

METODA ELEMENTÓW BRZEGOWYCH - OPIS MODUŁU DYSKRETYZACJI BRZEGU I WNEŹRZA OBSZARU

Bohdan Mochnacki, Sebastian Freus

Instytut Matematyki i Informatyki, Politechnika Częstochowska

Streszczenie. Metoda elementów brzegowych wymaga dyskretyzacji brzegu rozpatrywanego obszaru, a w wielu zadaniach również jego wnętrza. W artykule przedstawiono opis jednego z modułów autorskiego programu komputerowego do wyznaczania ustalonych lub nieustalonych pól temperatury za pomocą tej metody. Jest to moduł wprowadzania kształtu brzegu obszaru (lub brzegów obszarów) i jego podziału na liniowe elementy brzegowe z przyporządkowaniem rodzaju warunku brzegowego. Dla zadań, gdzie jest to niezbędne, dokonywana jest dyskretyzacja wnętrza obszaru (lub obszarów) za pomocą liniowych trójkątnych elementów wewnętrznych. Działanie modułu zilustrowano przykładem dyskretyzacji brzegu i wnętrza obszaru płaskiego.

Wstęp

Metoda elementów brzegowych, obok metody różnic skończonych i metody elementów skończonych, jest coraz częściej wykorzystywana do rozwiązywania zadań brzegowych i brzegowo-początkowych, pojawiających się w przepływie ciepła, np. [1-3]. Pierwszy jej etap polega na zastąpieniu opisu matematycznego sformułowanego za pomocą równania różniczkowego (lub układu równań) uzupełnionego odpowiednimi warunkami brzegowymi lub brzegowo-początkowymi opisem matematycznym w postaci równania całkowego (lub układu równań). Takie sformułowanie jest możliwe pod warunkiem, że znane jest rozwiązanie fundamentalne (podstawowe). Na etapie realizacji numerycznej MEB dokonuje się dyskretyzacji brzegu obszaru, a w zadaniach, w których jest to niezbędne, również dyskretyzacji wnętrza tego obszaru. Należy w tym miejscu zwrócić uwagę na fakt, że pojęcie dyskretyzacji w MEB ma nieco inne znaczenie niż w metodzie różnic skończonych czy też elementów skończonych. W MEB w pierwszej kolejności dokonuje się podziału brzegu na elementy brzegowe z zachowaniem odpowiedniej orientacji, natomiast podział wnętrza na elementy wewnętrzne wiąże się tylko z koniecznością obliczenia odpowiednich całek po tych elementach, które (w przeciwieństwie do MES) nie generują dodatkowych niewiadomych. Układ równań zawiera więc niewiadome związane jedynie z brzegiem obszaru. Ta cecha MEB powoduje, że automatyczne wykorzystywanie generatorów siatek elementów skończonych nie jest korzystne, a w niektórych zadaniach wręcz niemożliwe.

Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie jednego z modułów pakietu obliczeniowego, wykorzystującego MEB do modelowania procesów przepływu ciepła w obszarach płaskich, a mianowicie pakietu wprowadzania geometrii obszaru, generacji liniowych elementów brzegowych i generacji liniowych (trójkątnych) elementów wewnętrznych.

1. Sformułowanie zadania

Rozpatrywać będziemy następujący problem brzegowo-początkowy:

$$\begin{cases} x \in \Omega : & \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a \nabla^2 T(x,t) + \frac{1}{c} Q(x,t) \\ x \in \Gamma_1 : & T(x,t) = T_b \\ x \in \Gamma_2 : & q(x,t) = -\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial n} = q_b \\ x \in \Gamma_3 : & q(x,t) = -\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial n} = \alpha [T(x,t) - T^\infty] \\ t = 0 : & T(x,t) = T_0 \end{cases} \quad (1)$$

gdzie $a = \lambda/c$ jest współczynnikiem dyfuzji (λ - współczynnik przewodzenia ciepła, c - ciepło właściwe odniesione do jednostki objętości), T, t oznaczają temperatury i czas, $Q(x,t)$ jest składnikiem źródłowym. Na brzegu $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ obszaru Ω określono warunki Dirichleta, Neumanna i Robina, przy czym T_b jest zadaną temperaturą brzegową, q_b - strumieniem ciepła, α - współczynnikiem wymiany ciepła, T^∞ - temperaturą otoczenia. W chwili $t = 0$ znany jest rozkład temperatury wewnątrz obszaru.

