & & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * \\ * \\ \vdots \\ \vdots \\ * \\ * \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & * & * & & * \\ 0 & 0 & * & & \\ & & & * & * \\ & & & 0 & * \\ & & & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \uparrow \downarrow k$$

starczy położyć

$$g_1 = e_n + \sum_{i=1}^{n-k-1} e_{i,i+k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots \\ & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & & & \\ & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g_2 = e_n, \quad h_1 = \mathbf{0}, \quad h_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (g_2 g_1 h)_{r(1)} \\ \vdots \\ (g_2 g_1 h)_{r(n-k-1)} \end{bmatrix}.$$

2. Aby dowieść punktu drugiego, stosujemy tę samą metodę co w punkcie pierwszym. Dowodzimy poprawności kroku indukcyjnego, w którym koncentrujemy się na postaci macierzy h .

Niech $m_1, m_2 \in UT_{RB}(n, 2^k - 1, R)$. Oczywiście $[g_1, g_2] \in UT_n^{2^{k+1}-1}(R)$. Macierze $g_1 - e_n$ oraz $e_n - g_2$ w wierszach j - tych mają niezerowe współczynniki w ostatnich $n - j - 2^k + 1$ kolumnach; podczas, gdy h_1 oraz h_2 mogą mieć niezerowe współczynniki jedynie w pierwszych $n - 2^k + 1$ wierszach. Zatem h może mieć niezerowe współczynniki jedynie w pierwszych $n - 2^{k+1} + 1$ wierszach. Aby dowieść, że mogą być one dowolne wystarczy wziąć

$$g_1 = e_n + \sum_{i=1}^{n-2^k} e_{i,i+2^k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots \\ & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 & & \\ & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g_2 = e_n, \quad h_1 = \mathbf{0}, \quad h_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ (g_2 g_1 h)_{r(1)} \\ \vdots \\ (g_2 g_1 h)_{r(n-2^{k+1}+1)} \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

gdzie w h_2 pierwsze 2^k wiersze są zerowe. $\square$

Z powyższych rozważań otrzymujemy

Wniosek 2.2.4. Niech R będzie pierścieniem łącznym, przemennym, z 1, stabilnej rangi 1, oraz zawierającym element θ taki, że $\theta, 1 - \theta \in R^*$, oraz niech $n \in \mathbb{N}$. Wtedy grupa $UT_{RB}(n, R)$ jest nilpotentna, a jej stopień nilpotentności wynosi n .

2.2.3 Komutanty grup $T_{Rf}(R)$ i $UT_{Rf}(R)$

Zanim przejdziemy do zbadania własności komutatorów elementów grup, które będziemy omawiać w tym rozdziale, zaprezentujemy jeszcze kilka pojęć oraz własności macierzy skończonych i nieskończonych.

Zacniemy od prostego spostrzeżenia prawdziwego dla macierzy unitrójkątnych.

Stwierdzenie 2.2.1. *Niech R będzie dowolnym łącznym pierścieniem z 1, a także $k < n$, $k, n \in \mathbb{N}$.*

1. *Jeśli $a, b \in UT_n^k(R)$ oraz $ab \in UT_n^{k+1}(R)$, to $b_{i,i+k} = -a_{i,i+k}$ dla wszystkich i takich, że $1 \leq i \leq n - k$.*
2. *Jeśli $a, b \in UT_{Rf}(k, R)$ oraz $ab \in UT_{Rf}(k+1, R)$, to $b_{i,i+k} = -a_{i,i+k}$ dla wszystkich $i \in \mathbb{N}$.*

Dowód: (1) Ponieważ $ab \in UT_n^{k+1}(R)$, mamy $(ab)_{i,i+k} = 0$ dla $1 \leq i \leq n - k$. Stąd $\sum_{j=i}^{i+k} a_{ij}b_{j,i+k} = 0$. Z założenia, że $a, b \in UT_n^k(R)$ otrzymujemy więc, że $a_{ii}b_{i,i+k} + a_{i,i+k}b_{i+k,i+k} = 0$, czyli $b_{i,i+k} = -a_{i,i+k}$.

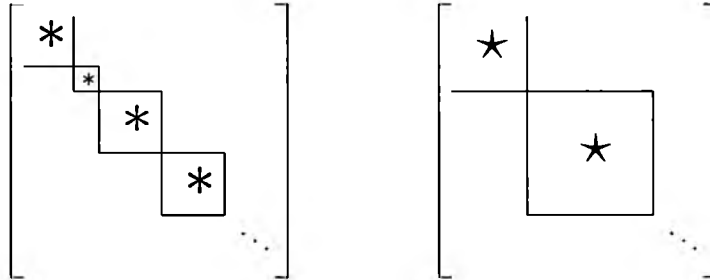
(2) Dowód jest analogiczny jak w przypadku skończonym. $\square$

Przypomnijmy, że już w Rozdziale 1 zetknęliśmy się z macierzami blokowo-diagonalnymi. Załóżmy, że mamy daną taką macierz $s = \text{Diag}(a_1, a_2, \dots)$. Ciąg $(\dim a_1, \dim a_2, \dots)$ będziemy nazywać typem s . Załóżmy, że mamy dane macierze blokowo-diagonalne s oraz t typów $(s_1, s_2, \dots)$, $(t_1, t_2, \dots)$. Jeśli spełniony jest warunek

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists k, l \in \mathbb{N} \quad s_n = \sum_{i=k}^l t_i,$$

to będziemy mówić, że t jest podmacierzą macierzy blokowo-diagonalnej s . Sytuację tę ilustruje Rysunek 2.3.

Rysunek 2.3: Pierwsza z przedstawionych macierzy jest podmacierzą blokowo-diagonalną drugiej.



Nietrudno zaobserwować, że dla wprowadzonego przez nas pojęcia prawdziwe są poniższe własności.

Stwierdzenie 2.2.2. *Jeśli s jest macierzą blokowo-diagonalną, to s^{-1} jest również macierzą blokowo-diagonalną. Ponadto typy s i s^{-1} pokrywają się.*

Stwierdzenie 2.2.3. *Jeśli s jest macierzą blokowo-diagonalną, a t jest jej podmacierzą blokowo-diagonalną, to st oraz ts również są podmacierzami blokowo-diagonalnymi s .*

Stwierdzenie 2.2.4. *Niech $s \in UT_{Rf}(n, R)$ ($n \in \mathbb{N}$) będzie macierzą blokowo-diagonalną typu $(s_1, s_2, \dots)$. Zdefiniujmy macierz s' następująco:*

$$s'_{ij} = \begin{cases} s_{ij} & \text{dla } j - i \leq m \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Wtedy s' jest podmacierzą blokowo-diagonalną s .

Macierze pojawiające się w powyższym stwierdzeniu są zilustrowane na Rysunku 2.4.

Rysunek 2.4: Ilustracja do Stwierdzenia 2.2.4. Puste miejsca oznaczają współczynniki równe 0. Symbole * oznaczają pewne (dowolne) elementy pierścienia R .

Prezentowaliśmy już twierdzenie mówiące o tym, że grupy $UT_{Rf}(R)$ oraz $T_{Rf}(R)$ są generowane przez macierze blokowo-diagonalne. Teraz udowodnimy twierdzenie analogiczne, tyle, że zachodzące dla grup $UT_{Rf}(k, R)$.

Twierdzenie 2.2.4. *Niech R będzie pierścieniem łącznym, z 1, oraz założmy, że $k \geq 0$. Grupa $UT_{Rf}(k, R)$ jest generowana przez macierze blokowo-diagonalne należące do $UT_{Rf}(k, R)$. Dokładniej, każda macierz $m \in UT_{Rf}(k, R)$ może być przedstawiona w postaci iloczynu co najwyżej dwóch macierzy blokowo-diagonalnych, które należą do $UT_{Rf}(k, R)$.*

Dowód: Dowód jest indukcyjny ze względu na k .

Dla $k = 0$ prawdziwość tezy wynika z Twierdzenia 1.2.3.

Założmy, że nasza teza jest spełniona dla wszystkich $0 \leq i \leq k$ (gdzie $k \geq 0$). Rozważmy macierz $m \in UT_{Rf}(k+1, R)$. Na podstawie założenia indukcyjnego, możemy zapisać m jako iloczyn co najwyżej dwóch macierzy blokowo-diagonalnych $\hat{m}, \tilde{m}$, takich, że $\hat{m}, \tilde{m} \in UT_{Rf}(k, R)$. Ze Stwierdzenia 2.2.1 wiemy, że $\tilde{m}_{i,i+k} = -\hat{m}_{i,i+k}$ dla $i \in \mathbb{N}$.

Definiujemy macierz a jako $e_\infty + \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{m}_{i,i+k} e_{i,i+k}$. Zauważmy, że ze Stwierdzenia 2.2.4 wynika, że a jest podmacierzą blokowo-diagonalną $\tilde{m}$ oraz $\hat{m}$. Mamy równość $m = \hat{m}\tilde{m} = (\hat{m}a)(a^{-1}\tilde{m})$. Macierz a jest podmacierzą blokowo-diagonalną zarówno $\hat{m}$, $\tilde{m}$, więc $\hat{m}a$ oraz $a^{-1}\tilde{m}$ są macierzami blokowo-diagonalnymi. Ponadto $(\hat{m}a)_{i,i+k} = (a^{-1}\tilde{m})_{i,i+k} = 0$ dla wszystkich i , zatem $\hat{m}a, a^{-1}\tilde{m} \in UT_{Rf}(k+1, R)$. Udało nam się zatem przedstawić m jako iloczyn dwóch macierzy blokowo-diagonalnych z $UT_{Rf}(k+1, R)$. $\square$

Zauważmy teraz, że prawdziwy jest następujący

Lemat 2.2.1. *Założmy, że R jest pierścieniem łącznym, z 1, zawierającym element θ taki, że $\theta, 1 - \theta \in R^*$.*

1. *Każda macierz blokowo-diagonalna $m \in UT_{Rf}(R)$ może być przedstawiona w postaci iloczynu co najwyżej dwóch komutatorów z grupy $[UT_{Rf}(R), T_{Rf}(R)]$.*
2. *Niech $k \in \mathbb{N}$. Każda macierz blokowo-diagonalna $m \in UT_{Rf}(k, R)$ może być przedstawiona jako komutator z grupy $[UT_{Rf}(k - 1, R), UT_{Rf}(R)]$.*
3. *Niech $k \in \mathbb{N}$. Każda macierz blokowo-diagonalna $m \in UT_{Rf}(2^k - 1, R)$ może być przedstawiona jako komutator z grupy $[UT_{Rf}(2^{k-1} - 1, R), UT_{Rf}(2^{k-1} - 1, R)]$.*

Dowód: Lemat jest wnioskiem z wyników przedstawionych w Rozdziale 2.1. Niech $m = \text{Diag}(m_1, m_2, \dots)$, gdzie $m_i \in UT_{n_i}(R)$, należy do grupy wymienionej w którymś z podpunktów. Korzystamy z Lematów 2.1.4, 2.1.5 i 2.1.6. Każda z macierzy m_i może być przedstawiona jako

1. iloczyn dwóch komutatorów $\hat{c}_i, \tilde{c}_i$ z grupy $[UT_{n_i}(R), T_{n_i}(R)]$, w przypadku 1. ;
2. komutator c_i z grupy $[UT_{n_i}^{k-1}(R), UT_{n_i}(R)]$, w przypadku 2. ;
3. komutator c_i z grupy $[UT_{n_i}^{2^{k-1}-1}(R), UT_{n_i}^{2^{k-1}-1}(R)]$, w przypadku 3.

Zatem m może być zapisana jako

1. iloczyn dwóch komutatorów $\hat{c} = \text{Diag}(\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots)$, $\tilde{c} = \text{Diag}(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots)$, gdzie $\hat{c}, \tilde{c} \in [UT_{Rf}(R), T_{Rf}(R)]$, w przypadku 1. ;
2. komutator $c = \text{Diag}(c_1, c_2, \dots) \in [UT_{Rf}(k - 1, R), UT_{Rf}(R)]$, w przypadku 2. ;
3. komutator $c = \text{Diag}(c_1, c_2, \dots) \in [UT_{Rf}(2^{k-1} - 1, R), UT_{Rf}(2^{k-1} - 1, R)]$, w przypadku 3. $\square$

Po powyższych przygotowaniach przejdziemy do opisu komutantów naszych podgrup. Najpierw udowodnimy

Twierdzenie 2.2.5. *Niech R będzie pierścieniem łącznym, przemennym, z 1, stabilnej rangi 1, oraz zawierającym element θ taki, że $\theta, 1 - \theta \in R^*$. Wtedy*

$$[T_{Rf}(R), T_{Rf}(R)] = [UT_{Rf}(R), T_{Rf}(R)] = UT_{Rf}(R).$$

Dowód: Ponownie inkluzje $[T_{Rf}(R), T_{Rf}(R)], [UT_{Rf}(R), T_{Rf}(R)] \subseteq UT_{Rf}(R)$ nie wymagają dowodu. Rozważmy więc inkluzje przeciwnie. Wystarczy dowieść, że prawdziwe jest zawieranie $UT_{Rf}(R) \subseteq [UT_{Rf}(R), T_{Rf}(R)]$.

Niech $m \in UT_{Rf}(R)$. Jeśli m jest macierzą blokowo-diagonalną, to z Lematu 2.2.1 otrzymujemy, że m może być przedstawiona jako iloczyn co najwyżej dwóch komutatorów z $[UT_{Rf}(R), T_{Rf}(R)]$.

Jeśli m nie jest blokowo-diagonalna, to na mocy Twierdzenia 1.2.3, może być przedstawiona jako iloczyn dwóch takich macierzy unitrójkątnych. Każda z tych dwóch macierzy

może być zapisana jako iloczyn co najwyżej dwóch komutatorów. Ostatecznie więc, każdy element z $UT_{Rf}(R)$ może być przedstawiony jako iloczyn skończonej liczby komutatorów z $[UT_{Rf}(R), T_{Rf}(R)]$. $\square$

Z dowodu Twierdzenia 2.2.5 otrzymujemy

Wniosek 2.2.5. *Jeśli R jest pierścieniem łącznym, przemennym, z 1, stabilnej rangi 1, oraz zawierającym element θ taki, że $\theta, 1 - \theta \in R^*$, to*

$$c(T_{Rf}(R)) \leq 4.$$

Przejdziemy teraz do opisu dolnego ciągu centralnego oraz ciągu komutantów grupy $UT_{Rf}(R)$.

Twierdzenie 2.2.6. *Niech R będzie pierścieniem łącznym, z 1. Wtedy*

$$1. \gamma_k(UT_{Rf}(R)) = UT_{Rf}(k-1, R) \text{ dla } k \geq 1;$$

$$2. UT_{Rf}^{(k)} = UT_{Rf}(2^k - 1, R) \text{ dla } k \geq 0.$$

Dowód: 1. Dla $k = 1$ widać od razu, że stwierdzenie jest prawdziwe. Załóżmy, że zachodzi ono dla i , $1 \leq i \leq k-1$, gdzie $k \geq 2$.

Inkluzja $\gamma_k(UT_{Rf}(R)) \subseteq UT_{Rf}(k-1, R)$ jest oczywista.

Rozpatrzmy $m \in UT_{Rf}(k-1, R)$. Jeśli m jest macierzą blokowo-diagonalną, to z Lematu 2.2.1 otrzymujemy tezę. W przeciwnym przypadku, z Twierdzenia 2.2.4 wnioskujemy, że m jest iloczynem dwóch macierzy blokowo-diagonalnych z $UT_{Rf}(k-1, R)$. Na podstawie Lematu 2.2.1 każda z nich może być przedstawiona jako komutator elementów z grupy $[UT_{Rf}(k-2, R), UT_{Rf}(R)]$. Zatem m również należy do $[UT_{Rf}(k-2, R), UT_{Rf}(R)]$.

2. Dowód punktu drugiego jest analogiczny i pozwolimy sobie na pominięcie go. $\square$

Wynik uzyskany w powyższym twierdzeniu potwierdza spostrzeżenie, które mogło być przez nas uczynione już wcześniej. Mianowicie

Stwierdzenie 2.2.5. *Jeśli R jest pierścieniem łącznym, z 1, to grupa $UT_{Rf}(R)$ jest rezydualnie nilpotenta.*

2.2.4 Wnioski

Zaprezentujemy tu dwa spostrzeżenia, które wynikają z rozważań przeprowadzonych w tym rozdziale.

Ustalmy, że zbiór macierzy

$$\left[\begin{array}{c|c} g & h \\ \hline 0 & k \end{array} \right] \in GL_{VK}(R) \quad (2.9)$$

takich, że $k \in T_{Rf}(R)$, oznaczmy przez $GL_{\widetilde{VK}}(R)$, natomiast zbiór macierzy postaci (2.9) takich, że $g \in SL_n(R)$ dla pewnego n , oraz $k \in UT_{Rf}(R)$, oznaczmy przez $SL_{\widetilde{VK}}(R)$. Mamy następujące

Twierdzenie 2.2.7. *Niech R będzie pierścieniem łącznym, przemiennym, z 1, stabilnej rangi 1, oraz zawierającym element θ taki, że $\theta, 1 - \theta \in R^*$. Wtedy*

$$[\mathrm{GL}_{\widehat{VK}}(R), \mathrm{GL}_{\widehat{VK}}(R)] = [\mathrm{SL}_{\widehat{VK}}(R), \mathrm{GL}_{\widehat{VK}}(R)] = [\mathrm{SL}_{\widehat{VK}}(R), \mathrm{SL}_{\widehat{VK}}(R)] = \mathrm{SL}_{\widehat{VK}}(R).$$

Ponadto $c(\mathrm{GL}_{\widehat{VK}}(R)) \leq 6$.

Dowód: Pierwsze stwierdzenie wynika z rozkładu

$$\left[\begin{array}{c|c} g & h \\ \hline 0 & k \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} e_n & h \\ \hline 0 & k \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} g & 0 \\ \hline 0 & e_\infty \end{array} \right], \quad (2.10)$$

zachodzącego dla dowolnego elementu $\mathrm{SL}_{\widehat{VK}}(R)$, a także z Lematu 2.1.1 i Twierdzenia 2.2.5.

