SPRAWOZDANIA
WROCŁAWSKIEGO TOWARZYSTWA NAUKOWEGO
4, 1949 — DODATEK 5

HUGO STEINHAUS

O długości krzywych empirycznych i jej pomiarze, zwłaszcza w geografii.

Pojęcie długości, określone ściśle przez C. Jordana z końcem XIX wieku, nie może być stosowane bez komentarzy w naukach empirycznych. Różni się ono zasadniczo od takich pojęć jak pole, masa lub moment bezwładności. Tak np. pole obszaru Polski można zmierzyć za pomocą kratki 0,5 cm × 0,5 cm na mapie 1 : 1 000 000 z dokładnością do $^1/_2\%$. Dwie pierwsze otrzymane cyfry nie ulegną zmianie, gdy przejdziemy do mapy 1 : 200 000; ta mapa ustali już trzecią cyfrę. Dalsze posuwanie się ku dokładności zależy tylko od podziałki map i od precyzji instrumentu mierniczego, jakim jest kratka lub planimetr. Ten właśnie fakt wyraża idealizacja matematyczna, gdy mówi o ciągu $p_1, p_2, \ldots$ kolejnych pomiarów, że jest zbieżny do liczby granicznej p, która daje „prawdziwe" pole. Trudności związane z takim ujęciem, które występują przy każdym pomiarze realnym, akceptujemy, pocieszając się tym, że możemy zwiększać dowolnie dokładność przez ulepszanie instrumentów mierniczych i przez powtarzanie pomiarów.

Inaczej jest z długością. Prócz trudności wspomnianych przed chwilą, które nas tutaj nie interesują jako wspólne wszelkim pomiarom, pomiar długości natrafia na trudności specyficzne. Granica polsko-czeska zmierzona na mapie 1 : 5 000 000 ma długość mniejszą niż 1 000 km, ale na mapie 1 : 250 000 jej długość przekracza 1 250 km. Przyrost wynosi około 30%. Nie należy myśleć, że ustaliliśmy już pierwszą cyfrę, 1, tej wielkości: nie można ręczyć za to, czy pomiar na mapie 1 : 25 000 nie da więcej niż 2 000 km. Brzeg ostrza brzytewki ma 36 mm. Mikrofotografia pokaże nam, że brzeg ten nie jest prosty, lecz ma załamania, które zwiększają jego długość co najmniej podwójnie. Mikroskop elektronowy może zwielokrotnić i ten nowy wynik.

Matematycznie to zjawisko tłumaczy się tym, że długość nie jest funkcjonałem ciągłym. Nieciągłość jest tu szczególnie mocna: długość jest funkcjonałem *pantachicznie nieograniczonym.* Pole jest funkcjonałem ciągłym: dwa kontury bliskie siebie zamykają pola mało się różniące, ale długości tych konturów mogą się różnić bardzo znacznie. Możemy np. w sąsiedztwie linii kolejowej Wrocław—Warszawa i nie dalej od niej jak o 1 km poprowadzić ścieżkę o długości 10 000 km.

Ta własność pojęcia długości prowadzi do pewnej reguły negatywnej: w naukach przyrodniczych należy unikać pomiarów długości linii krzywych. Wyjątek stanowią linie określone teoretycznie: jeżeli granica między dwoma krajami jest zdefiniowana jako odcinek południka i dane są szerokości geograficzne punktów końcowych, to długość oblicza się bez pomiaru na mapie lub w terenie. Także inne linie, określone wzorami matematycznymi, wolne są od paradoksu długości.

Opierając się na pewnym twierdzeniu Cauchy'ego o krzywych wypukłych, uogólnionym później przez Croftona[1]) dla zagadnień z prawdopodobieństw geometrycznych, można dać następującą definicję długości łuku AB:

Ustalmy na płaszczyźnie punkt O i kierunek OX; każdą prostą p na tej płaszczyźnie można określić przez jej odległość $r = OR$ od O i przez kąt $\vartheta = XOR$. Na innej płaszczyźnie wprowadźmy osie kartezjańskie i przypiszmy jako obraz każdej prostej p starej płaszczyzny punkt P nowej płaszczyzny o współrzędnych $\vartheta, 2r$:

$$P = P(\vartheta, 2r).$$

Jako długość łuku AB określmy miarę płaską (Lebesgue'a) zbioru Z wszystkich punktów P, które są obrazami prostych p przecinających AB; przy tym każdy punkt P należy liczyć tyle razy, ile razy jego prototyp p przecina łuk AB.