W pierwszej kolejności dokonujemy dyskretyzacji rozpatrywanego przedziału czasu $[t^0, t^F]$, wprowadzając siatkę

$$0 < t^0 < t^1 < \dots < t^{f-1} < t^f < \dots < t^F < \infty \quad (2)$$

ze stałym krokiem $\Delta t = t^f - t^{f-1}$. Można w tym miejscu zastosować trzy podstawowe warianty metody elementów brzegowych, a mianowicie [1, 2, 4-7]:

- I schemat MEB,
- II schemat MEB,
- MEB z dyskretyzacją czasu.

Dla ustalenia uwagi dalsze rozważania będą dotyczyć pierwszego schematu MEB. Brzegowe równanie całkowe, będące odpowiednikiem opisu matematycznego (1), jest następujące [2-5]:

$$\begin{aligned}
& B(\xi)T(\xi, t^f) + \frac{1}{c} \int_{t^{f-1}}^{t^f} \int_{\Gamma} T^*(\xi, x, t^f, t) q(x, t) d\Gamma dt = \\
& = \frac{1}{c} \int_{t^{f-1}}^{t^f} \int_{\Gamma} q^*(\xi, x, t^f, t) T(x, t) d\Gamma dt + \int_{\Omega} T^*(\xi, x, t^f, t^{f-1}) T(x, t^{f-1}) d\Omega + \quad (3) \\
& + \frac{1}{c} \int_{t^{f-1}}^{t^f} \int_{\Omega} Q(x, t) T^*(\xi, x, t^f, t) d\Omega dt
\end{aligned}$$

gdzie $B(\xi) \in (0, 1)$, przy czym wartość tego współczynnika związana jest z położeniem punktu brzegowego ξ , np. dla gładkiego fragmentu brzegu $B(\xi) = 0.5$, natomiast dla $\xi \in \Omega$: $B(\xi) = 1$. W równaniu (3) $T^*(\xi, x, t^f, t)$ jest rozwiązaniem fundamentalnym (podstawowym) [2, 5], $q^*(\xi, x, t^f, t) = -\lambda \partial T^*(\xi, x, t^f, t) / \partial n$, $q(x, t) = -\lambda \partial T(x, t) / \partial n$, przy czym $\partial(\cdot) / \partial n$ oznacza pochodną w kierunku normalnym.

Stosując tzw. stałe elementy względem czasu, czyli

$$t \in [t^{f-1}, t^f]: \begin{cases} T(x, t) = T(x, t^f) \\ q(x, t) = q(x, t^f) \end{cases} \quad (4)$$

i zakładając, że

$$t \in [t^{f-1}, t^f]: Q(x, t) = Q(x, t^{f-1}) \quad (5)$$

równanie (3) ma następującą postać:

$$\begin{aligned}
& B(\xi)T(\xi, t^f) + \int_{\Gamma} q(x, t^f) g(\xi, x) d\Gamma = \int_{\Gamma} T(x, t^f) h(\xi, x) d\Gamma + \\
& + \int_{\Omega} T^*(\xi, x, t^f, t^{f-1}) T(x, t^{f-1}) d\Omega + \int_{\Omega} Q(x, t^{f-1}) g(\xi, x) d\Omega \quad (6)
\end{aligned}$$

gdzie

$$h(\xi, x) = \frac{1}{c} \int_{t^{f-1}}^{t^f} q^*(\xi, x, t^f, t) dt \quad (7)$$

oraz

$$g(\xi, x) = \frac{1}{c} \int_{t^{f-1}}^{t^f} T^*(\xi, x, t^f, t) dt \quad (8)$$

Powyższe całki wyznacza się analitycznie, np. [1, 2, 5].

Obliczenie całek po brzegu Γ oraz obszarze Ω wiąże się z koniecznością dyskretyzacji brzegu oraz wnętrza analizowanego obszaru. Tak więc, brzeg obszaru Γ dzieli się na N elementów brzegowych $\Gamma_j, j = 1, 2, \dots, N$. Można tutaj stosować elementy stałe, liniowe lub kwadratowe. Wnętrze obszaru Ω dzieli się na L elementów wewnętrznych $\Omega_l, l = 1, \dots, L$. Podobnie jak w przypadku elementów brzegowych, można rozpatrywać elementy stałe, liniowe lub kwadratowe.