Drugie stwierdzenie wynika natomiast z rozkładu (2.10), Twierdzenia 2.1.2 oraz Wniosku 2.2.5. $\square$

ROZDZIAŁ

3

PODGRUPY WOLNE GRUPY $UT_{\infty}(R)$

Rozdział trzeci poświęcamy jednemu z najbardziej znanych pojęć w teorii grup – grupie wolnej. Rozpoczynamy od przedstawienia znanych dotychczas rezultatów dotyczących takich podgrup w grupach macierzowych. Następnie przechodzimy do podgrup wolnych w grupie macierzy nieskończonych unitrójkątnych. Wprowadzamy pojęcie macierzy wstęgowych i prezentujemy ich własności. Za ich pomocą formułujemy warunek konieczny na to, by podgrupa grupy $UT_{\infty}(R)$ generowana przez dwie macierze zdefiniowane w pewien szczególny sposób za pomocą macierzy z grupy $UT_n(R)$, była grupą wolną rangi 2. Wskazujemy tu też pewne zastosowania tegoż kryterium. W przypadku, gdy macierz skończonego wymiarowa, którą wykorzystujemy do "zbudowania" naszych generatorów ma szczególnie prostą postać, mianowicie jest transwekcją, podajemy warunek konieczny i wystarczający, by grupa była wolna. Ponadto prezentujemy jeszcze dwie rodziny podgrup $UT_{\infty}(R)$, które są wolne mimo, iż nie spełniają wspomnianego wcześniej kryterium. Wspominamy również o pewnych własnościach, które pozwalają nieco modyfikować generatory naszych podgrup bez zmiany ich najważniejszych cech. Rozdział kończy klasyfikacja niektórych z naszych podgrup.

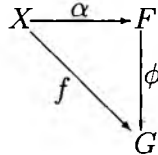
3.1 Podgrupy wolne grup macierzowych skończonego wymiarowych

Niech F będzie grupą w kategorii $\mathcal{G}$ grup (składającej się z wszystkich grup oraz morfizmów między nimi), X - zbiorem niepustym, natomiast $\alpha : X \rightarrow F$ pewnym odwzorowaniem zbiorów.

Definicja 3.1.1. Mówimy, że grupa F jest wolna na zbiorze X , jeśli dla każdej grupy G

w $\mathcal{G}$ oraz każdego odwzorowania $f : X \rightarrow G$, istnieje jednoznacznie wyznaczony morfizm $\phi : F \rightarrow G$ taki, że $\phi \circ \alpha = f$, tzn. diagram przestawiony na Rysunku 3.1 jest przemienny.

Rysunek 3.1: Schemat do definicji grupy wolnej na zbiorze X .



Skonstruujemy grupę F , która jest wolna na zbiorze X .

Jeśli X jest zbiorem pustym, to F definiujemy jako grupę trywialną (tzn. składającą się tylko z elementu neutralnego e).

Założmy, że X jest zbiorem niepustym. Oznaczmy przez X^{-1} pewien zbiór taki, że $|X^{-1}| = |X|$ oraz $X \cap X^{-1} = \emptyset$. Ponieważ X i X^{-1} są równoliczne, istnieje pomiędzy nimi pewna bijekcja. Wybierzmy jedną spośród tych bijekcji.¹ Obraz elementu $x \in X$ przez tę bijekcję oznaczmy przez x^{-1} . Ponadto wybierzmy pewien zbiór jednoelementowy, rozłączny zarówno z X jak i X^{-1} ; oznaczmy jego jedyny element przez e .

Słowem nazywamy dowolny ciąg $(a_1, a_2, \dots)$ elementów z $X \cup X^{-1} \cup \{e\}$ taki, że $a_k = e$ dla wszystkich $k \geq n$, gdzie n jest pewną liczbą naturalną (ustaloną dla każdego słowa). W szczególności $(e, e, e, \dots)$ oznaczamy przez e i nazywamy słowem pustym.

Słowo $(a_1, a_2, \dots)$ nazywamy zredukowanym, jeśli

1. z tego, że $a_k = x$ wynika, że $a_{k+1} \neq x^{-1}$ oraz z tego, że $a_k = x^{-1}$ wynika, że $a_{k+1} \neq x$ dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$;
2. jeśli $a_n = e$, to $a_k = e$ dla wszystkich $k \geq n$.

Zamiast $(a_1, a_2, \dots, a_n, e, e, \dots)$ piszemy krótko $a_1 a_2 \dots a_n$.

Dwa słowa zredukowane $a_1 \dots a_n$ i $b_1 \dots b_m$ są równe, gdy $n = m$ oraz $a_k = b_k$ dla $1 \leq k \leq n$, a więc funkcja, która elementowi a z $X \cup X^{-1} \cup \{e\}$ przyporządkowuje słowo a ze zbioru wszystkich słów zredukowanych jest injekcją. W ten sposób możemy utożsamiać X z jego obrazem w $F(X)$.

Wprowadzamy w X działanie binarne. Niech $a_1 \dots a_n$ i $b_1 \dots b_m$ będą dwoma zredukowanymi słowami i niech k będzie największą liczbą całkowitą nieujemną taką, że $a_{n-j} = b_{j+1}^{-1}$ lub $a_{n-j}^{-1} = b_{j+1}$ dla wszystkich $0 \leq j \leq k-1$. Wtedy, jeśli zdefiniujemy działanie $\cdot$ następująco:

$$(a_1 \dots a_n) \cdot (b_1 \dots b_m) = \begin{cases} a_1 \dots a_{n-k} b_{k+1} \dots b_m & \text{gdy } k < \min(n, m) \\ b_{n+1} \dots b_m & \text{gdy } k = n < m \\ a_1 \dots a_{n-k} & \text{gdy } k = m < n \\ e & \text{gdy } k = n = m, \end{cases} \quad (3.1)$$

to prawdziwe są poniższe twierdzenia.

¹Oczywiście, jeśli $|X| = 1$, tak naprawdę nie mamy żadnego wyboru.

Twierdzenie 3.1.1 (T. Hungerford, [26]). *Dla dowolnego niepustego zbioru X , zbiór $F = F(X)$ - wszystkich zredukowanych słów X tworzy grupę z działaniem mnożenia zdefiniowanym jak w (3.1). Grupa ta jest generowana przez zbiór X . Ponadto, jest ona wolna w kategorii grup.*

Twierdzenie 3.1.2 (T. Hungerford, [26]). *Każda grupa jest obrazem homomorficznym pewnej grupy wolnej.*

Z Twierdzenia 3.1.2 wynika, że aby opisać dowolną grupę $G = \langle X \rangle$, która jest izomorficzna z F/N , gdzie F jest grupą wolną na X , a N jest jądrem epimorfizmu z Twierdzenia 3.1.2, wystarczy wyznaczyć X , F oraz N . Oczywiście F jest wyznaczona przez X . Natomiast N jest wyznaczony przez swój dowolny podzbiór, który generuje N jako podgrupę F . Jeśli $w = a_1 \dots a_n \in F$ jest jednym z generatorów N , to obrazem w przez epimorfizm $F \rightarrow G$ z Twierdzenia 3.1.2 jest $e \in G$. Równanie $a_1 \dots a_n = e$ nazywamy relacją między generatorami. Każda grupa G może być opisana poprzez podanie zbioru generatorów X oraz zbioru relacji R między tymi generatorami. Pod warunkiem, że dopuszczamy, że nie wszystkie elementy X są różne, każdy zbiór X wraz z danym zbiorem relacji między generatorami wyznacza pewną grupę G .

Jeśli grupa G jest generowana przez $x_1, x_2, \dots$ będziemy pisać $G = \langle x_1, x_2, \dots \rangle$.

W szczególności, interesująca nas w tym rozdziale grupa wolna na zbiorze X jest wyznaczona przez X oraz pusty zbiór relacji. A zatem jest ona "wolna od relacji". O zbiorze X mówimy, że jest bazą grupy wolnej $F = F(X)$, natomiast jego moc nazywamy rangą grupy wolnej. Grupę wolną rangi n oznaczamy przez F_n . Znane jest twierdzenie mówiące, że dwie grupy wolne są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy ich rangi są równe. Szczególnie interesujący jest poniższy fakt.

Twierdzenie 3.1.3. *Grupa wolna rangi 2 zawiera grupę wolną rangi n dla dowolnego $n \geq 2$.*

Dowód: Niech $F = \langle x, y \rangle$ będzie naszą grupą wolną rangi 2. Wtedy

$$F_n = \langle x, y^{-1}xy, y^{-2}xy^2, \dots, y^{1-n}xy^{n-1} \rangle$$

jest grupą wolną rangi n . $\square$

Pierwszy przykład grupy wolnej w pełnej grupie liniowej skończonego wymiaru został wskazany w 1914r. Dokładniej, mamy

Twierdzenie 3.1.4 (F. Hausdorff, [18]). *Niech macierze $\phi, \rho \in SO_3(\mathbb{R})$ będą zdefiniowane następująco:*

$$\phi = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \rho = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \alpha & -\cos \alpha \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Wtedy $\langle \phi, \rho \rangle = F_2$.

Kolejny przykład podgrupy wolnej, tym razem w grupie macierzy wymiaru 2 nad $\mathbb{Z}$ został podany w 1947r.

Twierdzenie 3.1.5 (I.N. Sanov, [37]). *Niech $a, b \in SL_2(\mathbb{Z})$ będą równe*

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wtedy $\langle a, b \rangle = F_2$.

Warto wspomnieć, że twierdzenie to doczekało się wielu uogólnień.

Zauważmy, że przytoczone tu wyniki dotyczą grup, które nie są zawarte w grupach macierzy unitrójkątnych. Przyczyna jest bardzo prosta – grupa macierzy unitrójkątnych dowolnego skończonego wymiaru n jest nilpotentna; spełniona jest w niej tożsamość

$$[[[[x_1, x_2], x_3], \dots], x_n] = e_n,$$

a więc nie może ona zawierać podgrupy wolnej.

Warto dodać, że stabilna grupa unitrójkątna również nie może zawierać podgrupy wolnej, gdyż jest lokalnie nilpotentna.

Okazuje się jednak, że w grupie wszystkich macierzy unitrójkątnych nieskończonych znajdziemy grupę wolną, i to niejedną.

3.2 Podgrupy wolne w grupie macierzy nieskończonych

Wspomnieliśmy już, że w grupach macierzy skończonych unitrójkątnych nie istnieją podgrupy wolne. Teraz zbadamy ten problem w grupie macierzy nieskończonych unitrójkątnych.

Pierwszym autorem, który stwierdził, że dwie macierze unitrójkątne mogą generować grupę wolną był S. V. Aleshin. Przykład ten był sformułowany w języku teorii automatów, natomiast macierze generujące grupę były określone nad ciałem dwuelementowym $\mathbb{F}_2$ (w swojej pracy - [1], Aleshin nie wypisał ich jawnie). Pierwszy jawny opis grupy wolnej w $UT_{\infty}(\mathbb{F}_2)$ został podany w artykule [35]. Dokładniej

Twierdzenie 3.2.1 (A.S. Olińnyk, V.I. Sushchanskiĭ, [35]). *Niech*

$$f_1 = \begin{bmatrix} e_3 & b_1 & c_1 & & \\ & e_3 & b_1 & c_1 & \\ & & e_3 & b_1 & c_1 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} e_3 & b_2 & c_2 & & \\ & e_3 & b_2 & c_2 & \\ & & e_3 & b_2 & c_2 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

będą macierzami nieskończonymi blokowymi nad ciałem $\mathbb{F}_2$, gdzie

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad c_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wtedy $\langle f_1, f_2 \rangle = F_2$.

Drugi przykład grupy wolnej w grupie macierzy nieskończonych unitrójkatnych został opublikowany 4 lata później.

Twierdzenie 3.2.2 (W. Hołubowski, [20]). *Niech a, b będą macierzami nieskończonymi blokowo-diagonalnymi nad $\mathbb{Z}$:*

$$a = \begin{bmatrix} c & & & \\ & c & & \\ & & c & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} e_1 & & & \\ & c & & \\ & & c & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie } c = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Grupa $\langle a, b \rangle$ jest grupą wolną rangi 2.

W niniejszym rozdziale udowodnimy, że $UT_{\infty}(\mathbb{Z})$ zawiera nieskończenie wiele podgrup wolnych "zbudowanych" podobnie jak $\langle a, b \rangle$ z Twierdzenia 3.2.2. Dokładniej, sformułujemy pewne kryterium, które pozwoli nam konstruować podgrupy wolne nie tylko $UT_{\infty}(\mathbb{Z})$, ale także $UT_{\infty}(R)$ dla pewnej klasy pierścieni R .

3.2.1 Macierze wstęgowe i ich własności

Rozpocznijmy od podania definicji pojęcia, które będzie się pojawiać bardzo często w tym rozdziale.

Definicja 3.2.1. Niech R będzie dowolnym pierścieniem łącznym, z 1, natomiast G grupą $UT_{\infty}(R)$ lub $UT_n(R)$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Ustalmy $k \in \mathbb{N}$. Mówimy, że macierz $a \in G$ jest k - wstęgowa, jeśli

$$a_{ij} = 0 \quad \text{dla wszystkich } j - i > k \quad \text{oraz} \quad a_{i,i+k} \neq 0 \quad \text{dla pewnego } i.$$

Macierz nazywamy wstęgową, jeśli jest k - wstęgowa dla pewnego k .

Macierz wstęgową przedstawiamy na Rysunku 3.2.

Rysunek 3.2: Macierz k -wstęgowa.

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & & \\ & 1 & * & * & \\ & & 1 & * & * \\ & & & 1 & * \\ & & & & 1 & \xrightarrow{k} * \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

Oczywiście macierz z grupy $UT_n(R)$ może być co najwyżej $n - 1$ - wstęgowa.

Lemat 3.2.1. Niech R będzie dowolnym pierścieniem z 1, natomiast G grupą $UT_\infty(R)$ lub $UT_n(R)$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że $a, b \in G$ oraz, że a jest k_1 - wstęgowa podczas, gdy b jest k_2 - wstęgowa.

1. Iloczyn ab jest macierzą k - wstęgową, gdzie $0 \leq k \leq k_1 + k_2$.
2. Iloczyn ab jest macierzą $k_1 + k_2$ - wstęgową, jeśli istnieje indeks n taki, że

$$a_{n,n+k_1}b_{n+k_1,n+k_1+k_2} \neq 0.$$

Dowód: 1. Rozpatrzmy współczynnik (i, j) macierzy ab . Z definicji mnożenia oraz faktu, że a, b są unitrójkątne wynika, że jest on równy $(ab)_{ij} = \sum_{r=i}^j a_{ir}b_{rj}$. Załóżmy, że i, j są takie, że $j - i > k_1 + k_2$. Mamy oczywiście $(ab)_{ij} = \sum_{r=i}^{k_1} a_{ir}b_{rj} + \sum_{i=k_1+1}^j a_{ir}b_{rj}$. Ponieważ a jest k_1 - wstęgowa, $a_{ir} = 0$ dla $r \geq k_1 + 1$, więc $(ab)_{ij} = \sum_{r=i}^{k_1} a_{ir}b_{rj}$. Z drugiej strony, jeśli $r \leq k_1$, to $j - r \geq j - k_1 > i + k_1 + k_2 - k_1 = i + k_2$, a zatem $j - i > k_2$. Ponieważ b jest k_2 - wstęgowa, wynika stąd, że $b_{rj} = 0$ dla $r \leq k_1$, a więc ostatecznie $(ab)_{ij} = 0$ dla $j - i > k_1 + k_2$ i macierz ab może być co najwyżej $k_1 + k_2$ - wstęgowa.

2. Z punktu pierwszego wiemy, że jeśli a jest k_1 - wstęgowa, a b - k_2 - wstęgowa, to ab jest k - wstęgowa dla $k \leq k_1 + k_2$. Pozostaje wykazać, że $k = k_1 + k_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_{n,n+k_1}b_{n+k_1,n+k_1+k_2} \neq 0$ dla pewnego n . Oczywiście ab jest $k_1 + k_2$ - wstęgowa, gdy $(ab)_{n,n+k_1+k_2} \neq 0$ dla jakiegoś n . Mamy

$$\begin{aligned} (ab)_{n,n+k_1+k_2} &= \sum_{i=n}^{n+k_1+k_2} a_{ni}b_{i,n+k_1+k_2} \\ &= \sum_{i=n}^{n+k_1-1} a_{ni}b_{i,n+k_1+k_2} + a_{n,n+k_1}b_{n+k_1,n+k_1+k_2} + \sum_{i=n+k_1+1}^{n+k_1+k_2} a_{ni}b_{i,n+k_1+k_2}. \end{aligned}$$

Analogicznie jak w poprzednim podpunkcie zauważamy, że jeśli $n \leq i \leq n + k_1 - 1$, to $b_{i,n+k_1+k_2} = 0$, podczas gdy $n + k_1 + 1 \leq i \leq n + k_1 + k_2$, mamy $a_{ni} = 0$. A zatem $(ab)_{n,n+k_1+k_2} = a_{n,n+k_1}b_{n+k_1,n+k_1+k_2}$. Jeśli więc mamy $a_{n,n+k_1}b_{n+k_1,n+k_1+k_2} \neq 0$ dla pewnego n , to ab jest $k_1 + k_2$ - wstęgowa, a także odwrotnie - jeśli ab jest $k_1 + k_2$ - wstęgowa, to $a_{n,n+k_1}b_{n+k_1,n+k_1+k_2} \neq 0$ dla pewnego n . $\square$

Bezpośrednio z powyższego lematu wynika

Wniosek 3.2.1. Załóżmy, że R jest dowolnym pierścieniem łącznym, z 1, natomiast G grupą $UT_\infty(R)$ lub $UT_n(R)$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Iloczyn r macierzy z grupy G , z których każda jest k wstęgowa, jest macierzą co najwyżej rk - wstęgową.

Ponadto prawdziwy jest poniższy

Lemat 3.2.2. Niech R będzie dziedziną całkowitości, a k liczbą naturalną. Jeśli macierze $a_1, a_2, \dots, a_r \in UT_\infty(R)$ są takie, że

1. a_s jest k -wstęgowa dla każdego $1 \leq s \leq r$,
2. istnieje indeks i taki, że dla wszystkich $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mamy

$$\tilde{a}_s := (a_s)_{i+jk, i+k+jk} \neq 0 \quad s = 1, \dots, r,$$

to iloczyn $a := a_1 \cdots a_r$ jest macierzą rk - wstęgową.

