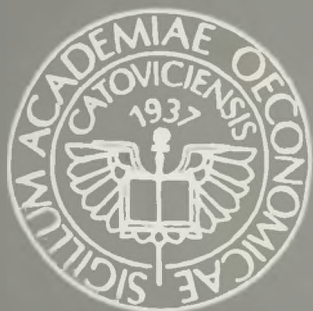


# STUDI E E K O N O M I C Z N E



AKADEMIA EKONOMICZNA  
im. Karola Adamieckiego w Katowicach

## ZASTOSOWANIA METOD MATEMATYCZNYCH W EKONOMII I ZARZĄDZANIU

Redaktor naukowy  
**Jerzy Mika**

# 56

**ZESZYTY NAUKOWE**

**ZASTOSOWANIA  
METOD MATEMATYCZNYCH  
W EKONOMII I ZARZĄDZANIU**

# **ZESZYTY NAUKOWE**

**AKADEMII EKONOMICZNEJ IM. KAROLA ADAMIECKIEGO**

**„Studia Ekonomiczne”**

# **ZASTOSOWANIA METOD MATEMATYCZNYCH W EKONOMII I ZARZĄDZANIU**



**Katowice 2010**

Komitiet Redakcyjny  
Krystyna Lisiecka (przewodnicząca), Anna Lebda-Wyborna (sekretarz),  
Halina Henzel, Anna Kostur, Maria Michałowska, Grażyna Musiał,  
Irena Pyka, Stanisław Stanek, Stanisław Swadźba, Janusz Wywiół, Teresa Żabińska

Redaktor naukowy  
Jerzy Mika

Recenzent  
Antoni Smoluk

Redaktor  
Karolina Koluch

Skład  
Marcin Strzelczyk

© Copyright by Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej  
w Katowicach 2010

**ISBN 978-83-7246-455-2**

Wszelkie prawa zastrzeżone. Każda reprodukcja lub adaptacja całości  
bądź części niniejszej publikacji, niezależnie od zastosowanej  
techniki reprodukcji, wymaga pisemnej zgody Wydawcy

**WYDAWNICTWO AKADEMII EKONOMICZNEJ**  
**IM. KAROLA ADAMIECKIEGO W KATOWICACH**  
ul. 1 Maja 50, 40-287 Katowice, tel.: +48 32 257-76-35, faks: +48 32 257-76-43  
www.ae.katowice.pl e-mail: wydawnictwo@ae.katowice.pl

# SPIS TREŚCI

Agata Berdowska, Gabriela Górecka-Berdowska

|                                                                            |    |
|----------------------------------------------------------------------------|----|
| BLENDEN LEARNING A NAUCZANIE MATEMATYKI NA STUDIACH<br>EKONOMICZNYCH ..... | 7  |
| Summary .....                                                              | 26 |

Henryk Gurgul, Paweł Majdosz, Stanisław Mysza

|                                                                                 |    |
|---------------------------------------------------------------------------------|----|
| MODEL PROGNOZ ZŁOŻONYCH W PRZEDSIĘBIORSTWIE BRANŻY<br>CERAMIKI SANITARNEJ ..... | 27 |
| Summary .....                                                                   | 48 |

Bartłomiej Jabłoński

|                                                     |    |
|-----------------------------------------------------|----|
| MODEL WYCENY PRZEDSIĘBIORSTW METODĄ DOCHODOWĄ ..... | 49 |
| Summary .....                                       | 58 |

Anna Janiga-Ćmiel

|                                                                                                       |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| ANALIZA ZMIENNOŚCI W DYNAMICE PROCESÓW FINANSOWYCH<br>NA PODSTAWIE FUNKCJI GĘSTOŚCI SPEKTRALNEJ ..... | 59 |
| Summary .....                                                                                         | 72 |

Adrianna Mastalerz-Kodzis

|                                                                                                   |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| MULTIŁAMKOWY PROCES RUCHU BROWNA A FUNKCJA WEIERSTRASSA<br>– PORÓWNANIE WYBRANYCH WŁASNOŚCI ..... | 73 |
| Summary .....                                                                                     | 82 |