Aproksymacja równania (6) przyjmuje wówczas postać

$$B(\xi^i) T(\xi^i, t^f) + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} q(x, t^f) g(\xi^i, x) d\Gamma_j = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} T(x, t^f) h(\xi^i, x) d\Gamma_j + \\ + \sum_{l=1}^L \int_{\Omega} T^*(\xi^i, x, t^f, t^{f-1}) T(x, t^{f-1}) d\Omega_l + \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} Q(x, t^{f-1}) g(\xi^i, x) d\Omega_l \quad (9)$$

Dalszy etap algorytmu MEB polega na numerycznym wyznaczeniu całek po elementach brzegowych i wewnętrznych oraz utworzeniu układu równań związanego z węzłami brzegowymi, w którym występują (w zależności od warunków brzegowych zadanych na odpowiednich fragmentach brzegu) nieznanne temperatury i strumienie ciepła [2, 5]. Rozwiązanie tego układu oraz obliczenie wartości temperatury w węzłach wewnętrznych w chwili t^f pozwala przejść do następnego kroku obliczeń, a mianowicie przejścia $t^f \rightarrow t^{f+1}$.

Jeśli rozpatrujemy ustalony przepływ ciepła opisany następującym układem równań i warunków:

$$\begin{cases} x \in \Omega: & \lambda \nabla^2 T(x) + Q(x) = 0 \\ x \in \Gamma_1: & T(x) = T_b \\ x \in \Gamma_2: & q(x, t) = -\lambda \frac{\partial T(x)}{\partial n} = q_b \\ x \in \Gamma_3: & q(x, t) = -\lambda \frac{\partial T(x)}{\partial n} = \alpha [T(x) - T^\infty] \end{cases} \quad (10)$$

to brzegowe równanie całkowe jest następujące:

$$B(\xi) T(\xi) + \int_{\Gamma} T^*(\xi, x) q(x) d\Gamma = \int_{\Gamma} q^*(\xi, x) T(x) d\Gamma + \int_{\Omega} Q(x) T^*(\xi, x) d\Omega \quad (11)$$

Rozwiązanie tego równania również wiąże się z koniecznością dyskretyzacji brzegu obszaru, a w przypadku niezerowej funkcji źródła $Q(x)$ należy także dyskretyzować jego wnętrze.

Podsumowując, bez względu na wybór wariantu metody elementów brzegowych, na etapie obliczeń numerycznych można wyróżnić następujące kroki algorytmu:

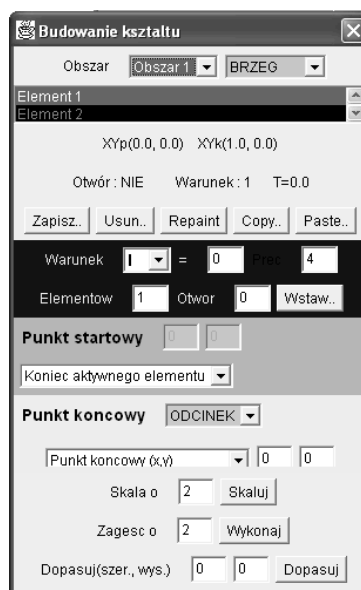
- dyskretyzacja brzegu rozpatrywanego obszaru,

- dyskretyzacja wnętrza obszaru,
- obliczenie całek związanych z brzegiem obszaru,
- obliczenie całek związanych z wnętrzem obszaru,
- utworzenie układu równań zawierającego niewiadome temperatury lub strumienie ciepła w węzłach brzegowych, sprowadzenie tego układu do postaci $\mathbf{AY} = \mathbf{F}$,
- rozwiązanie układu równań (wyznaczenie „brakujących” wartości brzegowych - temperatury lub strumieni ciepła),
- obliczenie wartości temperatury w punktach (węzłach) należących do wnętrza obszaru.