Dowód: Z Wniosku 3.2.1 i założenia 1. wiemy, że $a = a_1 \cdots a_m$ jest co najwyżej mk - wstęgowa. Rozważmy współczynnik $a_{i+jk, i+mk+jk}$. Mamy oczywiście

$$a_{i+jk, i+mk+jk} = \sum_{p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_{r-1}} (a_1)_{i+jk, p_1} (a_2)_{p_1 p_2} \cdots (a_r)_{p_{r-1}, i+rk+jk}. \quad (3.2)$$

Wszystkie a_s są k -wstęgowe, zatem jeśli w sumie po prawej stronie równości (3.2) mamy $p_{q+1} - p_q > k$ dla pewnych p_{q+1}, p_q , to $(a_i)_{p_q p_{q+1}} = 0$. Stąd nasza suma redukuje się do współczynnika $a_{i+jk, i+rk+jk}$, który jest równy

$$(a_1)_{i+jk, i+k+jk} (a_2)_{i+k+jk, i+2k+jk} \cdots (a_{r-1})_{i+(r-2)k+jk, i+(r-1)k+jk} (a_r)_{i+(r-1)k+jk, i+rk+jk}.$$

Ponieważ na mocy założenia 2. współczynniki $(a_s)_{i+(s-1)k+jk, i+sk+jk}$ są niezerowe oraz R nie posiada dzielników zera, otrzymujemy stąd, że $a_{i+jk, i+rk+jk} \neq 0$, co oznacza, że a jest rk - wstęgowa. $\square$

3.2.2 Zastosowanie macierzy wstęgowych do konstrukcji grup wolnych

Przejdziemy teraz do naszego głównego rezultatu. Pokażemy w jaki sposób można skonstruować podgrupę wolną grupy $UT_{\infty}(R)$, gdy R jest dziedziną całkowitości (tj. pierścieniem łącznym, przemiennym, z 1, bez dzielników zera) charakterystyki 0. Macierze, które będą generowały nasze grupy będą blokowo-diagonalne.

Niech R będzie dziedziną całkowitości charakterystyki 0, n - liczbą naturalną, natomiast c - macierzą z grupy $UT_n(R)$, różną od jednostkowej, tzn.

$$c = e + \gamma, \quad \text{gdzie} \quad \gamma = \sum_{1 \leq i < j \leq n} c_{ij} e_{ij} \neq 0. \quad (3.3)$$

Na macierze c nakładamy następujący warunek:

$$c_{ij} c_{pr} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad j \neq p \quad \text{oraz} \quad i \neq r. \quad (3.4)$$

Nictrudno wykazać prawdziwość podanego stwierdzenia.

Stwierdzenie 3.2.1. *Jeśli R jest dowolnym pierścieniem z 1, oraz $c \in UT_n(R)$ ($n \in \mathbb{N}$) jest postaci (3.3) i spełnia warunek (3.4), to*

$$c^r = e + r\gamma \quad \text{dla dowolnego } r \in \mathbb{N}.$$

Dowód: Dla $r = 1$ teza oczywiście jest spełniona.

Zauważmy, że

$$\gamma^2 = \left(\sum_{i < j} c_{ij} e_{ij} \right) \cdot \left(\sum_{p < s} c_{ps} e_{ps} \right) = \sum_{\substack{i < j \\ p < r}} c_{ij} c_{ps} \delta(j, p) e_{is},$$

a więc z założenia (3.4), $\gamma^2 = \mathbf{0}$, i oczywiście w konsekwencji $\gamma^r = \mathbf{0}$ dla $r \geq 2$. Jeśli więc $r \geq 2$, to

$$c^r = (e + \gamma)^r = e + \binom{r}{1}\gamma + \binom{r}{2}\gamma^2 + \dots + \binom{r}{r-1}\gamma^{r-1} + \gamma^r = e + r\gamma. \quad \square$$

Zwróćmy uwagę, że innym sposobem wyrażenia warunku (3.4) jest stwierdzenie, że c jest iloczynem pewnych parami przemiennych transwekcji.

Ustalmy liczbę naturalną m , $1 \leq m < n$. Definiujemy macierze blokowo-diagonalne $a, b \in UT_\infty(R)$:

$$a = \begin{bmatrix} c & & & \\ & c & & \\ & & c & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} e_m & & & \\ & c & & \\ & & c & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

Tak więc

$$a = e_\infty + \alpha, \quad \text{gdzie} \quad \alpha = \sum_{1 \leq i < j \leq n} c_{ij} \sum_{p=0}^{\infty} e_{i+pn, j+pn}, \quad (3.5a)$$

$$b = e_\infty + \beta, \quad \text{gdzie} \quad \beta = \sum_{1 \leq i < j \leq n} c_{ij} \sum_{p=0}^{\infty} e_{i+m+pn, j+m+pn}. \quad (3.5b)$$

Liczbę m będziemy nazywać przesunięciem b względem a , lub krótko przesunięciem.

Niech $\langle a, b \rangle$ będzie grupą generowaną przez a, b . Pokażemy, że przy pewnych założeniach $\langle a, b \rangle$ jest grupą wolną. Najpierw jednak poczynimy jeszcze parę spostrzeżeń dotyczących a i b .

Zauważmy, że z warunku (3.4) wynika, że

$$\alpha^2 = 0, \quad \beta^2 = 0,$$

co pociąga

$$a^k = e + k\alpha, \quad (3.6a)$$

$$b^k = e + k\beta \quad (3.6b)$$

dla dowolnej liczby $k \in \mathbb{Z}$. Ponadto

$$a^k b^{k'} = e + k\alpha + k'\beta + kk'\alpha\beta, \quad (3.7a)$$

$$b^{k'} a^k = e + k\alpha + k'\beta + kk'\beta\alpha. \quad (3.7b)$$

Sformułujemy i udowodnimy teraz nasz pierwszy rezultat.

Twierdzenie 3.2.3. *Niech R będzie dziedziną całkowitości charakterystyki 0, oraz niech $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq m < n$. Załóżmy, że $c \in UT_n(R) \setminus \{e_n\}$ jest postaci (3.3) i spełnia założenie (3.4), a także, że a i b są zdefiniowane jak w (3.5a), (3.5b).*

Jeśli ab jest n -wstęgowa lub ba jest n -wstęgowa, to $\langle a, b \rangle$ jest grupą wolną rangi 2.

Dowód: Przeprowadzimy dowód dla przypadku, gdy ab jest n - wstęgowa.

Aby wykazać, że grupa jest wolna wystarczy udowodnić, że pomiędzy jej generatorami nie ma żadnych relacji, tzn. w naszym przypadku, że macierz postaci

$$a^{k_1} b^{k'_1} a^{k_2} b^{k'_2} \dots a^{k_r} b^{k'_r} \quad (3.8)$$

jest różna od e_∞ , dla dowolnej liczby $r \geq 1$ oraz dowolnych k_i, k'_i , gdzie $k_1 \neq 0$ lub $k'_r \neq 0$, oraz wszystkie $k'_1, k_2, k'_2, \dots, k'_{r-1}, k_r$ są niezerowe. Żeby tego dowieść, pokażemy, że każda macierz postaci (3.8) jest s - wstęgowa dla pewnego $s > 0$.

Zacznijmy od przypadku, gdy r w (3.8) wynosi 1 oraz $k_1 \neq 0, k'_1 = 0$. Z (3.6a) otrzymujemy, że $(a^{k_1})_{i+pn, j+pn} = k_1 c_{ij}$, co na podstawie założenia $c \neq e_n$ oraz założeń dotyczących r , gwarantuje, że $(a^{k_1})_{i+pn, j+pn} \neq 0$. Zatem $a^{k_1} \neq e_\infty$. Analogicznie korzystając z (3.6b), rozpatrujemy przypadek gdy $k_1 = 0, k'_1 \neq 0$.

Zauważmy, że jeśli w grupie $\langle a, b \rangle$ mamy relację postaci (3.8) taką, że $k'_r = 0$, to z

$$a^{k_r} (a^{k_1} b^{k'_1} a^{k_2} b^{k'_2} \dots a^{k_r}) a^{-k_r} = e_\infty$$

otrzymujemy

$$a^{k_1+k_r} b^{k'_1} a^{k_2} b^{k'_2} \dots a^{k_{r-1}} b^{k'_{r-1}} = e_\infty.$$

Natomiast, gdy $k_1 = 0$, to z

$$b^{-k'_1} (b^{k'_1} a^{k_2} b^{k'_2} \dots a^{k_r} b^{k'_r}) b_{k'_1} = e_\infty$$

wynika relacja

$$a^{k_2} b^{k'_2} \dots a^{k_r} b^{k'_r+k'_1} = e_\infty.$$

Będziemy zatem zakładać, że $k_1 \neq 0$ oraz $k'_r \neq 0$.

Niech więc $r \geq 1, k_1, k'_r \neq 0$. Zauważmy, że na podstawie równości (3.6a), (3.6b), (3.7a), a także punktu drugiego Lematu 3.2.1 i założenia, że ab jest n - wstęgowa mamy

$$(a^{k_s} b^{k'_s})_{i+pn, i+n+pn} = k_s k'_s (\alpha\beta)_{i+pn, i+n+pn} = k_s k'_s (ab)_{i+pn, i+n+pn} \neq 0$$

dla $1 \leq s \leq r$. A zatem macierze $a^{k_s} b^{k'_s}$ spełniają założenia Lematu 3.2.2. Stąd produkt $\prod_{s=1}^r a^{k_s} b^{k'_s}$ jest macierzą rn - wstęgową ($r, n \geq 1$) i nie może być równy e_∞ . Ostatecznie więc, w grupie $\langle a, b \rangle$ nie ma żadnych (nietrywialnych) relacji między generatorami i jest to grupa wolna rangi 2.

Przypadek, gdy ba jest n -wstęgowa rozpatruje się analogicznie. $\square$

Zauważmy jeszcze, że z definicji a i b otrzymujemy, że

$$(ab)_{i+pn, i+n+pn} = \sum_{s=i+1}^n c_{is} c_{s-m, i+n-m}$$

i że aby powyższy współczynnik był niezerowy konieczne jest, by indeks i spełniał nierówność $i \leq m$.

Zaprezentujemy teraz przykłady zastosowań Twierdzenia 3.2.3.

Przykład 3.2.1. Niech n będzie liczbą parzystą. Definiujemy c następująco:

$$c = e_n + \sum_{s=1}^{\frac{n}{2}} c_s e_{s, \frac{n}{2}+s} = \begin{bmatrix} 1 & & c_1 & & \\ & 1 & & c_2 & \\ & & 1 & & \ddots \\ & & & & 1 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix},$$

gdzie $c_s \neq 0$ dla pewnego s . Wybieramy przesunięcie $m = \frac{n}{2}$. Z definicji c wynika, że a i b są $\frac{n}{2}$ - wstęgowe. Ponadto mamy:

$$(ab)_{s+pn, s+n+pn} = c_s^2 \quad \text{dla wszystkich } 1 \leq s \leq \frac{n}{2}, \quad p \in \mathbb{N},$$

Wiemy również, że któryś ze współczynników c_s jest niezerowy i nie jest dzielnikiem zera. Stąd ab jest n - wstęgowa. Zatem z Twierdzenia 3.2.3 grupa $\langle a, b \rangle$ jest wolna rangi 2.

Jeśli natomiast weźmiemy przesunięcie $1 \leq m < \frac{n}{2}$, to

$$(ab)_{s+pn, s+n+pn} = c_s \cdot c_{s-m} \quad \text{dla } s > m.$$

Zatem, przy dodatkowym założeniu $c_s c_{s-m} \neq 0$ dla pewnego $s > m$, $\langle a, b \rangle$ jest również grupą wolną.

Przykład 3.2.2. Niech n ponownie będzie liczbą parzystą, natomiast $c \in UT_{\infty}(\mathbb{Z})$:

$$c = e_n + \sum_{s_1=1}^{\frac{k}{2}} \sum_{s_2=s_1}^{\frac{k}{2}} c_{2s_1-1, 2s_2} \cdot e_{2s_1-1, 2s_2} = \begin{bmatrix} 1 & c_{1,2} & 0 & c_{1,4} & 0 & \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ & & 1 & c_{3,4} & 0 & \dots \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & c_{k-1,k} \\ & & & & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wybermy współczynniki z pierwszego wiersza oraz ostatniej kolumny c tak, aby wszystkie były dodatnie. Jeśli $m = 1$, to z

$$\begin{aligned} ab &= \left(e + \sum_p \sum_{1 \leq s \leq s' \leq \frac{n}{2}} c_{2s-1, 2s'} e_{2s-1+pn, 2s'+pn} \right) \left(e + \sum_p \sum_{1 \leq t \leq t' \leq \frac{n}{2}} c_{2t-1, 2t'} e_{2t-1+pn, 2t'+pn} \right) \\ &= a + b - e + \sum_p \sum_{1 \leq s \leq t' \leq \frac{n}{2}} c_{2s-1, 2t} c_{2t-1, 2t'} e_{2s-1+pn, 2t'+1+pn} \end{aligned}$$

wynika, że ab jest co najwyżej n - wstęgowa. Ponadto

$$(ab)_{1+np, 1+n+np} = \sum_{s=1}^{\frac{n}{2}} c_{1, 2s} c_{2s-1, n} \neq 0.$$

A zatem ab jest n -wstęgowa, czyli $\langle a, b \rangle$ jest grupą wolną rangi 2.

Przykład 3.2.3. Podobnie jak w Przykładzie 3.2.2 dla $n \geq 6$, parzystego, definiujemy c :

$$c = e + \sum_{s_1=1}^{\frac{n-2}{2}} \sum_{s_2=s_1}^{\frac{n-2}{2}} c_{2s_1-1, 2s_2+1} \cdot e_{2s_1-1, 2s_2+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & c_{1,3} & 0 & c_{1,5} & \dots \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ & & 1 & 0 & c_{3,5} & \dots \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i podobnie jak powyżej sprawdzamy, że dla $m = 2$ oraz współczynników spełniających warunek

$$\sum_{s=1}^{\frac{n-2}{2}} c_{1, 2s+1} c_{2s-1, n-1} \neq 0,$$

grupa $\langle a, b \rangle$ jest wolna rangi 2.

3.2.3 Pewne rodziny podgrup wolnych w $UT_{\infty}(R)$

Zbadamy teraz grupy generowane przez a, b zdefiniowane w poprzednim podrozdziale, w przypadku, gdy c ma szczególną postać. Będziemy mianowicie zakładać, że c jest transwekcją. Sklasyfikujemy tutaj grupy generowane przez a, b zbudowane za pomocą $c = t_{ij}(\gamma)$.

Twierdzenie 3.2.4. Niech R będzie dowolną dziedziną całkowitości charakterystyki 0, natomiast n, m - liczbami naturalnymi takimi, że $1 \leq m < n$. Załóżmy ponadto, że $c = t_{ij}(\gamma) \in UT_{\infty}(R)$ ($\gamma \in R \setminus \{0\}$) oraz, że a, b są zdefiniowane jak w (3.5a), (3.5b).

1. Jeśli $\begin{cases} j \neq i+m \\ j+m \neq i+n \end{cases}$, to $\langle a, b \rangle$ jest grupą abelową.
2. Jeśli $\begin{cases} j = i+m \\ j+m = i+n \end{cases}$, to $\langle a, b \rangle$ jest grupą wolną rangi 2.
3. Jeśli $\begin{cases} j = i+m \\ j+m \neq i+n \end{cases}$, to $\langle a, b \rangle$ jest grupą nieabelową, w której istnieją nietrywialne relacje pomiędzy generatorami.
4. Jeśli $\begin{cases} j \neq i+m \\ j+m = i+n \end{cases}$, to $\langle a, b \rangle$ jest grupą nieabelową, w której istnieją nietrywialne relacje pomiędzy generatorami.

Dowód: Niech $c = t_{ij}(\gamma) \in UT_n(R)$ jak w założeniu. Wtedy

$$a = e_{\infty} + \alpha, \quad \alpha = \gamma \sum_{p=0}^{\infty} e_{i+pn, j+pn}, \quad b = e_{\infty} + \beta, \quad \beta = \gamma \sum_{q=0}^{\infty} e_{i+m+qn, j+m+qn}.$$

A zatem

$$\alpha\beta = \gamma^2 \sum_{p,q} e_{i+pn,j+pn} \cdot e_{i+m+qn,j+m+qn}, \quad \beta\alpha = \gamma^2 \sum_{p,q} e_{i+m+qn,j+m+qn} \cdot e_{i+pn,j+pn}.$$

Zauważmy, że $\alpha\beta \neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $j + pn = i + m + qn$ dla pewnych $p, q \in \mathbb{N}$, czyli $i + m = j + rn$ dla pewnego $r \in \mathbb{Z}$. Oczywiście $i + m > 0$, więc $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Gdyby r było dodatnie, to z założeń $i < j$, $m < n$ otrzymalibyśmy $i + m < j + rn$, czyli sprzeczność. Stąd $\alpha\beta \neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $i + m = j$.

Analogicznie, $\beta\alpha \neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $p, q \in \mathbb{N}$ takie, że mamy równość $j + m + qn = i + pn$, czyli $j + m = i + rn$ dla pewnego $r \in \mathbb{Z}$. Z założeń $i < j \leq n$, $1 \leq m < n$ prowadzi nas do nierówności $1 + i < j + m < 2n$, skąd otrzymujemy, że $j + m = i + n$ jest warunkiem koniecznym i wystarczającym, by $\beta\alpha \neq 0$.