Równoważność tej nowej definicji z definicją Jordana, gdy ostatnia się stosuje, wynika z badań cytowanych autorów. Prowadzi ona do następującego praktycznego pomiaru długości:

Na płytce celuloidowej nakreślone są proste równoległe o jednakowych odstępach d od siebie. Kładzie się ją na rysunku łuku AB i liczy punkty przecięcia tych prostych z AB; otrzymuje się h_1

[1]) W. Crofton, *On the Theory of Local Probability...*, Philosophical Transactions of the Royal Society 158 (1868).

punktów przecięcia; po tym obraca się płytkę o $1/k$ kąta półpełnego i liczy ponownie; wynik jest h_2; po k takich czynnościach otrzymuje się liczbę łączną $N = \sum_{j=1}^{k} h_j$; długość L łuku AB jest w przybliżeniu dana wzorem

$$L = \pi N d / 2k. \tag{1}$$

W przypadku łuków mających długość można precyzję tego pomiaru zwiększać dowolnie, zwiększając k i zmniejszając d.

Jest jasne wobec równoważności nowej definicji z klasyczną, że nowa też nie może uwolnić nas od paradoksu długości. Pozwala ona jednak wykryć jego źródło: jest nim obecność prostych, które mają dowolnie wiele przecięć z mierzonym łukiem AB. Wobec tego można tak zmodyfikować definicję, żeby paradoks znikł. Wystarczy umówić się, że będziemy na każdej prostej liczyć co najwyżej 1 punkt przecięcia, albo co najwyżej 2, a nie wszystkie, jak kazała reguła pierwotna. Tak określimy nowe pojęcia długości L_1 i L_2. Pojęcie L_1 daje w przypadku odcinka prostej jego prawdziwą, matematyczną długość, w przypadku łuku wypukłego — średnią arytmetyczną długości łuku i cięciwy, w przypadku owalu zamkniętego — połowę jego prawdziwej długości. L_2 daje już w tych wszystkich trzech przypadkach prawdziwą długość, a w przypadku dowolnego konturu zamkniętego — długość najkrótszej linii opiętej na tym konturze.

Ograniczając liczbę liczonych przecięć do liczby n, otrzymamy długość n-tego rzędu, L_n. Gdy łuk AB jest dany rysunkiem, metoda praktyczna, prowadząca do wzoru (1), pozwoli wyznaczyć jego długość $L_n(AB)$ z dowolną dokładnością; z góry można przewidzieć, że pomiar nie da nigdy rezultatu przewyższającego $Dn/2$, gdzie D jest długością najkrótszej linii zamkniętej, opiętej na AB.

Rząd n jest konwencją; musimy przy pomiarze każdej długości, która nas interesuje, podawać ów rząd. Jest to konwencja absolutna. tzn. nie związana ani ze skalą mapy, ani z jednostkami długości, ani z charakterystyką d płytki celuloidowej, służącej do praktycznego pomiaru. Matematycy znają przykłady łuków o długości nieskończonej, położonych w obszarze ograniczonym; L_n przypisuje i tym łukom długość skończoną; ta długość rośnie do nieskończoności wraz z n. Konwencja ustalonego n czyni z długości określoną wielkość, podobną do pola, masy lub momentu bezwładności; trudności połączone z pomiarem tych wielkości występują także przy pomiarze L_n, ale znikają specyficzne trudności, wspomniane na wstępie: L_n jest mianowicie funkcjonałem *ograniczonym.*