2. Moduł wprowadzania kształtu brzegu i generacji liniowych elementów brzegowych

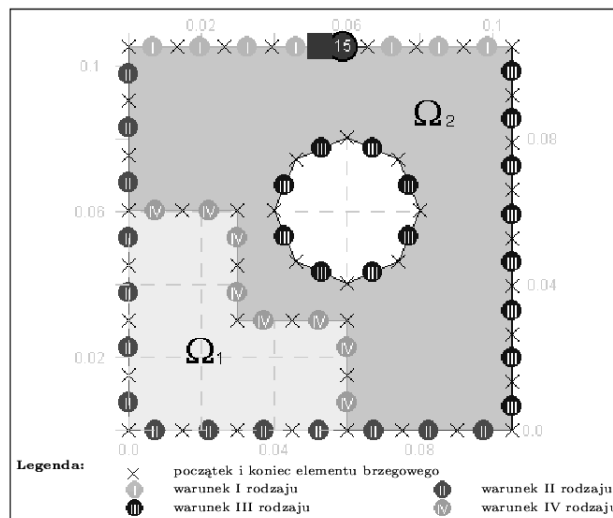
Jednym z modułów autorskiego programu komputerowego służącego do obliczeń ustalonych lub nieustalonych pól temperatury z wykorzystaniem MEB jest moduł generacji liniowych elementów brzegowych oraz liniowych elementów wewnętrznych. Moduł ten pozwala na wykonanie dyskretyzacji zarówno jednego obszaru, jak i kilku podobszarów, na styku których zadany jest warunek idealnego kontaktu lub warunek z oporem cieplnym (warunek czwartego rodzaju).

Na rysunku 1 przedstawiono zeskanowany wygląd okna narzędziowego do wprowadzania kształtu brzegu i zadawania typu warunków brzegowych (1, 2, 3 lub 4 rodzaju).



Rys. 1. Budowanie kształtu brzegu - Builder BEM Shape

Ogólne zasady korzystania z tego programu są następujące: W praktyce kształty obszarów, które chcemy wprowadzić, mamy zwymiarowane np. na kartce papieru. Program oferuje kilka sposobów przeniesienia tych wymiarów do tworzonego projektu. Główna idea polega na automatycznym budowaniu wielu naraz elementów brzegowych, które pod względem funkcjonalnym tworzą fragment brzegu. Funkcjonalność ta jest zdefiniowana dwoma parametrami: kształtem brzegu (odcinek prostej, krzywa) lub rodzajem warunku brzegowego. Tak więc przed przeniesieniem danych, brzeg obszaru należy podzielić na fragmenty o tym samym typie brzegu i rodzaju warunku brzegowego. Należy przy tym rozróżnić brzeg zewnętrzny lub otwór (*hole*) i pamiętać o poprawnej kolejności wprowadzanych elementów (kierunek przeciwny do ruchu wskazówek zegara dla brzegu wewnętrznego i zgodny z ruchem wskazówek zegara dla otworów). Omawiany program zawiera wiele opcji pomocniczych (np. panel schowka, skalowania, opcja dopasowania, panel zagęszczenia), które ułatwiają wykonanie postawionego zadania. Na rysunku 2 pokazano przykładowy efekt działania tego programu dla dwóch obszarów, z których drugi zawiera otwór (brzeg wewnętrzny).



Rys. 2. Przykładowy wynik działania programu generacji liniowych elementów brzegowych

Jeśli rozpatrujemy taki wariant MEB, który nie wymaga dyskretyzacji wnętrza obszaru, to następny krok algorytmu związany jest z przejściem do modułu obliczeniowego.

3. Moduł generacji liniowych trójkątnych elementów wewnętrznych

W wielu zagadnieniach rozwiązywanych z wykorzystaniem MEB konieczna jest również dyskretyzacja wnętrza rozpatrywanego obszaru (lub kilku obszarów).