Przedyskutujmy zatem kolejno wszystkie możliwe przypadki.

$$1. \begin{cases} j \neq i + m \\ j + m \neq i + n \end{cases}$$

W tym przypadku $\alpha\beta = \beta\alpha = 0$, więc $ab = e_{\infty} + \alpha + \beta = ba$. Ponieważ generatory są przemienne, grupa również jest przemienna.

$$2. \begin{cases} j = i + m \\ j + m = i + n \end{cases}$$

Z układu, który spełniają i, j, m, n wnioskujemy, że n musi być liczbą parzystą, natomiast przesunięcie m musi być równie $\frac{n}{2}$. Wtedy $\alpha\beta = \gamma \sum_{p=0}^{\infty} e_{i+pn,i+n+pn}$, a zatem $ab = e_{\infty} + \alpha + \beta + \alpha\beta$ jest n -wstęgowa - spełnione są założenia Twierdzenia 3.2.3, więc $\langle a, b \rangle$ jest grupą wolną rangi 2.

$$3. \begin{cases} j = i + m \\ j + m \neq i + n \end{cases}$$

W tym przypadku mamy $\alpha\beta \neq 0$, $\beta\alpha = 0$, $ab = e_{\infty} + \alpha + \beta + \alpha\beta$, $ba = e_{\infty} + \alpha + \beta$. Korzystając dodatkowo z faktu, że $\alpha^2 = \beta^2 = 0$ mamy

$$\begin{aligned} ab \cdot ba &= (e_{\infty} + \alpha + \beta)^2 + \alpha\beta(e_{\infty} + \alpha + \beta) = (e_{\infty} + \alpha + \beta)^2 + \alpha\beta \\ &= (e_{\infty} + \alpha + \beta)^2 + (e_{\infty} + \alpha + \beta)\alpha\beta = ba \cdot ab, \end{aligned}$$

a stąd $[ba, ab] = e_{\infty}$. Zatem w $\langle a, b \rangle$ spełnione są pewne (nietrywialne) relacje między generatorami.

$$4. \begin{cases} j \neq i + m \\ j + m = i + n \end{cases}$$

Tym razem $\alpha\beta = 0$, $\beta\alpha \neq 0$, $ab = e_{\infty} + \alpha + \beta$, $ba = e_{\infty} + \alpha + \beta + \beta\alpha$ oraz $\alpha^2 = \beta^2 = 0$, tak więc

$$\begin{aligned} ab \cdot ba &= (e_{\infty} + \alpha + \beta)^2 + (e_{\infty} + \alpha + \beta)\beta\alpha = (e_{\infty} + \alpha + \beta)^2 + \beta\alpha \\ &= (e_{\infty} + \alpha + \beta)^2 + \beta\alpha(e_{\infty} + \alpha + \beta) = ba \cdot ab, \end{aligned}$$

a stąd ponownie $[ba, ab] = e_{\infty}$. $\square$

Otrzymaliśmy pełną klasyfikację grup $\langle a, b \rangle$ w przypadku, gdy c jest transwekcją. Warto zwrócić uwagę, że $\langle a, b \rangle$ może być wolna jedynie, gdy wymiar c jest parzysty.

W przypadku, gdy $\langle a, b \rangle$ nie jest ani grupą wolną ani abelową wskazaliśmy pewną relację, którą spełniają generatory. Grupy, w których istnieje tylko jedna relacja między generatorami zajmują w teorii grup szczególne miejsce, jednak nasze grupy do tej rodziny nie należą. W szczególności w $\langle a, b \rangle$ (gdy nie jest wolna ani abelowa) spełnione są relacje postaci $a^{k_1}b^{k'_1}a^{k_2}b^{k'_2}a^{k_3}b^{k'_3} = e_{\infty}$ dla wszystkich wykładników spełniających układ równań

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ k'_1 + k'_2 + k'_3 = 0 \\ k_2k'_2 + k_3k'_3 + k_2k'_3 = 0. \end{cases}$$

Rozwiązania tego układu mają postać

$$\begin{cases} k_1 = -b(x + (-1)^{\delta}y) & k_2 = (-1)^{\delta}yb & k_3 = xb \\ k'_1 = (-1)^{\delta}xa & k'_2 = -a(y + (-1)^{\delta}x) & k'_3 = ya, \end{cases}$$

gdzie $a, b, x, y \in R$, $\delta \in \{0, 1\}$. Stąd, ponieważ R ma charakterystykę 0, otrzymujemy nieskończenie wiele relacji.

3.2.4 Inne przykłady konstrukcji grupy wolnej

W Twierdzeniu 3.2.3 podajemy pewien warunek na a oraz b , który jest wystarczający, aby a i b generowały grupę wolną. Nie jest to jednak warunek konieczny. Aby wykazać, że istotnie tak jest, wskażemy kolejną rodzinę podgrup wolnych, których generatory nie będą spełniały założeń Twierdzenia 3.2.3.

Dla $n \in \mathbb{N}$ definiujemy macierz $c_h \in UT_n(R)$ następująco:

$$c_h = e_n + \sum_{s=2}^n c_s e_{1s} = \begin{bmatrix} 1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ & 1 & 0 & & 0 \\ & & 1 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Nietrudno sprawdzić, że c_h spełnia warunek (3.4).

Wykażemy, że spełnione jest

Twierdzenie 3.2.5. *Niech R będzie dowolną dziedziną całkowitości charakterystyki 0, natomiast n, m - liczbami naturalnymi takimi, że $1 \leq m < n$, oraz niech c_h będzie zdefiniowana jak w (3.9). Jeśli $c_{m+1}c_{n-m+1} \neq 0$, to grupa $\langle a, b \rangle$, gdzie a, b są określone jak w (3.5a), (3.5b), jest grupą wolną rangi 2.*

Dowód: Podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 3.2.3 pokażemy, że w $\langle a, b \rangle$ nie ma żadnych relacji między generatorami.

Dla dowolnych k, k' mamy

$$a^k b^{k'} = e_{\infty} + k\alpha + k'\beta + \gamma, \quad \text{gdzie} \quad \gamma = kk' \sum_{s=m+2}^{m+n} \sum_{p=0}^{\infty} c_{m+1} c_{s-m} e_{1+pn, s+pn},$$

a zatem ab jest $n + m - 1$ - wstęgowa. Jeśli więc $m \neq 1$, to nie możemy skorzystać z dotychczasowych rezultatów. Niech $g_r = \prod_{s=1}^r a^{k_s} b^{k'_s}$ oraz $g = a^{k_{r+1}} b^{k'_{r+1}}$. Oczywiście g_1 jest różna od macierzy jednostkowej.

Założmy teraz, że macierz g_r jest co najwyżej $rn + m - 1$ - wstęgowa, gdzie $r \geq 1$. Jeśli $(g_r)_{uv} \neq 0$, to musi zachodzić któryś z poniższych przypadków.

1. $u = v$
2. $u = 1 \bmod n$ oraz $v - u < rn + m$
3. $u = m + 1 \bmod n$ oraz $v - u < rn$

Ponadto, jeśli $u = 1 \bmod n$ i jednocześnie $rn \leq v - u \leq rn + m$, to

$$(g_r)_{uv} = \left(\prod_{s=1}^r k_s k'_s \right) \cdot c_{m+1}^r c_{n-m+1}^{r-1} c_{n-m+1+v-u},$$

a w szczególności

$$(g_r)_{1+pn, 1+rn+pn} = \left(\prod_{s=1}^r k_s k'_s \right) \cdot c_{m+1}^r c_{n-m+1}^r,$$

który to współczynnik na mocy naszych założeń jest różny od zera.

Rozpatrzmy teraz g_{r+1} . Jeśli współczynnik $(g_{r+1})_{uv}$ jest niezerowy, to $(g_r)_{uj}$ oraz g_{jv} muszą być niezerowe dla pewnego j . Z $(g_r)_{uj} \neq 0$ wynika, że albo $u = 1 \bmod n$, albo $u = m + 1 \bmod n$, albo $u = j$, natomiast z $g_{jv} \neq 0$ otrzymujemy, że albo $j = 1 \bmod n$, albo $j = m + 1 \bmod n$, albo $j = v$. Przedyskutujmy kolejno wszystkie przypadki. Korzystamy w nich z faktu, że jeśli $(g_r)_{uj} \neq 0$, to $j - u < rn + m$, a także jeśli $g_{jv} \neq 0$, to $v - j < n + m$.

1. $u = 1 \bmod n$ i $j = 1 \bmod n$

Mamy $j - u = 0 \bmod n$, a więc ponieważ $j - u < rn + m$, musimy również mieć $j - u \leq rn$. Korzystając z tego, że $v - j < n + m$ otrzymujemy, że

$$v - u = (v - j) + (j - u) < rn + n + m = (r + 1)n + m.$$

2. $u = 1 \bmod n$ i $j = m + 1 \bmod n$

Tym razem $j - u = m \bmod n$, więc $j - u \leq (r - 1)n + m$. Ponadto $v - j < n + m$, zatem

$$v - u < (r - 1)n + m + n + m = rn + 2m < (r + 1)n + m.$$

3. $u = 1 \bmod n$ i $j = v$

Z $j - u < rn + m$ oraz $v - j = 0$ otrzymujemy

$$v - u < rn + m + 0 < (r + 1)n + m.$$

4. $u = m + 1 \bmod n$ i $j = 1 \bmod n$

W kolejnym podrozdziale uzasadnimy, że wystarczy rozpatrywać jedynie przesunięcia m spełniające warunek $m \leq \frac{n}{2}$. Skorzystamy z tego faktu już teraz. Dla takich m mamy $j - u < rn - m$, a zatem

$$v - u < n + m + rn - m = (r + 1)n < (r + 1)n + m.$$

5. $u = m + 1 \bmod n$ i $j = m + 1 \bmod n$

Z $j - u = 0 \bmod n$ wnioskujemy, że $j - u \leq rn$, a następnie

$$v - u < rn + n + m = (r + 1)n + m.$$

6. $u = m + 1 \bmod n$ i $j = v$

Ponieważ $j - u < rn + m$ i $v - j = 0$, to

$$v - u < rn + m + 0 < (r + 1)n + m.$$

7. $u = j$ i $j = 1 \bmod n$

Z $j - u = 0$ oraz $v - j < n + m$ otrzymujemy

$$v - u < n + m < (r + 1)n + m.$$

8. $u = j$ i $j = m + 1 \bmod n$

Z założeń $v - j < n + m$ i $j - u = 0$ mamy ponownie

$$v - u < n + m < (r + 1)n + m.$$

9. $u = j$ i $j = v$

W tym przypadku mamy oczywiście

$$v - u = 0 + 0 < (r + 1)n + m.$$

Z rozważań przeprowadzonych w punktach 1. – 9. wynika, że macierz g_{r+1} jest co najwyżej $(r + 1)n + m - 1$ - wstęgowa, jak chcieliśmy udowodnić. Weźmy pod uwagę indeksy postaci $u = 1 + pn$, $j = 1 + rn + pn$, $v = m + rn + pn$ (jak w przypadku pierwszym), gdzie $p \in \mathbb{N}$. Wtedy $(g_{r+1})_{uv} \neq 0$, a zatem g_{r+1} jest macierzą $(r + 1)n + m - 1$ - wstęgową, a zatem $g_{r+1} \neq e_{\infty}$. Ponadto dla $u = 1 + pn$, $j = 1 + rn + pn$, $v = 1 + (r + 1)n + pn$ (również jak w przypadku pierwszym) otrzymujemy

$$(g_{r+1})_{uv} = \left(\prod_{s=1}^{r+1} k_s k'_s \right) \cdot c_{m+1}^{r+1} c_{n-m+1}^{r+1},$$

czyli drugą część tezy. A zatem $\langle a, b \rangle$ jest grupą wolną rangi 2. $\square$

Jeśli podobnie do macierzy c_h zdefiniujemy c_v :

$$c_v = e_n + \sum_{s=1}^{n-1} c_s e_{sn} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ & 1 & & \vdots & c_2 \\ & & & 0 & \vdots \\ & & & 1 & c_{n-1} \\ & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

to analogicznie jak Twierdzenia 3.2.5 możemy dowieść poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 3.2.6. *Niech R będzie dowolną dziedziną całkowitości charakterystyki 0, natomiast n, m - liczbami naturalnymi takimi, że $1 \leq m < n$, oraz niech c_v będzie zdefiniowana jak w (3.10). Jeśli $c_m c_{n-m} \neq 0$, to grupa $\langle a, b \rangle$, gdzie a, b są określone jak w (3.5a), (3.5b), jest wolna rangi 2.*

3.2.5 Własności przedstawionych podgrup

Już w dowodzie Twierdzenia 3.2.5 powoływaliśmy się na pewne własności badanych przez nas podgrup. Teraz udowodnimy, że mieliśmy prawo do zastosowania tam uproszczeń oraz zaprezentujemy jeszcze kilka obserwacji.

Założmy, że

$$c = e_n + c_{i_1 j_1} e_{i_1 j_1} + c_{i_2 j_2} e_{i_2 j_2} + \dots + c_{i_s j_s} e_{i_s j_s}$$

spełnia założenie (3.4). Wprowadźmy oznaczenia

$$\mathcal{I}(c) = \{i_1, i_2, \dots, i_s\}, \quad \mathcal{J}(c) = \{j_1, j_2, \dots, j_s\};$$

$\mathcal{I}(c)$ i $\mathcal{J}(c)$ będziemy rozumieć jako zbiory uporządkowane bez powtórzeń. Ponieważ w naszych rozważaniach pojawiają się również pewne przesunięcia, wprowadzimy również oznaczenia

$$\mathcal{I}(c) + m = \{i_1 + m \bmod n, i_2 + m \bmod n, \dots, i_s + m \bmod n\},$$

$$\mathcal{J}(c) + m = \{j_1 + m \bmod n, j_2 + m \bmod n, \dots, j_s + m \bmod n\}.$$

Od razu możemy zaobserwować, że prawdziwe jest

Stwierdzenie 3.2.2. *Niech R będzie dowolną dziedziną całkowitości charakterystyki 0, natomiast n, m - liczbami naturalnymi takimi, że $1 \leq m < n$, natomiast $c \in UT_n(R)$. Jeśli wszystkie pary indeksów (i, j) ze zbioru $(\mathcal{I}(c) \cup \mathcal{I}(c) + m) \times (\mathcal{J}(c) \cup \mathcal{J}(c) + m)$ spełniają warunek (3.4), to grupa $\langle a, b \rangle$ (gdzie a, b są określone jak w (3.5a), (3.5b)) jest abelowa.*

Dowód: Z założenia wszystkie transwekcje, których iloczynami są a i b są przemienne. Stąd a i b również muszą być przemienne, a w konsekwencji $\langle a, b \rangle$ jest grupą abelową. $\square$

Wprowadźmy jeszcze jedno oznaczenie. Niech $a = \text{Diag}(a_1, a_2, \dots) \in UT_{\infty}(R)$ oraz $w \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Kładziemy

$$a_{+w} = \text{Diag}(e_w, a_1, a_2, \dots).$$

Ustalmy ponadto, że jeśli $\tilde{a} = a_{+w}$, to będziemy pisać $a = \tilde{a}_{-w}$. Nietrudno zweryfikować następujące obserwacje.

Stwierdzenie 3.2.3. Niech R będzie dowolnym pierścieniem z 1 oraz niech $a, b \in UT_{\infty}(R)$. Poniższe stwierdzenia są równoważne.

1. Grupa $\langle a, b \rangle$ jest abelowa.
2. Dla dowolnego $w \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ grupa $\langle a_{+w}, b_{+w} \rangle$ jest abelowa.
3. Istnieje $w \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, dla którego grupa $\langle a_{+w}, b_{+w} \rangle$ jest abelowa.

Dowód: Udowodnimy równoważność warunków 1. i 2.

Jeśli

$$a = e_{\infty} + \sum_{\substack{i \in \mathcal{I} \\ j \in \mathcal{J}}} a_{ij} e_{ij}, \quad b = e_{\infty} + \sum_{\substack{i' \in \mathcal{I}' \\ j' \in \mathcal{J}'}} b_{i'j'} e_{i'j'},$$

to $\langle a, b \rangle$ jest abelowa wtedy i tylko wtedy, gdy

$$i \neq j' \quad \text{oraz} \quad i' \neq j \quad \text{dla wszystkich} \quad i \in \mathcal{I}(c), j \in \mathcal{J}(c), i' \in \mathcal{I}'(c), j' \in \mathcal{J}'(c).$$

Jest to równoważne stwierdzeniu, że

$$i + w \neq j' + w \quad \text{oraz} \quad i' + w \neq j + w \quad \text{dla} \quad i \in \mathcal{I}(c), j \in \mathcal{J}(c), i' \in \mathcal{I}'(c), j' \in \mathcal{J}'(c),$$

gdzie $w \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Zatem kładąc $\tilde{i} = i + w, \tilde{j} = j + w, \tilde{i}' = i' + w, \tilde{j}' = j' + w$, mamy

$$\tilde{i} \neq \tilde{j}' \quad \text{oraz} \quad \tilde{i}' \neq \tilde{j} \quad \text{dla} \quad \tilde{i} \in \mathcal{I}(c) + w, \tilde{j} \in \mathcal{J}(c) + w, \tilde{i}' \in \mathcal{I}'(c) + w, \tilde{j}' \in \mathcal{J}'(c) + w,$$

gdzie $w \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Ostatni warunek oznacza oczywiście abelowość $\langle a_{+w}, b_{+w} \rangle$ dla dowolnego $w \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Równoważności warunków 1. i 3. dowodzi się analogicznie. $\square$

Stwierdzenie 3.2.4. Niech R będzie dowolnym pierścieniem z 1, $m \in \mathbb{N}$ oraz $a \in UT_{\infty}(R)$. Poniższe stwierdzenia są równoważne.

1. Macierz a jest m -wstęgowa.
2. Dla dowolnego $w \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ macierz a_{+w} jest m -wstęgowa.
3. Istnieje $w \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, dla którego macierz a_{+w} jest m -wstęgowa.

Dowód: Ponownie pozwolimy sobie wykazać jedynie równoważność warunków 1. i 2.

Z definicji a_{+w} mamy oczywiście $(a_{+w})_{ij} = a_{i+w, j+w}$. Macierz a jest m -wstęgowa wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{a. } a_{ij} = 0 \text{ dla wszystkich } i, j \text{ takich, że } j - i > m,$$

$$\text{b. } a_{i, i+m} \neq 0 \text{ dla pewnego } i \in \mathbb{N}.$$

Warunki te są równoważne

a'. $a_{i+w, j+w} = 0$ dla wszystkich i, j takich, że $(j+w) - (i+w) > m$, $w \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

b'. dla każdego $w \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ istnieje $i \in \mathbb{N}$ takie, że $a_{i+w, i+w+m} \neq 0$,

które są spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy

a''. $(a_{+w})_{i', j'} = 0$ dla wszystkich i', j' takich, że $j' - i' > m$, $w \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

b''. dla każdego $w \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ istnieje $i' \in \mathbb{N}$ takie, że $(a_{+w})_{i', i'+m} \neq 0$.