Żeby zdać sobie sprawę z tego, co mierzymy, gdy obliczamy L_n, zauważmy, że L_n daje długość prawdziwą, gdy łuk mierzony ma co najwyżej n przecięć z każdą prostą. Na mapie administracyjnej ZSRR 1:30 000 000[2]) granica chińsko-sowiecka ma co najwyżej 10 przecięć z każdą prostą; chcąc pomierzyć długość tej granicy na podstawie tej mapy szkolnej, należy użyć L_{10}: jest jasne, że długość rzędu 11-ego, 12-ego itd. będzie równa L_{10}. Mówiąc językiem geografów, mapa jest zgeneralizowana tak, że dostępna jest tylko badaniu za pomocą $L_1, L_2, ..., L_{10}$.

Przypuśćmy, że mamy inną, bardzo dokładną mapę, na której znajdujemy szczegółowy obraz morskiego wybrzeża Chin. Chcemy porównać długość tego wybrzeża z długością granicy chińsko-sowieckiej, której nie ma na drugiej mapie. Musimy wziąć obie mapy, jednak w obu wypadkach użyć długości L_{10}, tj. najwyższego rzędu, któremu dostępna jest generalizacja obu map. Ten przykład tłumaczy praktyczną wagę nowej koncepcji.

Chcąc określić stopień generalizacji linii krzywej na mapie, natrafiamy na poważne trudności, gdyż pojęcie generalizacji nie jest w geografii sprecyzowane. Do naszych celów nie jest jednak konieczne zapełnienie tej luki. Wystarczy nam następująca umowa: uważamy, że linie na mapie uzyskuje się przez zaznaczanie na niej punktów i łączenie ich odcinkami prostymi; dokładności położeń punktów nie kwestionujemy. Gdy między punkty już zaznaczone wstawiamy nowe na podstawie zdjęć geodezyjnych, a stare zostawiamy, liczba boków wzrasta i wzrasta stopień generalizacji. Możemy więc mówić o generalizacjach $G_1, G_2, ..., G_m, ...$ nie precyzując znaczenia tych symboli, żądając jednak, żeby mapy oznaczone większym wskaźnikiem powstawały z map oznaczonych mniejszym przez dodanie punktów.

Gdy ustalimy n i będziemy przechodzili do coraz wyższych G_m, otrzymamy ciąg

(2) $$L_n^1,\ L_n^2,\ ...,\ L_n^m,\ ...;$$

górny wskaźnik odpowiada numerowi generalizacji. Ciąg liczb uzyskany przez kolejne stosowanie operacyj (2) do objektu rzeczywistego, takiego np. jak lewy brzeg Wisły, jest niemalejący. Jest on ograniczony z góry, jak już stwierdziliśmy przedtem,

---

[2]) „Glob", Kraków 1946.

gdyż każdy obraz mieści się w ramach mapy. Wobec tego ciąg ten ma granicę:

$$\lim_{m\to\infty} L_n^m(AB) = L_n(AB).$$

Możemy więc mówić o długości rzędu n rzeczywistego przedmiotu: jest nią ów *limes* przed chwilą określony. Dla teoretycznej zupełności zauważmy, że gdy ciąg łuków $\{A_m B_m\}$ dąży do AB, zawsze istnieje $\liminf\limits_{m\to\infty} L_n(A_m B_m)$. To uwalnia nas od trudności, które by mogły powstać przy innych generalizacjach niż $\{G_m\}$.

To, że musimy mieć cały ciąg pomiarów, jest trudnością typu ogólnego, wspólną wszelkim pomiarom empirycznym. Ale paradoks długości znikł: można mówić o długości $L_n(AB)$ i można ją praktycznie mierzyć, np. sposobem prostych równoległych. W praktyce okaże się, że przy ustaleniu n wzrost m, czyli co raz subtelniejsza generalizacja, po pewnej liczbie kroków przestanie wpływać na wynik w sposób istotny; umożliwia to stosowanie metody; tak będzie w przykładach geograficznych, chociaż generalizacja map nie trzyma się naszego postulatu co do dodawania punktów; wystarczy, że nie odbiega od niego zanadto.