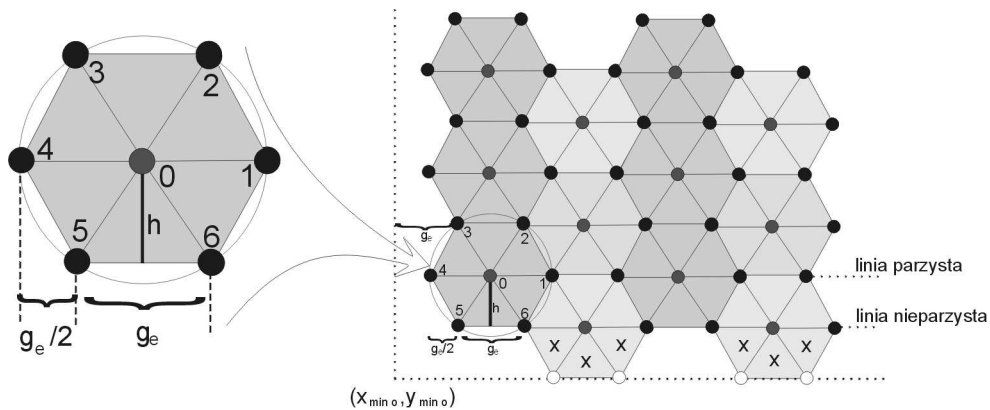
Opracowany program pozwala dokonać takiej dyskretyzacji za pomocą liniowych elementów trójkątnych. Zrezygnowano przy tym z podejścia najczęściej stosowanego w algorytmach generacji siatek, które, ogólnie rzecz biorąc polega, na utworzeniu kombinacji dowolnych trójkątów pokrywających rozpatrywany obszar.

W takim przypadku niejednokrotnie otrzymuje się bardzo zróżnicowane pod względem wielkości (długości boków i kąty) trójkąty, co prowadzi do zwiększenia błędów numerycznego wyznaczania całek po tych elementach.

Opracowany algorytm wykorzystuje specyficzne własności MEB, między innymi fakt, że przed dyskretyzacją wnętrza dokonana jest dyskretyzacja brzegu obszaru za pomocą uporządkowanych (w sensie kolejności) elementów brzegowych.

W przypadku kilku podobszarów, dyskretyzacja wnętrza każdego z nich wykonywana jest niezależnie.

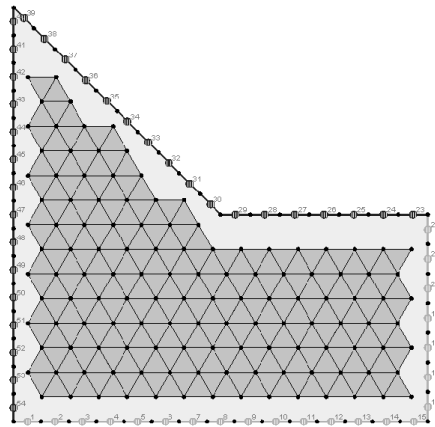
Podstawowym założeniem algorytmu jest stosowanie tam, gdzie to możliwe, trójkątów równobocznych. Długość boku tych trójkątów jest określona przez średnią długość elementów brzegowych, przy czym ich generacja rozpoczyna się w odległości d_{min} od brzegu obszaru. Założono, że d_{min} jest równa połowie średniej długości elementów brzegowych (rys. 3).



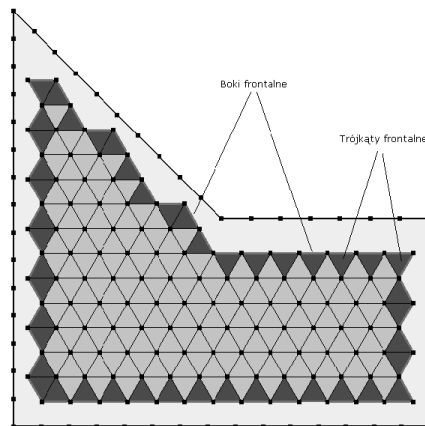
Rys. 3. Generowanie elementów i węzłów wewnętrznych za pomocą sześcioboku foremnego

Na rysunku 4 przedstawiono przykładową dyskretyzację brzegu obszaru i wynik działania pierwszego etapu dyskretyzacji wnętrza.

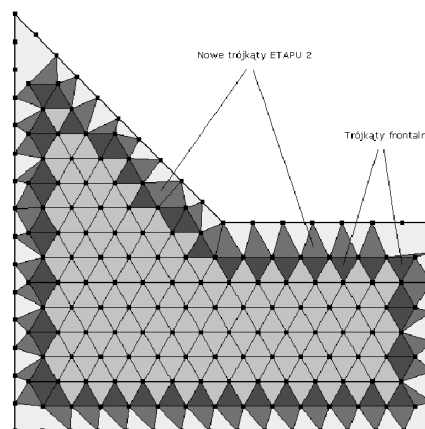
Etap drugi polega na dyskretyzacji pozostałej części obszaru Ω . Spośród wygenerowanych trójkątów z etapu pierwszego odnajdujemy te, które leżą w pobliżu brzegu obszaru. Nazwiemy je trójkątami frontalnymi. Interesują nas te boki trójkątów frontalnych (i związane z nimi węzły), które tworzą zamknięty kontur podobszaru zdyskretyzowanego w etapie pierwszym (rys. 5). Nowe trójkąty generujemy z dwóch wierzchołków frontalnych i najbliższego węzła brzegowego (rys. 6), przy czym przez najbliższy węzeł rozumiemy ten, którego odległość od środka boku frontalnego jest najmniejsza.