Oczywiście z definicji a_{+w} wnioskujemy, że warunek a. jest spełniony również dla $i', j' \leq w$. A zatem a jest m -wstęgowa wtedy i tylko wtedy, gdy a_{+w} jest m -wstęgowa dla wszystkich $w \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. $\square$

Ponadto możemy zauważyć, że spełnione jest również

Stwierdzenie 3.2.5. *Niech R będzie dowolnym pierścieniem z 1, $m \in \mathbb{N}$, i niech $a \in UT_{\infty}(R)$ będzie określona jak w (3.5a). Wtedy a jest m - wstęgowa wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $w \in \mathbb{Z}$ macierz a_w jest m - wstęgowa.*

Nasza kolejna obserwacja dotyczy podgrup wolnych.

Twierdzenie 3.2.7. *Niech $\langle a, b \rangle$ będzie grupą opisaną w Twierdzeniu 3.2.3. Poniższe stwierdzenia są równoważne.*

1. Grupa $\langle a, b \rangle$ spełnia założenia Twierdzenia 3.2.3 (tzn. macierz ab lub ba jest n - wstęgowa) i jest grupą wolną rangi 2.
2. Dla dowolnego $w \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ macierz $a_{+w}b_{+w}$ lub $b_{+w}a_{+w}$ jest n - wstęgowa i $\langle a_{+w}, b_{+w} \rangle$ jest grupą wolną rangi 2.
3. Istnieje $w \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, dla którego macierz $a_{+w}b_{+w}$ lub $b_{+w}a_{+w}$ jest n - wstęgowa i $\langle a_{+w}, b_{+w} \rangle$ jest grupą wolną rangi 2.

Dowód: I tym razem przedstawimy dowód równoważności punktów 1. i 2.

Grupa generowana przez a, b spełnia założenie Twierdzenia 3.2.3 wtedy i tylko wtedy

$$(ab)_{i+pn, i+n+pn} \neq 0 \quad \text{dla } p \in \mathbb{N}.$$

Ma to miejsce, gdy

$$(a_{+w} \cdot b_{+w})_{i+w+pn, i+w+n+pn} \neq 0 \quad \text{dla } p \in \mathbb{N}, w \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

co oznacza, że

$$(a_{+w}^{k_1} b_{+w}^{k'_1} \cdots a_{+w}^{k_r} b_{+w}^{k'_r})_{i+w+pn, i+w+rn+pn} \neq 0 \quad \text{dla } p \in \mathbb{N}, w \in \mathbb{N} \cup \{0\}, r \in \mathbb{N},$$

a to prowadzi nas do wniosku, że $\langle a_{+w}, b_{+w} \rangle$ jest grupą wolną. $\square$

Oczywiście prawdziwe są również twierdzenia

Twierdzenie 3.2.8. *Niech $\langle a, b \rangle$ będzie grupą opisaną w Twierdzeniu 3.2.5. Poniższe stwierdzenia są równoważne.*

1. Grupa $\langle a, b \rangle$ spełnia założenia Twierdzenia 3.2.5 (tzn. $c_{m+1}c_{n-m-1} \neq 0$) i jest grupą wolną rangi 2.
2. Dla dowolnego $w \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ grupa $\langle a_{+w}, b_{+w} \rangle$ jest grupą wolną rangi 2.
3. Istnieje $w \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, dla którego grupa $\langle a_{+w}, b_{+w} \rangle$ jest grupą wolną rangi 2.

Twierdzenie 3.2.9. Niech $\langle a, b \rangle$ będzie grupą opisaną w Twierdzeniu 3.2.6. Poniższe stwierdzenia są równoważne.

1. Grupa $\langle a, b \rangle$ spełnia założenia Twierdzenia 3.2.6 (tzn. $c_m c_{n-m} \neq 0$) i jest grupą wolną rangi 2.
2. Dla dowolnego $w \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ grupa $\langle a_{+w}, b_{+w} \rangle$ jest wolna rangi 2.
3. Istnieje $w \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, dla którego grupa $\langle a_{+w}, b_{+w} \rangle$ jest wolna rangi 2.

Wykorzystamy powyższe twierdzenia do opisu kolejnych grup wolnych.

Jeśli dla $2 \leq i \leq n$ zdefiniujemy $c_h^{(i)}$:

$$c_h^{(i)} = e_n + \sum_{s=2}^{k-i+2} c_s \cdot e_{i,i+s-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & 0 \\ & & & & \\ & & 1 & c_2 & \dots & c_{k-i+2} \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

to otrzymamy następujący

Wniosek 3.2.2. Niech R będzie dowolną dziedziną całkowitości charakterystyki 0, natomiast n, m - liczbami naturalnymi takimi, że $1 \leq m < n$, oraz niech $c = c_h^{(i)}$ będzie zdefiniowana jak w (3.11), gdzie $c_r \neq 0$ dla wszystkich $2 \leq r \leq n - i + 2$. Jeśli $i \leq \min(m+1, n-m+1)$, to $\langle a, b \rangle$, gdzie a, b są określone jak w (3.5a), (3.5b), jest grupą wolną rangi 2.

Dowód: Po uwzględnieniu rezultatów Twierdzenia 3.2.8 zauważamy, że grupa opisana w tezie twierdzenia, to oczywiście szczególny przypadek Twierdzenia 3.2.5. Z założenia $i \leq \min(m+1, n-m+1)$ otrzymujemy, że

1. parametr i spełnia nierówność $i \leq m+1$, a zatem $n-i+2 \geq n-m+1$. Ponieważ $c_r \neq 0$ dla $r \leq n-i+2$, wnioskujemy, że współczynnik c_{n-m+1} jest różny od zera;
2. parametr i spełnia nierówność $i \leq n-m+1$, a więc $n-i+2 \geq m+1$. Mamy więc $c_{m+1} \neq 0$.

Z punktów 1. i 2. wynika więc, że spełnione są założenia Twierdzenia 3.2.5, a zatem $\langle a, b \rangle$ jest grupą wolną. $\square$

Pozwolimy sobie na jeszcze jeden wniosek, tym razem z Twierdzenia 3.2.6. Mianowicie, jeśli $1 \leq j \leq n-1$ i $c_v^{(j)}$ jest równa:

$$c_v^{(j)} = e_n + \sum_{s=j}^{n-1} c_s \cdot e_{s-j+1,j} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & c_j & 0 & \dots \\ & 1 & c_{n-1} & 0 & \dots \\ & & 1 & 0 & \dots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

to prawdziwy jest

Wniosek 3.2.3. Niech R będzie dowolną dziedziną całkowitości charakterystyki 0, natomiast n, m - liczbami naturalnymi takimi, że $1 \leq m < n$, oraz niech $c = c_v^{(j)}$ będzie zdefiniowana jak w (3.12), gdzie $c_r \neq 0$ dla wszystkich $r \geq j$. Jeśli $j \leq \min(m, n-m)$, to $\langle a, b \rangle$, gdzie a, b są zdefiniowane jak w (3.5a), (3.5b), jest grupą wolną rangi 2.

Podobnie jak poprzednio dowód jest bardzo podobny do dowodu Wniosku 3.2.2 i pozwolimy sobie go pominąć.

Udowodnimy teraz, że spełniona jest własność o której wspominaliśmy już dowodząc Twierdzenia 3.2.5. Mamy mianowicie

Twierdzenie 3.2.10. Niech R będzie dowolną dziedziną całkowitości charakterystyki 0, natomiast n, m - liczbami naturalnymi takimi, że $1 \leq m < n$. Jeśli a, b spełniają założenia Twierdzenia 3.2.3 lub 3.2.5, lub 3.2.6, to grupa $\langle a', b' \rangle$, gdzie $\tilde{a}, \tilde{b}$ są zdefiniowane jak w (3.5a), (3.5b) za pomocą przesunięcia $\tilde{m} = n - m$, jest grupą wolną rangi 2.

Dowód: Udowodnimy nasze twierdzenie w przypadku, gdy a, b spełniają założenia Twierdzenia 3.2.3. Przedstawione argumenty można bez trudu przenieść na przypadek Twierdzeń 3.2.5, 3.2.6.

Zgodnie z założeniem mamy $a = \text{Diag}(c, c, c, \dots)$, $b = \text{Diag}(e_m, c, c, \dots)$ oraz wiemy, że istnieje indeks j taki, że

$$(ba)_{j+pn, j+n+pn} \neq 0 \quad \text{dla wszystkich } p \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Rozważmy $\tilde{a}, \tilde{b}$. Możemy je zapisać w następującej formie:

$$\tilde{a} = a = \sum_{1 \leq p < r < n} c_{pr} e_{pr} + \text{Diag}(e_n, c, c, \dots), \quad \tilde{b} = b = \text{Diag}(e_{n-m}, c, c, \dots).$$

Niech

$$\hat{a} = \text{Diag}(e_n, c, c, \dots), \quad \hat{b} = \tilde{b} = b.$$

Ponieważ $\hat{a}_{-(n-m)} \cdot \hat{b}_{-(n-m)} = b \cdot a$ mamy

$$(\hat{a} \cdot \hat{b})_{j+n-m+pn, j+2n-m+pn} \neq 0 \quad \text{dla wszystkich } p \in \mathbb{N}.$$

Macierz $\tilde{a}$ jest sumą $\hat{a}$ oraz $\tilde{c} = \sum_{1 \leq p < r < n} c_{pr} e_{pr}$. Ponieważ $\tilde{c}$ posiada elementy niezerowe jedynie w pierwszych $n - 1$ wierszach, mamy

$$(\tilde{a} \cdot \tilde{b})_{j+n-m+pn, j+2n-m+pn} = (\hat{a} \cdot \hat{b})_{j+n-m+pn, j+2n-m+pn} \neq 0 \quad \text{dla wszystkich } p \in \mathbb{N}.$$

Stąd i z Lematu 3.2.2 otrzymujemy, że

$$\tilde{a}^{k_1} \tilde{b}^{k'_1} \dots \tilde{a}^{k_r} \tilde{b}^{k'_r} \neq e_{\infty} \quad \text{dla wszystkich } r \in \mathbb{N}.$$

Zatem $\langle \tilde{a}, \tilde{b} \rangle$ jest grupą wolną rangi 2. $\square$

3.2.6 Klasyfikacja pewnych podgrup

Generatory podgrup, które przedstawialiśmy są "zbudowane" za pomocą macierzy skończenie wymiarowych $c \in UT_n(R)$. W przypadku, gdy wymiar c wynosi 3 lub 4 możemy zaprezentować pełną klasyfikację naszych podgrup, tzn. ustalić, które z nich są wolne rangi 2, które abelowe, a które nie posiadają żadnej z tych dwóch własności. W ostatnim przypadku podajemy przykład relacji w jakiej pozostają generatory a i b . Zwracamy uwagę Czytelnika, że nie omawiamy wszystkich unitrójkątnych macierzy c , ale te, które spełniają założenie (3.4).

Dla $n = 3$ klasyfikacja jest prostym wnioskiem z Twierdzeń 3.2.3, 3.2.5, 3.2.6, a także 3.2.10. Podajemy ją w Tabelach 3.1, 3.2. Zakładamy, że c_{ij} występujące w przedstawionych macierzach są niezerowe.

Dla $n = 4$ podobnie jak w poprzednim przypadku, część grup możemy sklasyfikować dzięki poznanym twierdzeniom. Poniżej prezentujemy wybrane przypadki, dla których założenia zaprezentowanych twierdzeń nie są spełnione.

Dla

$$c = \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & c_{13} & c_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & c_{13} & 0 \\ 0 & 1 & c_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & c_{14} \\ 0 & 1 & c_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

z przesunięciem $m = 1$ można sprawdzić, że generatory pozostają w relacji $[ba, ab] = e_{\infty}$.

Dla

$$c = \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

z przesunięciem $m = 1$ mamy

$$\beta\alpha = c_{12}c_{34} \left(\sum_{p=0}^{\infty} e_{2+4p, 4+4p} + \sum_{p=0}^{\infty} e_{4+4p, 6+4p} \right) = c_{12}c_{34} \sum_{s=0}^{\infty} e_{2+2s, 4+2s},$$

zatem czynniki $b^{k'_s}a^{k_s}$ występujące w iloczynie $b^{k'_1}a^{k_1} \dots b^{k'_r}a^{k_r}$ spełniają założenia Lematu 3.2.2. Stąd każdy taki iloczyn jest $2r$ - wstęgowy, czyli różny od macierzy jednostkowej. A zatem grupa $\langle a, b \rangle$ skonstruowana za pomocą powyższego c jest wolna rangi 2.

Uzasadnicie, że dla c zdefiniowanego jak powyżej z przesunięciem $m = 3$ grupa $\langle a, b \rangle$ również jest wolna jest analogiczne jak w przypadku $m = 1$.

Wszystkie przypadki są zebrane w Tabelach 3.3, 3.4, 3.5.

Tabela 3.1: Klasyfikacja grup $\langle a, b \rangle$ dla $c \in UT_3(R)$, gdy c ma jeden współczynnik niezerowy nad główną przekątną.

c	$m = 1$	$m = 2$
$\begin{bmatrix} 1 & c_{11} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$[ba, ab] = e_{\infty}$	$[ba, ab] = e_{\infty}$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & c_{12} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$[ba, ab] = e_{\infty}$	$[ba, ab] = e_{\infty}$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$[ba, ab] = e_{\infty}$	$[ba, ab] = e_{\infty}$

Tabela 3.2: Klasyfikacja grup $\langle a, b \rangle$ dla $c \in UT_3(R)$, gdy c ma dwa współczynniki niezerowe nad główną przekątną.

c	$m = 1$	$m = 2$
$\begin{bmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	wolna rangi 2	wolna rangi 2
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & c_{13} \\ 0 & 1 & c_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	wolna rangi 2	wolna rangi 2

Tabela 3.3: Klasyfikacja grup $\langle a, b \rangle$ dla $c \in UT_4(R)$, gdy c ma jeden współczynnik niezerowy nad główną przekątną.

c	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
$\begin{bmatrix} 1 & c_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$[ba, ab] = e_{\infty}$	abelowa	$[ba, ab] = e_{\infty}$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & c_{13} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	abelowa	wolna rangi 2	abelowa
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & c_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$[ba, ab] = e_{\infty}$	abelowa	$[ba, ab] = e_{\infty}$

Tabela 3.4: Klasyfikacja grup $\langle a, b \rangle$ dla $c \in UT_4(R)$, gdy c ma dwa współczynniki niezerowe nad główną przekątną.

c	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
$\begin{bmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$[ba, ab] = e_{\infty}$	wolna rangi 2	$[ba, ab] = e_{\infty}$
$\begin{bmatrix} 1 & c_{12} & 0 & c_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	wolna rangi 2	abelowa	wolna rangi 2
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & c_{13} & c_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$[ba, ab] = e_{\infty}$	wolna rangi 2	$[ba, ab] = e_{\infty}$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & c_{13} & 0 \\ 0 & 1 & c_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$[ba, ab] = e_{\infty}$	wolna rangi 2	$[ba, ab] = e_{\infty}$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & c_{13} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & c_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	wolna rangi 2	wolna rangi 2	wolna rangi 2
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & c_{14} \\ 0 & 1 & c_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$[ba, ab] = e_{\infty}$	wolna rangi 2	$[ba, ab] = e_{\infty}$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & c_{14} \\ 0 & 1 & 0 & c_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$[ba, ab] = e_{\infty}$	wolna rangi 2	$[ba, ab] = e_{\infty}$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & c_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	wolna rangi 2	abelowa	wolna rangi 2

Tabela 3.5: Klasyfikacja grup $\langle a, b \rangle$ dla $c \in UT_4(R)$, gdy c ma trzy współczynniki niezerowe nad główną przekątną.

c	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
$\begin{bmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	wolna rangi 2	wolna rangi 2	wolna rangi 2
$\begin{bmatrix} 1 & c_{12} & 0 & c_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	wolna rangi 2	abelowa	wolna rangi 2
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & c_{14} \\ 0 & 1 & 0 & c_{24} \\ 0 & 0 & 1 & c_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	wolna rangi 2	wolna rangi 2	wolna rangi 2

ROZDZIAŁ

4

PODGRUPY PARABOLICZNE GRUPY $SL_{VK}(R)$

W tym rozdziale będziemy badać specjalną grupę Vershika-Kerova – odpowiednik specjalnej grupy liniowej w $GL_{VK}(R)$. Zdefiniujemy podgrupy paraboliczne tej grupy. Podamy ich pełną charakteryzację za pomocą pojęcia sieci ideałów. Następnie wskażemy własności tych podgrup związane ze sprzężeniem. Rozdział zakończymy uwagą dotyczącą rozkładu Bruhata dla macierzy ze specjalnej grupy Vershika-Kerova nad ciałem.

4.1 Podgrupy paraboliczne i sieciowe - wprowadzenie

Definicja 4.1.1. Załóżmy, że G jest grupą macierzy, skończonego wymiaru n , nad pewnym pierścieniem R , która zawiera grupę macierzy trójkątnych. Jeśli H jest grupą taką, że

$$T_n(R) \leq H \leq G,$$

to H nazywamy podgrupą paraboliczną grupy G .

Analogicznie

Definicja 4.1.2. Jeśli G jest podgrupą grupy Vershika-Kerova, zawierającą $T_\infty(R)$, a H jest grupą taką, że

$$T_\infty(R) \leq H \leq G, \tag{4.1}$$

to H nazywamy podgrupą paraboliczną G .

Ponieważ grupa Vershika-Kerova składa się z macierzy, które tylko na skończonej liczbie miejsc różnią się od macierzy trójkątnych, celowe wydaje się zbadanie podgrup parabolicznych tej grupy.

Podgrupy paraboliczne grup $GL_n(R)$ oraz $GL_{VK}(R)$ są ściśle związane z pierścieniem R , a ściślej mówiąc z jego ideałami.

Niech I będzie zbiorem indeksów, którymi numerujemy wiersze oraz kolumny macierzy z grupy G , tzn. I może być zbiorem $\{1, 2, \dots, n\}$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ lub zbiorem liczb naturalnych.

Definicja 4.1.3. System ideałów $\sigma = (\sigma_{ij})_{i,j \in I}$ pierścienia R nazywamy siecią, jeśli

$$\sigma_{ik}\sigma_{kj} \subseteq \sigma_{ij} \quad \text{dla wszystkich } i, j, k \in I. \quad (4.2)$$

Sieci będziemy utożsamiali z macierzami, w których na odpowiednich pozycjach umiejscowione będą ideały.