Jerzy Mika

|                                                                                     |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------|----|
| O LINEARYZACJI I ROZWIĄZANIACH UOGÓLNIONYCH ZADAŃ<br>OPTYMALIZACJI ILORAZOWEJ ..... | 83 |
| Summary .....                                                                       | 99 |

Monika Miśkiewicz

|                                                                                                          |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| O ZASTOSOWANIACH TWIERDZENIA TAKENSA O ZANURZANIU<br>DO ANALIZY NIELINIOWYCH SYSTEMÓW DYNAMICZNYCH ..... | 100 |
| Summary .....                                                                                            | 109 |

Ewa Pośpiech

|                                                  |     |
|--------------------------------------------------|-----|
| PODPISY CYFROWE – SCHEMAT PODPISU ELGAMALA ..... | 110 |
| Summary .....                                    | 119 |

Zygmunt Przybycin

|                                                                                             |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| ZASTOSOWANIE LOGIKI ROZMYTEJ W FINANSACH – ZARZĄDZANIE<br>RYZYSKIEM METODĄ PORTFELOWĄ ..... | 120 |
| Summary .....                                                                               | 132 |

Joanna Trzęsiok

|                                                                          |     |
|--------------------------------------------------------------------------|-----|
| BADANIE ODPORNOŚCI WYBRANYCH NIEPARAMETRYCZNYCH<br>MODELI REGRESJI ..... | 133 |
| Summary .....                                                            | 146 |

Michał Trzęsiok

|                                                                                        |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| ANALIZA WYBRANYCH FORMALNYCH WŁASNOŚCI TAKSONOMICZNEJ<br>METODY WEKTORÓW NOŚNYCH ..... | 147 |
| Summary .....                                                                          | 157 |

Katarzyna Zeug-Żebro

|                                                                               |     |
|-------------------------------------------------------------------------------|-----|
| METODY ODRÓŻNIANIA DETERMINISTYCZNYCH SZEREGÓW CZASOWYCH<br>OD LOSOWYCH ..... | 158 |
| Summary .....                                                                 | 168 |

**Agata Berdowska**

**Gabriela Górecka-Berdowska**

## **BLENDED LEARNING**

## **A NAUCZANIE MATEMATYKI**

## **NA STUDIACH EKONOMICZNYCH**

### **Wstęp**

Podobnie jak wiele uczelni na całym świecie, polskie szkolnictwo wyższe stoi przed obliczem nowych zagrożeń i wyzwań, jakie niesie ciągle zmieniający się świat (np. niż demograficzny, emigracja zarobkowa). Stąd polskie uczelnie powinny podjąć starania w celu rozszerzenia swojej oferty edukacyjnej o nowe rozwiązania. W dzisiejszym świecie nie wystarcza jakość kształcenia oraz zakres dziedzinowy oferowany przez instytucje edukacyjne. Młodzi ludzie coraz częściej starają się godzić pozyskanie dobrego wykształcenia z pracą zarobkową. Wielu Polaków decyduje się na studia w trybie zaocznym, jednocześnie pracując w innym kraju na terenie Unii Europejskiej. Zatem ogromne znaczenie mają dla nich ułatwienia w pozyskiwaniu wiedzy oraz koszty nauki. Nauczanie elektroniczne (na odległość) wydaje się być szansą dla polskiego szkolnictwa wyższego na przezwyciężenie trudności oraz możliwością jego rozwoju. Takie nauczanie umożliwia naukę zarówno osobom przebywającym poza granicami kraju, jak i tym, którzy chcą się przekwalifikować. Szkolenia elektroniczne są idealnym rozwiązaniem dla osób niepełnosprawnych, co tym samym, z perspektywy uczelni, powoduje dotarcie oferty edukacyjnej do nowej grupy odbiorców.

W celu wzbogacenia oferty dydaktycznej uczelni oraz zachowania wysokich standardów kształcenia można, np. na studiach zaocznych, wprowadzić szkolenia elektroniczne jako uzupełnienie nauczania w formie tradycyjnej.