Rys. 4. Efekt działania pierwszego etapu dyskretyzacji wnętrza

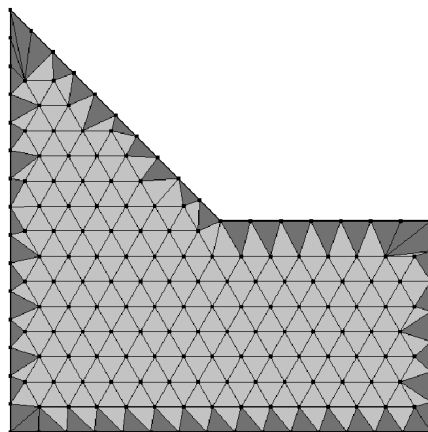


Rys. 5. Trójkąty i boki frontalne

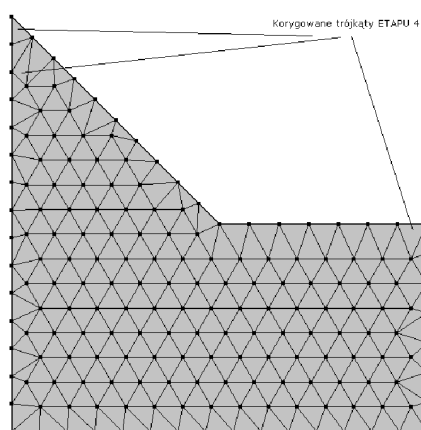


Rys. 6. Efekt działania etapu drugiego

W etapie trzecim dla każdego elementu brzegowego (będzie on bokiem nowego trójkąta) poszukujemy takiego punktu wewnętrznego (wierzchołka), który leży najbliżej środka tego elementu. Węzły rozpatrywanego elementu (początek i koniec) oraz znaleziony punkt wewnętrzny tworzą nowy trójkąt (rys. 7).



Rys. 7. Efekt działania etapu trzeciego



Rys. 8. Dyskretyzacja brzegu i wnętrza rozpatrywanego obs

Etap czwarty polega na korekcie tych trójkątów wygenerowanych w etapach drugim i trzecim, które zawierają kąty rozwarte. Na rysunku 8 pokazano końcowy rezultat generacji trójkątów wewnętrznych. Szczegóły opracowanego algorytmu przedstawiono w [8].

Dokonana dyskretyzacja brzegu i wnętrza obszaru pozwala na wykorzystanie dalszych modułów programu obliczeń pól temperatury za pomocą metody elementów brzegowych.

Literatura

- [1] Mochnacki B., Suchy J.S., Numerical methods in computations of foundry processes, PFTA, Cracow 1995.
- [2] Majchrzak E., Metoda elementów brzegowych w przepływie ciepła, Wyd. Pol. Częstochowskiej, Częstochowa 2001.
- [3] Majchrzak M., Mochnacki B., The BEM application for numerical solution of non-steady and non-linear thermal diffusion problems, CAMES 1996, 3, 4, 327-346.
- [4] Banerjee P.K., BE methods in engineering, McGraw-Hill Company, London 1994.
- [5] Brebbia C.A., Dominguez J., Boundary elements, an introductory course, Computational Mechanics Publications, McGraw-Hill Book Company, London 1992.
- [6] Ładyga E., Praca doktorska, Politechnika Częstochowska, Częstochowa 1997.
- [7] Szopa R., Modelowanie krzepnięcia i krystalizacji z wykorzystaniem kombinowanej metody elementów brzegowych, Hutnictwo, 54, Gliwice 1999.
- [8] Freus S., Praca doktorska, Politechnika Częstochowska, Częstochowa (w przygotowaniu).