Przykład 4.1.1. Dla dowolnego pierścienia R i jego ideału μ sieciami są na przykład

$$\sigma = \begin{pmatrix} R & \mu & R \\ \mu & R & \mu \\ R & \mu & R \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} \mu & \{0\} & \mu \\ \mu & \mu & \mu \\ \{0\} & \{0\} & \mu \end{pmatrix}.$$

Przykład 4.1.2. Dla dowolnego (niepustego) zbioru indeksów I system ideałów σ taki, że

$$\sigma = \begin{cases} R & \text{dla } i \leq j \\ \{0\} & \text{dla } i > j \end{cases}$$

również jest siecią.

Definicja 4.1.4. Sieci spełniające warunek

$$\sigma_{ij} = R \quad \text{dla wszystkich } i \leq j \quad (4.3)$$

nazywamy T - sieciami.

W szczególności sieć z Przykładu 4.1.2 jest "najmniejszą" T - siecią.

Nic trudno zauważyć, że dla sieci tego samego wymiaru spełniony jest

Lemat 4.1.1. Załóżmy, że R jest dowolnym pierścieniem, natomiast $I = \mathbb{N}$ lub $I = \{1, 2, \dots, n\}$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Oznaczmy przez $\Sigma(R, I)$ zbiór wszystkich sieci pierścienia R indeksowanych elementami zbioru I .

1. Jeśli $\sigma, \tau \in \Sigma(R, I)$, to system ideałów $\sigma \cap \tau$, gdzie $(\sigma \cap \tau)_{ij} = \sigma_{ij} \cap \tau_{ij}$, również należy do $\Sigma(R, I)$.
2. Para $(\Sigma(R, I), \leq)$, gdzie $\sigma \leq \tau$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sigma_{ij} \subseteq \tau_{ij}$ dla wszystkich i, j , jest kratą.

Dowód: 1. Przecięcie ideałów jest zawsze ideałem, tak więc pozostaje nam do udowodnienia, że spełniony jest warunek (4.2).

Ponieważ

$$(\sigma_{ik} \cap \tau_{ik})(\sigma_{kj} \cap \tau_{kj}) \subseteq \sigma_{ik}\sigma_{kj} \subseteq \sigma_{ij} \quad \text{oraz} \quad (\sigma_{ik} \cap \tau_{ik})(\sigma_{kj} \cap \tau_{kj}) \subseteq \tau_{ik}\tau_{kj} \subseteq \tau_{ij}$$

dla $i, j, k \in I$, mamy

$$(\sigma_{ik} \cap \tau_{ik})(\sigma_{kj} \cap \tau_{kj}) \subseteq \sigma_{ij} \cap \tau_{ij}.$$

Zauważmy, że taki sam dowód możemy przeprowadzić dla przypadku przecięcia dowolnej rodziny sieci.

2. Łatwo widać, że relacja $\leq$ jest częściowym porządkiem w $\Sigma(R, I)$.

Założmy, że zachodzi inkluzja $\{\sigma_k\}_{k \in K} \subseteq \Sigma(R, I)$. Wtedy $\inf_{k \in K}(\sigma_k)$ jest systemem σ takim, że $\sigma_{ij} = \bigcap_{k \in K}(\sigma_k)_{ij}$. Jak wspomnieliśmy w punkcie 1. jest to sieć ideałów R , a zatem $\inf_{k \in K}(\sigma_k \in \Sigma(R, I))$.

Rozważmy teraz zbiór sieci τ spełniających warunek $\sigma_k \leq \tau$ dla każdego $k \in K$. Jest on niepusty, gdyż należy do niego sieć τ spełniająca $\tau_{ij} = R$ dla $i, j \in I$. Przecięcie tych sieci, również jest siecią, spełnia warunek $\sigma_k \leq \bigcap \tau$ i jest najmniejszą (ze względu na relację $\leq$) siecią, która go spełnia, a więc jest to supremum tych sieci. Stąd $\sup_{k \in K}(\sigma_k) \in \Sigma(R, I)$. $\square$

Niech $\sigma = (\sigma_{ij})_{i,j \in I}$ będzie siecią pierścienia R . Oznaczmy przez $M(\sigma)$ zbiór

$$M(\sigma) = \{m \in M : m_{ij} \in \sigma_{ij} \text{ dla wszystkich } i, j \in I\},$$

gdzie M oznacza $M_n(R)$ w przypadku, gdy $I = \{1, 2, \dots, n\}$, natomiast gdy $I = \mathbb{N}$ zakładamy, że $M = M_{Cf}(R)$. Nietrudno zauważyć, że zbiór

$$e + M(\sigma) = \{e + m : m \in M(\sigma)\}$$

jest zamknięty ze względu na mnożenie macierzy oraz zawiera macierz jednostkową, a także, że wszystkie macierze w nim zawarte są odwracalne. Zatem $e + M(\sigma)$ zawiera pewne podgrupy grupy $GL_n(R)$ (dla pewnego n) lub podgrupy $GL_{VK}(R)$. Okazuje się, że $e + M(\sigma)$ zawsze zawiera dokładnie jedną podgrupę H , która jest maksymalna, tzn. spełnia

$$\{e\} \leq K \leq H \leq e + M(\sigma) \Rightarrow K = H.$$

Tę jedyną maksymalną podgrupę H nazywamy podgrupą sicciovą i aby zaznaczyć, że jest ona wyznaczona przez sieć σ piszemy $H = G(\sigma)$. Ponadto, jeśli σ jest T -siecią, to $G(\sigma)$ nazywamy T -sicciovą podgrupą.

Okazuje się, że podgrupy paraboliczne pełnych grup liniowych skończonego wymiaru są podgrupami sicciovymi. Dokładniej udowodnione zostało

Twierdzenie 4.1.1 (Z.I. Borevich, [9]). *Niech R będzie pierścieniem półlokalnym, z 1, takim, że jedynka ta może być zapisana jako suma dwóch elementów odwracalnych w tym pierścieniu. Jeśli H jest podgrupą paraboliczną grupy $GL_n(R)$, to istnieje jednoznacznie wyznaczona T -sieć ideałów σ taka, że $H = G(\sigma)$.*

W szczególności, gdy pierścień R jest ciałem, elementy podgrupy parabolicznej mają szczególną formę nazywaną schodkową, przedstawioną poniżej:

$$g = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix},$$

gdzie puste miejsca oznaczają 0, natomiast $*$ mogą być dowolnymi elementami R (pod warunkiem, że g jest odwracalna). Właśnie współczynniki zerowe wyznaczają tu strukturę schodkową.

Dla pierścieni zawierających więcej ideałów zbiór podgrup parabolicznych jest oczywiście bogatszy.

Siec $\sigma = (\sigma_{ij})_{i,j \in I}$ nazywamy maksymalną, jeśli dla każdej sieci $\tau = (\tau_{ij})_{i,j \in I}$ z $\sigma \leq \tau$ wynika, że albo $\tau = \sigma$ albo $\tau_{ij} = R$ dla wszystkich $i, j \in I$. Okazuje się, że wszystkie T -sieci maksymalne σ spełniają warunek

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} \mu & \text{gdy } i > k, j < k \\ R & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

dla pewnego μ -ideału maksymalnego w R , oraz pewnej ustalonej liczby k . Oznacza to, że sieci maksymalne można zilustrować jak poniżej.

$$\left(\begin{array}{ccccc|cc} R & R & R & R & R & & \\ R & R & R & R & R & & \\ R & R & R & R & R & & \\ \hline \mu & \mu & \mu & & & R & R \\ \mu & \mu & \mu & & & R & R \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccccc|ccc} R & R & R & R & R & & & \\ R & R & R & R & R & & & \\ \hline \mu & \mu & & & & R & R & R \\ \mu & \mu & & & & R & R & R \\ \mu & \mu & & & & R & R & R \end{array} \right)$$

Ponadto, każda T -sieć może być przedstawiona jako iloczyn T -sieci maksymalnych. A zatem każdą T -sieć możemy sobie wyobrazić jak na poniższym schemacie.

$$\left(\begin{array}{ccccc} R & R & R & R & \dots \\ \mu & R & R & R & \\ \eta & \xi & R & R & \\ \alpha & \beta & \gamma & R & \\ \vdots & & & & \ddots \end{array} \right),$$

gdzie $\mu, \eta, \dots$ oznaczają ideały pierścienia R oraz każdy ideał zawiera się w ideale "stojącym" nad nim oraz w ideale "stojącym" po jego prawej stronie.

Łatwo widać, że porządek $\leq$ w zbiorze sieci (tego samego wymiaru) odpowiada porządkowi $\subseteq$ w zbiorze podgrup.

Można zauważyć, że dla grupy Vershika-Kerova mamy rezultat analogiczny do Twierdzenia 4.1.1.

Twierdzenie 4.1.2 (W. Hołubowski, [19]). *Niech R będzie pierścieniem półlokalnym, z 1, takim, że jedynka ta może być zapisana jako suma dwóch elementów odwracalnych w tym pierścieniu. Jeśli H jest podgrupą paraboliczną grupy Vershika-Kerova, to istnieje jednoznacznie wyznaczona T - sieć idealów σ taka, że $H = G(\sigma)$.*

Zostało również udowodnione, że podgrupy paraboliczne wymienionych wyżej grup posiadają następujące własności.

Twierdzenie 4.1.3 (Z.I. Borevich, [9]). *Niech R będzie pierścieniem półlokalnym, z 1, takim, że jedynka ta może być zapisana jako suma dwóch elementów odwracalnych. Ponadto niech $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Jeśli P_1 oraz P_2 są podgrupami parabolicznymi $GL_n(R)$ oraz $gP_1g^{-1} \subseteq P_2$, to $g \in P_2$ i $P_1 \subseteq P_2$.*
2. *Dowolne dwie podgrupy paraboliczne grupy $GL_n(R)$ nie są sprzężone.*
3. *Normalizator dowolnej podgrupy parabolicznej P grupy $GL_n(R)$ jest równy grupie P .*

Twierdzenie 4.1.4 (W. Hołubowski, [19]). *Niech R będzie pierścieniem półlokalnym, z 1, takim, że jedynka ta może być zapisana jako suma dwóch elementów odwracalnych.*

1. *Jeśli P_1 oraz P_2 są podgrupami parabolicznymi $GL_{VK}(R)$ oraz $gP_1g^{-1} \subseteq P_2$, to $g \in P_2$ i $P_1 \subseteq P_2$.*
2. *Dowolne dwie podgrupy paraboliczne grupy $GL_{VK}(R)$ nie są sprzężone.*
3. *Normalizator dowolnej podgrupy parabolicznej P grupy $GL_{VK}(R)$ jest równy grupie P .*

4.2 Podgrupy paraboliczne grupy $SL_{VK}(R)$

4.2.1 Opis podgrup parabolicznych $SL_{VK}(R)$

Przejdźmy do opisu podgrup parabolicznych pewnej szczególnej podgrupy grupy Vershika-Kerova.

Niech R będzie pierścieniem z 1. Zbiór wszystkich macierzy postaci

$$\left[\begin{array}{c|c} g_1 & g_2 \\ \hline 0 & g_3 \end{array} \right], \quad (4.4)$$

gdzie $g_1 \in SL_n(R)$ oraz $g_3 \in UT_\infty(R)$ będziemy oznaczać przez $SL_{VK}(n, R)$. Nie trudno zauważyć, że jest to podgrupa grupy Vershika-Kerova. Ich sumę $\bigcup_{n=1}^\infty SL_{VK}(n, R)$, która również jest podgrupą $GL_{VK}(R)$, będziemy oznaczać przez $SL_{VK}(R)$ i w tej pracy będziemy nazywać ją specjalną grupą Vershika-Kerova.

Oczywiście dla grupy $SL_{VK}(R)$ definicja podgrupy parabolicznej zadana warunkiem (4.1) z poprzedniego podrozdziału nie ma sensu, gdyż $SL_{VK}(R)$ prawie nigdy nie zawiera

wszystkich macierzy górnotrójkątnych (wyjątek stanowi przypadek, gdy R jest pierścieniem dwuelementowym).

Oznaczmy przez $TS_\infty(R)$ iloczyn $T_\infty(R) \cap SL_{VK}(R)$. Grupa $TS_\infty(R)$ składa się więc z macierzy postaci (4.4) takich, że $g_1 \in T_n(R)$ oraz $(g_1)_{11}(g_1)_{22} \cdots (g_1)_{n-1,n-1}(g_1)_{nn} = 1$, oraz $g_3 \in UT_\infty(R)$.

Podgrupą paraboliczną specjalnej grupy Vershika-Kerova nazywamy dowolną grupę H taką, że

$$TS_\infty(R) \leq H \leq SL_{VK}(R).$$

Naszym zadaniem będzie opisanie podgrup parabolicznych specjalnej grupy Vershika-Kerova. Podobnie jak w przypadku grup $GL_{VK}(R)$ oraz $GL_n(R)$ okaże się, że wszystkie te podgrupy są podgrupami sieciowymi. Jeśli H jest podgrupą $SL_{VK}(R)$ wyznaczoną przez sieć σ , to będziemy pisać $H = \Gamma(\sigma)$.

Zanim przystąpimy do omówienia naszych głównych rezultatów zaprezentujemy kilka własności rachunkowych. Wprowadzimy oznaczenie dla pewnych specjalnych macierzy diagonalnych, które będą wykorzystywane w trakcie dowodów. Kładziemy

$$d_{ij}(\theta) = e + (\theta^{-1} - 1)e_{ii} + (\theta - 1)e_{jj} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \theta^{-1} & & & \\ & & \theta & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} i \\ \\ j \end{matrix}$$

dla dowolnych indeksów i, j , $i \neq j$, a także dowolnego elementu $\theta \in R^*$. Dla tych macierzy prawdziwe jest

Stwierdzenie 4.2.1. *Jeśli R jest dowolnym pierścieniem z 1, $\alpha \in R$, $\theta \in R^*$, natomiast G grupą $GL_{VK}(R)$ lub grupą $GL_n(R)$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, to dla dowolnych parami różnych indeksów i, j, k w G spełnione są tożsamości*

$$d_{ij}(\theta)t_{jk}(\alpha)d_{ji}(\theta) = t_{jk}(\theta\alpha), \quad (4.5)$$

$$d_{ki}(\theta)t_{jk}(\alpha)d_{ik}(\theta) = t_{jk}(\alpha\theta). \quad (4.6)$$

Dowód: Niech e oznacza macierz e_∞ lub e_n . Mamy:

$$\begin{aligned} d_{ij}(\theta)t_{jk}(\alpha)d_{ji}(\theta) &= (e + (\theta^{-1} - 1)e_{ii} + (\theta - 1)e_{jj})(e + \alpha e_{jk})d_{ji}(\theta) = \\ &= (e + (\theta^{-1} - 1)e_{ii} + (\theta - 1)e_{jj} + \alpha e_{jk} + (\theta\alpha - \alpha)e_{jk})d_{ji}(\theta) = \\ &= (e + (\theta^{-1} - 1)e_{ii} + (\theta - 1)e_{jj} + \theta\alpha e_{jk})(e + (\theta^{-1} - 1)e_{jj} + (\theta - 1)e_{ii}) = \\ &= e + (\theta^{-1} - 1)e_{jj} + (\theta - 1)e_{ii} + (\theta^{-1} - 1)e_{ii} + (\theta^{-1} - 1)(\theta - 1)e_{ii} + \\ &\quad + (\theta - 1)e_{jj} + (\theta - 1)(\theta^{-1} - 1)e_{jj} + \theta\alpha e_{jk} = \\ &= e + (\theta^{-1} - 1 + \theta - 1 + 1 - \theta - \theta^{-1} + 1)e_{jj} + \\ &\quad + (\theta - 1 + \theta^{-1} - 1 + 1 - \theta^{-1} - \theta + 1)e_{ii} + \theta\alpha e_{jk} = e + \theta\alpha e_{jk} = t_{jk}(\theta\alpha). \end{aligned}$$

Tożsamości (4.6) dowodzimy analogicznie. Pozwolimy sobie opuścić jej dowód. $\square$

Stwierdzenie 4.2.2. *Jeśli R jest dowolnym pierścieniem, z 1, a G grupą $GL_{VK}(R)$ lub $GL_n(R)$ ($n \in \mathbb{N}$), to dla dowolnych parami różnych indeksów i, j, k oraz $\alpha, \beta \in R$ w grupie G prawdziwa jest tożsamość*

$$[t_{ik}(\alpha), t_{kj}(\beta)] = t_{ij}(\alpha\beta). \quad (4.7)$$

Dowód: Postępujemy podobnie jak przy poprzednim stwierdzeniu.

$$\begin{aligned} [t_{ik}(\alpha), t_{kj}(\beta)] &= t_{ik}^{-1}(\alpha)t_{kj}^{-1}(\beta)t_{ik}(\alpha)t_{kj}(\beta) = (e - \alpha e_{ik})(e - \beta e_{kj})t_{ik}(\alpha)t_{kj}(\beta) = \\ &= (e - \beta e_{kj} - \alpha e_{ik} + \alpha\beta e_{ij})(e + \alpha e_{ik})t_{kj}(\beta) = \\ &= (e + \alpha e_{ik} - \beta e_{kj} - \alpha e_{ik} + \alpha\beta e_{ij})t_{kj}(\beta) = (e - \beta e_{kj} + \alpha\beta e_{ij})(e + \beta e_{kj}) = \\ &= e + \beta e_{kj} - \beta e_{kj} + \alpha\beta e_{ij} = e + \alpha\beta e_{ij} = t_{ij}(\alpha\beta) \quad \square \end{aligned}$$

Aby nieco uprościć nasz problem posłużymy się szczególnym przedstawieniem macierzy skończonych. Mianowicie, będziemy korzystać z następującego lematu.

Lemat 4.2.1 (Rozkład Gaussa). *Jeśli R jest pierścieniem stabilnej rangi 1, to dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, każda macierz $g \in GL_n(R)$ może być przedstawiona w postaci iloczynu $g = uvdw$, gdzie u, w są macierzami górnymi unitrójkątnymi, v jest macierzą dolną unitrójkątną, natomiast d jest macierzą diagonalną.*

Rozkład ten możemy sobie wyobrazić jak na Rysunku 4.1.