Możemy teraz utworzyć schemat $\|L_n^m\|$, biorąc n za numer kolumny, a m za numer wiersza. Posuwanie się poziome, wzdłuż m-tego wiersza, daje rezultaty pomiarów na tej samej mapie; od pewnego miejsca już wyniki się nie zmieniają (przykład granicy chińsko-sowieckiej) i otrzymujemy długość objektu taką, jaka wynika z jego obrazu na mapie. Posuwanie się pionowe, wzdłuż n-tej kolumny, daje ciąg (2); od pewnego miejsca wyniki zmieniają się mało i otrzymujemy z dowolną dokładnością długość rzędu n prawdziwego objektu — trzeba do tego nieskończenie wielu map tylko w teorii, gdyż w praktyce mapy o wysokiej generalizacji już nic nowego nie mówią o wielkości L_n. Tak np. znacznie dokładniejsze mapy granicy chińsko-sowieckiej niż 1:30 000 000 niewiele zmienią pomiar L_{10} wykonany na tej mapie. Postępowanie tradycyjne polega na posuwaniu się w schemacie ukośnie, tj. na równoczesnej zmianie n i m. Wtedy występuje paradoks: można uzyskać wartości dowolnie duże i brak jest kryteriów, które wskazywałyby, kiedy należy się zatrzymać.

Funkcjonał L_n nie jest ciągły. Nie jest on też addytywny: obliczony z osobna dla dwu części łuku AB, da inną sumę niż obliczony dla AB. Gdy jednak AB ma co najwyżej k punktów przecięcia z każdą prostą, funkcjonał L_k jest addytywny.

Powyższe koncepcje pozwalają mierzyć długość relatywną w niektórych przypadkach, kiedy długość skończona w ogóle nie istnieje. Tak np. nie można przypisać skończonej długości lewemu ani prawemu brzegowi Wisły, ale można je z sobą porównać. Gdy AB oznacza lewy, a CD prawy brzeg, granica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_n(AB)}{L_n(CD)}$$

daje stosunek długości brzegów. Ułamek $L_n(AB)/L_n(CD)$ już po kilku krokach przestanie się zmieniać istotnie; trudność z tym związana jest znowu obojętna; ważne jest, że określiliśmy jednoznacznie wielkość, którą chcemy mierzyć. Tak więc stosunek długości dwu przedmiotów może się okazać pojęciem wolnym od paradoksu pojęcia długości, choćby każda z osobna mu podlegała.

W wielu kwestiach geograficznych możliwe jest uniknięcie pojęcia długości. Jeżeli ktoś uważa powyższą analizę pojęcia długości za zbyt zawiłą, niech przynajmniej przyjmie ją za dowód, że pojęcie długości należy rugować z geografii wszędzie, gdzie tylko długość da się zastąpić przez inne wielkości, dostępniejsze pomiarowi. Prof. J. Czyżewski, któremu zawdzięczam zapoznanie się z niejednym problematem geografii, przedstawi — o ile mi wiadomo — Towarzystwu swoje wyniki, uzyskane przy badaniu takich (i innych) kwestyj na materiale autentycznym. Mój komunikat jest, po części, wstępem teoretycznym do owych badań.

Przy tej sposobności zauważę, że matematyczna strona rozważań o długości nie jest wcale zakończona: tak np. podana w tym komunikacie definicja długości sprowadza ją do pewnej podwójnej całki Lebesgue'a; ograniczenie rzędu do L_n zamienia funkcję podcałkową na ograniczoną; powstaje pytanie, dla jakich łuków AB tak otrzymana funkcja jest całkowalna według Riemanna. Także twierdzenie napotkane przy tym studium, że krzywa jest wyznaczona, gdy znamy jej liczbę przecięć z każdą prostą, nie jest dostatecznie zbadane. Dr M. Nosarzewska zauważyła np., że nie zawsze można obniżyć maksymalną liczbę przecięć krzywej z prostymi do przepisanej z góry liczby przez zastępowanie niektórych łuków przez cięciwy.