Rysunek 4.1: Rysunek ilustrujący Lemat 4.2.1. Symbole * oznaczają pewne współczynniki z R , natomiast puste miejsca oznaczają 0.

$$\begin{bmatrix} * & * & \dots & * \\ * & * & & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & * & \dots & * \\ & 1 & & \vdots \\ & & & * \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & & & \\ & * & & \\ & \vdots & 1 & \\ * & * & * & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & * & \dots & * \\ & 1 & & \vdots \\ & & & * \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Wykorzystamy tę informację, by udowodnić

Lemat 4.2.2. *Niech R będzie pierścieniem z 1, takim, że $sr(R) = 1$, oraz niech $n \geq 1$. Dla dowolnej macierzy $g \in SL_{n+1}(R)$ takiej, że $g_{n+1,n+1} = 1$ oraz $g_{n+1,i} = 0$ dla $1 \leq i \leq n$, istnieje rozkład $g = uvdw$, w którym u, w są macierzami górnymi unitrójkątnymi, d - macierzą diagonalną, natomiast v jest macierzą dolną unitrójkątną taką, że $v_{n+1,i} = 0$ dla $1 \leq i \leq n$.*

Tezę naszego lematu można zilustrować za pomocą Rysunku 4.2.

Rysunek 4.2: Rysunek ilustrujący Lemat 4.2.2. Symbole * oznaczają pewne współczynniki z R , puste miejsca oznaczają 0.

$$\begin{bmatrix} * & & * & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & & * & * \\ & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ & 1 & \vdots \\ & & * \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & & & \\ & & & \\ & & & \\ * & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ * & & & \\ * & * & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ & 1 & \vdots \\ & & * \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Dowód Lematu 4.2.2: Niech $g \in SL_{n+1}(R)$ spełnia założenia naszego lematu. Wtedy oczywiście możemy przedstawić g w postaci

$$\tilde{g} = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{g} & c \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right],$$

gdzie $\tilde{g} \in SL_n(R)$, natomiast c jest wektorem-kolumną.

Ponieważ R jest pierścieniem stabilnej rangi 1, możemy skorzystać z Lematu 4.2.1. Mamy więc rozkład $\tilde{g} = \tilde{u}\tilde{v}\tilde{d}\tilde{w}$, gdzie $\tilde{u}, \tilde{w}$ są górne unitrójkatne, $\tilde{v}$ - dolna unitrójkatna, a $\tilde{d}$ - diagonalna. Definiujemy teraz macierze wymiaru $n+1$:

$$u = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{u} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right], \quad v = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{v} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right], \quad d = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{d} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right], \quad w = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{w} & \tilde{d}^{-1}\tilde{v}^{-1}\tilde{u}^{-1}c \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right].$$

Rutynowe rachunki pokazują, że $uvdw = g$. Równie łatwo zauważyć, że u, w są górne unitrójkatne, d jest diagonalna, a v jest dolna unitrójkatna, a wszystkie jej elementy w ostatnim wierszu, oprócz ostatniego, są równe 0. $\square$

Przejdziemy teraz do najważniejszego twierdzenia tej części pracy – opisu podgrup parabolicznych grupy $SL_{VK}(R)$. O pierścieniu R będziemy zakładać, że jest stabilnej rangi 1 oraz, że jedynek tego pierścienia może być przedstawiona jako suma (dwóch) elementów odwracalnych. Pierścienie te mają pewną ciekawą własność – są one generowane addytywnie przez zbiór swoich elementów odwracalnych.

Twierdzenie 4.2.1. *Niech R będzie pierścieniem stabilnej rangi 1, zawierającym element θ taki, że $\theta, 1-\theta \in R^*$. Jeśli H jest podgrupą paraboliczną grupy specjalnej grupy Vershika-Kerova, to H jest jednoznacznie wyznaczona przez pewną T - sieć σ , tzn. $H = \Gamma(\sigma)$.*

Dowód: Załóżmy, że H jest podgrupą paraboliczną $SL_{VK}(R)$. Zdefiniujemy system σ następująco:

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} \{\alpha \in R : t_{ij}(\alpha) \in H\} & \text{gdy } i > j \\ R & \text{gdy } i \leq j, \end{cases}$$

a następnie za pomocą σ , dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ definiujemy systemy $\sigma(n)$:

$$(\sigma(n))_{ij} = \begin{cases} \{0\} & \text{gdy } i > \max(n, j) \\ \sigma_{ij} & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Systemy σ i $\sigma(m)$ są porównane na Rysunkach 4.3, 4.4.

Rysunek 4.3: Rysunek ilustrujący σ .

$$\sigma : \begin{pmatrix} R & R & R & & & \\ \sigma_{21} & R & R & R & & \\ \vdots & & R & R & R & \vdots \\ \sigma_{n1} & & \sigma_{n,n-1} & R & R & R \\ \sigma_{n+1,1} & & \sigma_{n+1,n-1} & \sigma_{m+1,m} & R & R & R \\ \sigma_{n+2,1} & & \sigma_{n+2,n-1} & \sigma_{n+2,n} & \sigma_{n+2,n+1} & R & R \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

Rysunek 4.4: Rysunek ilustrujący $\sigma(n)$. Puste miejsca w lewym dolnym rogu oznaczają ideały zerowe.

$$\sigma(m) : \begin{pmatrix} R & R & R & & & \\ \sigma_{21} & R & R & R & & \\ \vdots & & R & R & R & \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{n,n-1} & R & R & R \\ & & & R & R & R \\ & & & & R & R \\ & & & & & R \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Udowodnijmy, że σ jest siecią ideałów.

Najpierw pokażemy, że σ_{ij} jest ideałem dla dowolnych i, j . Oczywiście dla $i \leq j$ nie ma czego dowodzić. Niech więc $i > j$. Jeśli $\alpha, \beta \in \sigma_{ij}$, to z definicji σ_{ij} mamy $t_{ij}(\alpha), t_{ij}(\beta) \in H$. Stąd wynika, że $t_{ij}(\alpha) \cdot t_{ij}(\beta) = t_{ij}(\alpha + \beta) \in H$. Niech $\alpha \in \sigma_{ij}$ czyli $t_{ij}(\alpha) \in H$. Niech $\beta \in R^*$. Wtedy z tego, że H jest podgrupą paraboliczną oraz tożsamości (4.5), (4.6) otrzymujemy, że

$$d_{i+1,i}(\beta)t_{ij}(\alpha)d_{i,i+1}(\beta) = t_{ij}(\beta\alpha) \in H,$$

$$d_{j,i+1}(\beta)t_{ij}(\alpha)d_{i+1,j}(\beta) = t_{ij}(\alpha\beta) \in H,$$

tak więc $\alpha\beta, \beta\alpha \in \sigma_{ij}$ dla dowolnego $\beta \in R^*$. Rozważmy dowolny element $\gamma \in R$. Ponieważ R jest generowany addytywnie przez R^* , możemy zapisać γ w postaci sumy $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_m$, gdzie $\beta_i \in R^*$ dla wszystkich i . Stąd otrzymujemy, że $\prod_{i=1}^m t_{ij}(\beta_i\alpha) = t_{ij}((\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_m)\alpha) = t_{ij}(\gamma\alpha) \in H$. Analogicznie dla $t_{ij}(\alpha\gamma) \in H$. A zatem $\gamma\alpha, \alpha\gamma \in \sigma_{ij}$. To dowodzi, że σ_{ij} jest ideałem.

Rozważmy teraz ideał $\sigma_{ik} \cdot \sigma_{kj}$. Jest on generowany przez elementy postaci $\alpha \cdot \beta$ takie, że $t_{ik}(\alpha), t_{kj}(\beta) \in H$. Z tożsamości (4.7) otrzymujemy, że $[t_{ik}(\alpha), t_{kj}(\beta)] = t_{ij}(\alpha\beta) \in H$, a stąd, że $\alpha\beta \in \sigma_{ij}$. Mamy więc $\sigma_{ik}\sigma_{kj} \subseteq \sigma_{ij}$.

Faktu, że $\sigma(m)$ jest siecią, dowodzimy w ten sam sposób.

Oznaczmy przez $H(n)$ przecięcie $H \cap SL_{\infty}(n, R)$. Oczywiście $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H(n)$. Można również zauważyć, że analogiczną zależność mamy dla podgrup sieciowych, mianowicie

a następnie z tożsamości (4.6) tego samego stwierdzenia i mamy

$$d_{n+1,j}(\theta - 1) \cdot t_{nj}(v_{nj}(\theta - 1)) \cdot d_{j,n+1}(\theta - 1) = t_{nj}(v_{nj}) \in H(n+1).$$

Ostatecznie więc $t_{nj}(v_{nj}) \in H(n+1)$ dla dowolnego j .

Zauważmy, że z tego, że $t_{nj}(v_{nj}) \in H(n+1)$ wynika, że $v_n = \prod_{j=1}^{n-1} t_{nj}(v_{nj}) \in H(n+1)$.

Stąd z kolci mamy $v \cdot v_n^{-1} = \prod_{k=2}^{n-1} \in H(n+1)$.

Żałóżmy, że dla pewnego $2 \leq i \leq n-1$ udowodniliśmy, że $v' = v \cdot v_n^{-1} \cdots v_{i+1}^{-1} \in H(n+1)$.

Wtedy z tego, że H jest podgrupą paraboliczną otrzymujemy, że

$$[d_{j,n+1}(\theta), [d_{i,n+1}(\theta^{-1}), (v')^{-1}]^{-1}] = t_{ij}((\theta - 1)v_{ij}(\theta - 1)) \in H(n+1),$$

gdzie $1 \leq j \leq i-1$. Następnie z tożsamości (4.5), (4.6) wynika, że

$$d_{i,n+1}(\theta - 1)t_{ij}((\theta - 1)v_{ij}(\theta - 1))d_{n+1,i}(\theta - 1) = t_{ij}(v_{ij}(\theta - 1)) \in H(n+1),$$

$$d_{n+1,j}(\theta - 1)t_{ij}(v_{ij}(\theta - 1))d_{j,n+1}(\theta - 1) = t_{ij}(v_{ij}) \in H(n+1).$$

Pokazaliśmy zatem, że jeśli $v \in H(n+1)$, to $t_{ij}(v_{ij}) \in H(n+1)$. A zatem mamy równość $H(n+1) = \Gamma(\sigma(n+1))$, z której wynika, że $H = \Gamma(\sigma)$. $\square$

4.2.2 Własności podgrup parabolicznych $SL_{VK}(R)$

Naturalnym jest przypuszczać, że podgrupy parabolicznej specjalnej grupy Vershika-Kerova mają własności analogiczne do zaprezentowanych w Twierdzeniu 4.1.4. Tak jest w istocie.

Twierdzenie 4.2.2. *Niech R będzie pierścieniem stabilnej rangi 1, w którym istnieje element θ taki, że $\theta, 1 - \theta \in R^*$.*

1. *Jeśli dla dwóch podgrup parabolicznych P_1, P_2 grupy $SL_{VK}(R)$ oraz pewnej macierzy $g \in SL_{VK}(R)$ mamy inkluzję $g^{-1}P_1g \subseteq P_2$, to $g \in P_2$ i $P_1 \subseteq P_2$.*
2. *Jeśli P_1, P_2 są różnymi podgrupami parabolicznymi grupy $SL_{VK}(R)$, to P_1 i P_2 nie są sprzężone.*
3. *Normalizator dowolnej podgrupy parabolicznej $SL_{VK}(R)$ jest równy tej podgrupie.*

Dowód: 1. Będziemy stosowali oznaczenia, które wprowadziliśmy w dowodzie Twierdzenia 4.2.1.

Ponieważ P_1, P_2 są paraboliczne, możemy założyć, że $P_1 = \Gamma(\sigma)$ i $P_2 = \Gamma(\sigma')$ dla pewnych sieci σ, σ' . Żałóżmy, że

$$g^{-1}\Gamma(\sigma)g \subseteq \Gamma(\sigma'). \quad (4.8)$$

Naszym celem jest wykazanie, że $g \in \Gamma(\sigma')$ oraz, że $\sigma_{ij} \subseteq \sigma'_{ij}$ dla dowolnych i, j .

Macierz g należy do $SL_{VK}(R)$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, jest więc postaci

$$g = \left[\begin{array}{c|c} g_1 & g_2 \\ \hline 0 & g_3 \end{array} \right]$$

dla pewnych macierzy $g_1 \in SL_n(R)$, $g_3 \in UT_\infty(R)$. Zauważmy, że z założenia (4.8) oraz tego, że $g \in SL_{VK}(n, R)$ wynika od razu, że $\sigma_{ij} \subseteq \sigma'_{ij}$ dla wszystkich indeksów $i > n$, oraz dowolnych j . Przejdźmy zatem do indeksów $j < i \leq n$. Wystarczy wykazać, że z $g^{-1}\Gamma(\sigma(n))g \subseteq \Gamma(\sigma'(n))$ wynika, że $g \in \Gamma(\sigma'(n))$ oraz $\Gamma(\sigma(n)) \subseteq \Gamma(\sigma'(n))$. Podobnie jak w poprzednim dowodzie zdefiniujmy macierz h jako

$$h = \left[\begin{array}{c|c} g_1 & (g_2)_{c(1)} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \in SL_{n+1}(R).$$

Zdefiniujmy sieci $\tau = (\tau_{ij})$ i $\tau' = (\tau'_{ij})$ wymiaru $n+1$:

$$\tau_{ij} = \sigma_{ij}, \quad \tau'_{ij} = \sigma'_{ij} \quad \text{dla wszystkich} \quad 1 \leq i, j \leq m+1.$$

Naszą tezę możemy zapisać wtedy następująco:

$$h^{-1}\Gamma(\tau)h \subseteq \Gamma(\tau') \quad \Rightarrow \quad h \in \Gamma(\tau'), \quad \Gamma(\tau) \subseteq \Gamma(\tau').$$

Jak wykazaliśmy w Lemacie 4.2.2 macierz h może być przedstawiona w postaci iloczynu $uvdw$, gdzie u , w są górnortrojkątne, a d diagonalna, zatem u , w , d należą do $\Gamma(\tau')$. Aby wykazać, że $v \in \Gamma(\tau')$ postępujemy podobnie jak przy poprzednim dowodzie. Ponownie przedstawiamy v w postaci iloczynu

$$v = \prod_{k=2}^n v_k, \quad \text{gdzie} \quad v_k = \prod_{i=1}^{k-1} t_{ki}(v_{ki}).$$

Z paraboliczności $\Gamma(\tau)$ oraz $\Gamma(\tau')$ mamy $d_{n+1,n}(\theta) \in \Gamma(\tau), \Gamma(\tau')$. Stąd i z założenia (4.8) otrzymujemy, że

$$\hat{v} = [d_{n+1,n}(\theta), v^{-1}] \in \Gamma(\tau').$$

Z analogicznego argumentu wynika, że

$$[d_{j,n+1}(\theta), \hat{v}^{-1}] = t_{nj}((\theta-1)v_{nj}(\theta-1)) \in \Gamma(\tau'),$$

co po wykorzystaniu tożsamości (4.5), (4.6) prowadzi nas do $t_{nj}(v_{nj}) \in \Gamma(\tau')$, co oznacza, że $v_{nj} \in \sigma'_{nj}$. Ponadto z $t_{nj}(v_{nj}) \in \Gamma(\tau')$ wynika, że $v_n = \prod_{j=1}^{n-1} t_{nj}(v_{nj}) \in H$. Niech y_k oznacza macierz $\prod_{i=1}^k v_i$. Mamy oczywiście $v = y_{n-1} \cdot v_n$, a więc

$$v_n^{-1} y_{n-1}^{-1} \Gamma(\tau) y_{n-1} v_n \subseteq \Gamma(\tau').$$

Ponieważ przed chwilą wykazaliśmy, że $v_m \in \Gamma(\tau')$, mamy

$$y_{n-1}^{-1} \Gamma(\tau) y_{n-1} \subseteq \Gamma(\tau').$$

Żałóżmy, że udowodniliśmy, że dla wszystkich k takich, że $i < k \leq m$ mamy $v_k \in \Gamma(\tau')$. Wtedy $y_i^{-1} \Gamma(\tau) y_i \subseteq \Gamma(\tau')$. Podobnie jak w pierwszym kroku indukcyjnym otrzymujemy

$$[d_{j,m+1}(\theta), [d_{m+1,i}(\theta), y_i^{-1}]^{-1}] = t_{ij}((\theta-1)v_{ij}(\theta-1)) \in \Gamma(\tau') \quad \text{dla} \quad 1 \leq j < i,$$

a następnie, że $t_{ij}(v_{ij}) \in \Gamma(\tau')$. Zatem ostatecznie $v_{ij} \in \tau'_{ij}$ dla wszystkich $i, j, j < i$. Z faktu, że $v \in \Gamma(\tau')$ wynika naturalnie, że $\Gamma(\tau) \subseteq \Gamma(\tau')$.

2. Załóżmy, że dwie podgrupy paraboliczne P_1, P_2 grupy $SL_{VK}(R)$ są sprężone, to znaczy $g^{-1}P_1g = P_2$ dla pewnego $g \in SL_{VK}(R)$. Wtedy $g^{-1}P_1g \subseteq P_2$ oraz $gP_2g^{-1} \subseteq P_1$, a więc na mocy punktu 1. $P_1 \subseteq P_2$ oraz $P_2 \subseteq P_1$, czyli $P_1 = P_2$.

3. Załóżmy, że g należy do normalizatora pewnej podgrupy parabolicznej P . Oznacza to, że $g^{-1}Pg \subseteq P$. Korzystając ponownie z punktu 1. otrzymujemy, że $g \in P$. Zatem normalizator podgrupy parabolicznej jest równy tej podgrupie. $\square$

4.2.3 Uwagi końcowe

Ponieważ w tym rozdziale zajmujemy się specjalną grupą Vershika-Kerova, udowodnimy tu jeszcze jedną jej własność. Nie jest ona co prawda związana z podgrupami parabolicznymi, ale również warta wspomnienia.

W tym podrozdziale będziemy rozpatrywać macierze nad ciałem K , nie zaś nad dowolnym pierścieniem z 1.

Dla grup macierzowych znane są różne rozkłady, tzn. przedstawienia elementów w postaci skończonych iloczynów elementów z poszczególnych podgrup. Wcześniej zetknęliśmy się już z rozkładem Gaussa. Teraz zaprezentujemy rozkład, w którym macierze górnorójkątne odgrywają szczególnie ważną rolę.

Niech $Sym(n)$ oznacza grupę, która powstaje przez naturalne zanurzenie grupy permutacji zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ w $GL_n(K)$, natomiast $TS_n(K)$ - grupę wszystkich macierzy górnorójkątnych nad K wymiaru n , takich, że iloczyn ich elementów stojących na głównej przekątnej jest równy 1. Znane jest twierdzenie

Twierdzenie 4.2.3 (rozkład Bruhata dla $SL_n(K)$). *Dla dowolnego ciała K oraz dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$, każdą macierz $g \in SL_n(K)$ można przedstawić w postaci iloczynu $g = u\pi v$, gdzie $u, v \in TS_n(K)$ i $\pi \in Sym(n)$.*

Dowód: Dowód jest wnioskiem z wyników zaprezentowanych w [2] (chap.2), [42] (chap.8), [49]. $\square$

Oznaczmy teraz przez $Sym(\mathbb{N})$ obraz naturalnego zanurzenia w $GL_{Cf}(K)$ grupy permutacji $\mathbb{N}$ takich, że nośnik każdej permutacji jest skończony. Możemy udowodnić, że prawdziwe jest

Twierdzenie 4.2.4 (rozkład Bruhata dla $SL_{VK}(R)$). *Dla dowolnego ciała K , każdą macierz $g \in SL_{VK}(K)$ możemy przedstawić w postaci iloczynu $g = u\pi v$, gdzie $u, v \in TS_\infty(K)$ i $\pi \in Sym(\mathbb{N})$.*

Dowód: Z Twierdzenia 4.2.3 wiemy, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ spełniona jest równość

$$SL_n(K) \subset TS_n(K) \cdot Sym(n) \cdot TS_n(K).$$

Ponieważ każdą macierz

$$g = \left[\begin{array}{c|c} g_1 & g_2 \\ \hline 0 & g_3 \end{array} \right] \in SL_{VK}(n, R), \quad \text{gdzie } g_1 \in SL_n(K), g_3 \in UT_\infty(K)$$

można przedstawić jako iloczyn

$$g = \left[\begin{array}{c|c} e_n & g_2 \\ \hline 0 & g_3 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} g_1 & 0 \\ \hline 0 & e_\infty \end{array} \right],$$

w którym pierwsza z macierzy jest górna unitrójkatna, otrzymujemy stąd

$$\mathrm{SL}_{VK}(n, R) \subset \mathrm{TS}_\infty(K) \cdot \mathrm{Sym}(n) \cdot \mathrm{TS}_\infty(K).$$

Z definicji mamy $\mathrm{SL}_{VK}(K) = \cup_{n=1}^\infty \mathrm{SL}_{VK}(n, K)$ oraz $\mathrm{Sym}(\mathbb{N}) = \cup_{n=1}^\infty \mathrm{Sym}(n)$, a stąd wynika już teza naszego twierdzenia. $\square$

DODATEK

A

PIERŚCIENIE

A.1 Pierścienie proste i półproste

Pierścień R nazywamy prostym, jeśli nie ma on nietrywialnych, niewłaściwych ideałów. W szczególności

- jeśli I jest ideałem maksymalnym pierścienia R , to pierścień ilorazowy R/I jest prosty;
- dla dowolnego pierścienia z dzieleniem D i dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$ pierścień $M_n(R)$ jest prosty.

Ponadto, jeśli R jest prosty, to $M_n(R)$ również jest prosty.

Definicja pierścienia półprostego jest nieco bardziej skomplikowana. Prawdziwe jest następujące

Twierdzenie A.1.1 ([32], chap.1). *Dla dowolnego pierścienia R poniższe warunki są równoważne.*

1. *Wszystkie ciągi dokładne lewostronnych R - modułów rozszczepiają się.*
2. *Wszystkie lewostronne R - moduły są półproste.*
3. *Wszystkie skończenie generowane lewostronne R - moduły są półproste.*
4. *Wszystkie cykliczne lewostronne R - moduły są półproste.*
5. *Lewostronny regularny R - moduł jest półprosty.*

Pierścień spełniający jeden (a więc i wszystkie) z warunków 1-5 nazywamy lewostronnie półprostym. Analogicznie definiuje się pierścień prawostronnie półprosty. Okazuje się, że R jest lewostronnie półprosty wtedy i tylko wtedy, gdy jest prawostronnie półprosty. Stąd, pierścienie takie często nazywa się krótko półprostymi.

Ponadto, jeśli R jest półprosty, to $M_n(R)$ również jest półprosty dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

Pierścienie półproste zostały scharakteryzowane w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie A.1.2 (J.H.M. Wedderburn, E. Artin; [32], chap.1). *Jeśli R jest pierścieniem lewostronnie półprostym, to*

$$R \cong M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_r}(D_r)$$

dla pewnych $n_1, n_2, \dots, n_r \in \mathbb{N}$ oraz pierścieni z dzieleniem $D_1, D_2, \dots, D_r$. Ponadto liczby $r, n_1, \dots, n_r$ oraz $D_1, \dots, D_r$ są wyznaczone jednoznacznie z dokładnością do permutacji indeksów.

A.2 Pierścień lokalne i półlokalne

Oznaczmy przez $\text{rad}R$ przecięcie wszystkich maksymalnych ideałów lewostronnych R . Zbiór ten pokrywa się z przecięciem wszystkich maksymalnych ideałów prawostronnych R i jest ideałem R , który nazywamy radykałem Jacobsona pierścienia R .

Jeśli $R/\text{rad}R$ jest pierścieniem z dzieleniem, to R nazywamy pierścieniem lokalnym. Pierścień lokalny można również zdefiniować za pomocą dowolnego z warunków podanych w twierdzeniu.

Twierdzenie A.2.1. *Dla dowolnego pierścienia R poniższe warunki są równoważne.*

1. *Pierścień ilorazowy $R/\text{rad}R$ jest pierścieniem z dzieleniem.*
2. *R ma dokładnie jeden ideał maksymalny lewostronny.*
3. *R ma dokładnie jeden ideał maksymalny prawostronny.*
4. *$R \setminus R^*$ jest ideałem R .*

Pierścieniami lokalnymi są między innymi

- wszystkie pierścienie z dzieleniem;
- pierścienie macierzy górnotrójkątnych nad pierścieniem z dzieleniem, takich, że wszystkie elementy na głównej przekątnej są sobie równe.

Ponadto, jeśli R jest pierścieniem lokalnym, to $R[[x]]$ - pierścień szeregów formalnych nad R również jest pierścieniem lokalnym.

Pierścień R nazywamy półlokalnym, jeżeli pierścień ilorazowy $R/\text{rad}R$ jest pierścieniem półprostym, co jest równoważne stwierdzeniu, że $R/\text{rad}R$ jest pierścieniem lewostronnie artinowskim.

W szczególności, pierścień przemienny jest półlokalny wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera jedynie skończoną liczbę ideałów maksymalnych.

Przykładami pierścieni półlokalnych są

- skończone produkty proste pierścieni lokalnych
- pierścienie lewostronnie artinowskie, w tym
 - pierścienie skończone,
 - skończenie wymiarowe algebry nad dowolnym ciałem.

Ponadto, jeśli R jest pierścieniem półlokalnym, to $M_n(R)$ również jest półlokalny.

A.3 Stabilna ranga pierścienia

Niech R będzie pierścieniem z 1. Element $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ pierścienia R^n nazywamy R - unimodularnym, jeśli istnieje $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in R^n$ taki, że $\sum_{i=1}^n a_i b_i = 1$.

Niech $n \geq 1$. Jeśli z tego, że element $(b_1, b_2, \dots, b_{n+1}) \in R^{n+1}$ jest unimodularny wynika, że dla pewnych $r_1, r_2, \dots, r_n \in R$ element $(b_1 + r_1 b_{n+1}, b_2 + r_2 b_{n+1}, \dots, b_n + r_n b_{n+1}) \in R^n$ również jest unimodularny, to najmniejszą liczbę n o tej własności nazywamy stabilną rangą pierścienia R i piszemy $sr(R) = n$. Jeśli taka liczba n nie istnieje, to mówimy, że R ma stabilną rangę równą ∞ .

Szczególnym przypadkiem pierścieni stabilnej rangi są pierścienie stabilnej rangi 1 (nazywane czasem B - pierścieniami). Bezpośrednio z definicji widać, że są to pierścienie, dla których zachodzi następujący warunek: Jeśli dla $b_1, b_2 \in R$ istnieją $r_1, r_2 \in R$ takie, że $r_1 b_1 + r_2 b_2 = 1$, to dla pewnego $r \in R$ element $b_1 + r b_2$ jest odwracalny w R . Przykładami takich pierścieni są

- pierścienie półlokalne;
- pierścienie unit-regular, tzn. takie, w których dla dowolnego x istnieje taki element odwracalny u taki, że $xux = x$;
- pierścienie silnie π - regularne, tzn. łączne pierścienie z 1, w których dla każdego x istnieją liczba naturalna n oraz element y taki, że $x^n = x^{n+1}y$; w szczególności takimi pierścieniami są pierścienie lokalnie skończone.

BIBLIOGRAFIA

- [1] S.V. Aleshin, A free group of finite automata (po ros.), *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.* 4 (1983), 12–14.
- [2] J.L. Alperin, R.B. Bell, *Groups and Representations*, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [3] F. Ayres, The expression of non-singular row-finite matrices in terms of strings, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* 7 (1964), 91–96.
- [4] F. Ayres, The structure of non-singular row-finite matrices, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* 7 (1964), 83–88.
- [5] H. Bass, K -theory and stable algebra, *Publ. Math.* 22 (1964), 5–60.
- [6] M. Bernkopf, A history of infinite matrices. A study of denumerably infinite linear systems as the first step in the history of operators defined on function spaces, *Arch. History Exact Sci.* 4 (1968), no. 4, 308—358.
- [7] A. Bier, Verbal subgroups in the group of triangular matrices over field of characteristic 0, *J. Algebra* 321 (2009), no. 2, 483—494.
- [8] Z.I. Borevich, Description of the subgroups of the general linear group that contain the group of diagonal matrices (po ros.), *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov.* 64 (1976) 12–29.
- [9] Z.I. Borevich, Parabolic subgroups in linear groups over a semilocal ring (po ros.), *Vestnik Leningr. Univ. Mat. Meh. Astr.* 13 (1976) 16–24.
- [10] Z.I. Borevich, N.A. Vavilov, Definition of the net subgroup. Modules and algebraic groups, 2 (po ros.), *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)* 132 (1983), 26—33.

- [11] H. Chen, *Rings related to stable range conditions*, Series in Algebra, vol. 11, World Scientific, Publishing Co. Pte. Ltd., New Jersey, 2011.
- [12] J.S. Clowes, K.A. Hirsch, Simple groups of infinite matrices, *Math. Z.* 58 (1953), 1–3.
- [13] R.O. Davies, M.P. Drazin, M.L. Roberts, Universal properties of infinite matrices, *J. Algebra* 180 (1996), no. 2, 402–411.
- [14] R.K. Dennis, L.N. Vaserstein, On a question of M. Newman on the number of commutators, *J. Algebra* 118 (1988), no. 1, 150–161.
- [15] R.K. Dennis, L.N. Vaserstein, Commutators in linear groups, *K -Theory* 2 (1989), no. 6, 761–767.
- [16] A.J. Hahn, O.T. O'Meara, *The classical groups and K - theory*, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1989.
- [17] P. de la Harpe, Sur le simplicité essentielle du groupe des inversibles et du groupe unitaire dans une C^* -algèbre simple, *Funct. Annal.* 62 (1985), no. 3, 354 – 378.
- [18] F. Hausdorff, Bemerkung über den Inhalt von Punktmengen, *Math. Ann.* 75 (1914), 428 – 433.
- [19] W. Hołubowski, Parabolic subgroups of Vershik–Kerov's group, *Proc. Amer. Math. Soc.* 130 (2002), 2579–2582.
- [20] W. Hołubowski, Free subgroups of infinite unitriangular matrices, *Intern. J. of Algebra and Computation* 13 (2003), 81–86.
- [21] W. Hołubowski, The ubiquity of free subsemigroups of infinite triangular matrices, *Semigroup Forum* 66 (2003), 231–235.
- [22] W. Hołubowski, Subgroups of unitriangular groups of infinite matrices, *Zap. Nauch. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)* 338 (2006), 137–154.
- [23] W. Hołubowski, *Algebraiczne własności grup macierzy nieskończonych* (po ros.), rozprawa habilitacyjna, Sankt-Petersburg, Petersburski Uniwersytet Państwowy, 2008.
- [24] W. Hołubowski, R. Słowik, Parabolic subgroups of groups of column-finite infinite matrices, *Linear Algebra Appl.* 437 (2012), 519–524.
- [25] J.E. Humphreys, *Linear algebraic groups*, Graduate Texts in Mathematics, No. 21, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975.
- [26] T.W. Hungerford, *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics 73, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980.
- [27] M.I. Kargapołow, J.I. Mierzlakow, *Podstawy teorii grup*, PWN, Warszawa, 1989.

- [28] S.V. Kerov, A.M. Vershik, On an infinite-dimensional group over a finite field (po ros.), *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* 32 (1998), no. 3, 3–10; tłumaczenie angielskie w *Funct. Anal. Appl.* 32 (1998), no. 3, 147–152 (1999).
- [29] S.V. Kerov, *Asymptotic representation theory of the symmetric group and its applications in analysis*, Translations of Mathematical Monographs, 219. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [30] S.V. Kerov, A.M. Vershik, Four drafts on the representation theory of the group of infinite matrices over a finite field (po ros.), *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)* 344 (2007), Teor. Predst. Din. Sist. Komb. Metody. 15, 5–36; tłumaczenie angielskie w *J. Math. Sci. (N. Y.)* 147 (2007), no. 6, 7129–7144.
- [31] E.N. Konyshcheva, Two-generated subgroups of unitriangular matrices, Abstracts, Students mathematical conference, Novosibirsk, 2009.
- [32] T.Y. Lam, *A first course in noncommutative rigs*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [33] J. Mycielski, S. Świerczkowski, On free groups of motions and decompositions of the Euclidean space, *Fund. Math.* 45 (1958), 283–291.
- [34] K.R. Nagaraajan, P.M. Devasahayam, T. Soundararajan, Products of three triangular matrices over commutative rings, *Linear Algebra Appl.* 348 (2002), 1–6.
- [35] A.S. Oliinyk, V.I. Sushchanskii, A free group of infinite unitriangular matrices (po ros.), *Mat. Zametki* 67 (2000), 320–324.
- [36] D.J.S. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [37] I.N. Sanov, A property of a representation of a free group (po ros.), *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S)* 57 (1947), 657–659.
- [38] P.N. Shivakumar, K.C. Sivakumar, A review of infinite matrices and their applications, *Linear Algebra Appl.* 430 (2009), no. 4, 976–998.
- [39] R. Słowik, The lower central series of subgroups of the Vershik-Kerov group, *Linear Algebra Appl.* 436 (2012), 2299–2310.
- [40] R. Słowik, Some free and non-free subgroups of $UT_{\infty}(\mathbb{Z})$, przyjęto do *Comm. Algebra*, DOI: 10.1080/00927872.2011.633139.
- [41] Yu.V. Sosnovsky, On the width of verbal subgroups of the group of triangular matrices over a field of arbitrary characteristic, Jan 2012, arXiv:1201.6513v1.
- [42] R. Steinberg, *Lectures on Chevalley Groups*, Yale University Press, New Haven, 1968.
- [43] S. Świerczkowski, On a free group of rotations of the Euclidean space, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 61 = Indag. Math.* 20 (1958), 376–378.

- [44] O.M. Tabachnikova, Infinite systems of linear equations and mathematical logic, Special issue on structured and infinite systems of linear equations, *Linear Algebra Appl.* 343/344 (2002), 473–475.
- [45] R.C. Thompson, Commutators in the special and general linear groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* 101 (1961), no. 1, 16–33.
- [46] L.N. Vaserstein, Stable rank of rings and dimensionality of topological spaces, *Funct. Anal. Appl.* 5 (1971), no. 2, 102–110.
- [47] L.N. Vaserstein, E. Wheland, Commutators and companion matrices over rings of stable rank 1, *Linear Algebra Appl.* 142 (1990), 263–277.
- [48] N.A. Vavilov, Parabolic subgroups of the Chevalley group over a commutative ring (po ros.), *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov* 116 (1982), 20–43.
- [49] N.A. Vavilov, Bruhat decomposition for subgroups containing the group of diagonal matrices (po ros.), *Zap. Nauchn. Sem. Leningr. Otd. Mat. Inst. Steklova* 114 (1982), 50–61.
- [50] P. Vermes, Multiplicative groups of row- and column-finite infinite matrices, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* 5 (1962), 15–23.
- [51] P. Vermes, Non-associative rings of infinite matrices, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 55 = Indagationes Math.* 14 (1952), 245–252.
- [52] P. Vermes, The group of both row- and column-finite infinite matrices, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* 7 (1964), 89–90.
- [53] M. Vorobets, Y. Vorobets, On a free group of transformations defined by an automaton, *Geom. Dedicata* 124 (2007), 237–249.

SKOROWIDZ

- ciąg
 - dolny centralny, 12
 - komutantów, 12
- generator, 6
- grupa
 - nilpotentna, 12, 29
 - rozwiązalna, 12
 - wolna, 26, 28
- komutant, 11
- komutator, 11
- macierz
 - blokowo-diagonalna, 9
 - blokowo-diagonalna, 21, 32, 33
 - wstęgowa, 30
- macierz trójkątna, 2
 - nieskończona, 5
- macierz unitrójkątna, 2
 - nieskończona, 5
- pierścień
 - lokalny, 66
 - półlokalny, 53, 55, 66
 - półprosty, 66
 - prosty, 65
 - stabilnej rangi 1, 12, 13, 17, 18, 20, 23–25, 57, 58, 61, 67
- podgrupa
 - generowana przez zbiór, 6
 - paraboliczna, 58
 - grupy Vershika-Kerova, 51
 - pełnej grupy liniowej, 51
 - specjalnej grupy Vershika-Kerova, 56
 - sicciowa, 53
 - T -sicciowa, 53
 - sprzężona, 55, 61
- podmacierz macierzy blokowo-diagonalnej, 21
- przesunięcie, 33
- rozkład
 - Bruhata, 63
 - Gaussa, 57
- sicć, 52
 - T -sicć, 52
 - maksymalna, 54
 - maksymalna, 54
- specjalna grupa Vershika-Kerova, 55
- stabilna grupa liniowa, 4
 - specjalna, 4
 - trójkątna, 4
 - unitrójkątna, 4
- stabilna ranga pierścienia, 67
- szerokość komutanta, 12
- transwekcja, 8
- typ macierzy blokowo-diagonalnej, 21