Jednym z podstawowych przedmiotów wykładanych na uczelniach ekonomicznych jest matematyka. Realizacja elektronicznych materiałów dydaktycznych z tego przedmiotu przysparza ich wykonawcom sporo trudności. Dzieje się tak, ponieważ matematyka nie jest łatwym przedmiotem do nauczania nawet w formie tradycyjnej. Istotny jest zatem sposób opracowywania tych materiałów i realizacja całego szkolenia.

Poniżej zaprezentowano przykład przygotowania takich materiałów. Prezentację poprzedzono omówieniem pewnych niezbędnych zagadnień, takich jak: kształcenie na odległość, szkolenia elektroniczne, szkolenia mieszane, podstawowe zagadnienia dydaktyki matematyki i psychologii istotne dla opracowywania elektronicznych materiałów dydaktycznych.

## **1. Kształcenie na odległość – szkolenia elektroniczne i mieszane**

Za początki kształcenia na odległość można uznać publikację na szeroką skalę książki Platona („Dialogi” Sokratesa). Ogromny wpływ na rozwój nauczania na odległość miało rozpowszechnianie się religii chrześcijańskiej. Wyznawcy wiary przekazywali sobie przemyślenia i „odkrycia” w tej dziedzinie drogą listowną. W XIX wieku szkolenie ludzi na odległość odbywało się poprzez dostarczanie materiałów dydaktycznych za pośrednictwem poczty. Kolejnym sposobem kształcenia dystansowego stały się w 1925 roku szkolenia drogą radiową, a następnie w 1940 roku – uruchomienie transmisji programów edukacyjnych w telewizji. Dalszy rozwój szkoleń na odległość to lata 80. ubiegłego wieku, kiedy to powstała technologia telekonferencji. Natomiast lata 90. to rozwój Internetu i zaawansowanej technologii informatycznej, wpływających na coraz to nowszą formę szkoleń na odległość [4; 7].

W chwili obecnej popularnymi formami nauczania na odległość na świecie są: e-learning, blended learning oraz m-learning. E-learning, czyli szkolenia elektroniczne, to kształcenie na odległość z wykorzystaniem komputerów lub sieci Internet. Zajęcia mogą się odbywać całkowicie za pośrednictwem sieci w czasie rzeczywistym (on line) lub off line, jeśli elektroniczne materiały dydaktyczne zostały dostarczone uczestnikom np. na płytach CD lub DVD. Komunikacja pomiędzy uczestnikami kursu oraz z prowadzącym szkolenie odbywa się przez Internet (czaty lub e-mail). Udział osoby prowadzącej proces dydaktyczny jest tutaj ograniczony do przygotowania treści dydaktycznych oraz do sporadycznego komunikowania się z osobami szkolonymi. Blended learning – w tłumaczeniu szkolenie mieszane – charakteryzuje się tym, iż część zajęć jest pro-

wadzona „na żywo” przez nauczyciela w rzeczywistych salach, a pozostała część w formie wirtualnej. M-learning to szkolenia mobilne, czyli realizowane za pomocą telefonów komórkowych (nie zostały one tutaj szerzej omówione, ponieważ nie będą rozważane w dalszej części tego opracowania).

Nauczanie na odległość w formie e-learning jest trudnym wyzwaniem dla osób tworzących materiały dydaktyczne, ponieważ, jak już wspomniano, udział osoby prowadzącej w tych szkoleniach jest znikomy. W szkoleniach typu blended learning osoby szkolone mają większy kontakt z prowadzącym, niemniej ze względu na to, iż pewne partie materiału muszą oni przyswoić samodzielnie, elektroniczne materiały dydaktyczne powinny być tworzone w podobny lub identyczny sposób, w jaki tworzy się je do nauczania w formie e-learning. Materiały te mają najczęściej formę multimedialnych prezentacji (tekst, rysunki, wzory, filmy, dźwięk) lub dokumentów tekstowych dostarczanych uczestnikom kursów. Wynika to ze zróżnicowanych potrzeb użytkowników (np. różne wymagania i nawyki uczenia się) [10].

Zauważono wcześniej, że matematyka jest przedmiotem trudnym do przekazania nawet za pomocą tradycyjnych metod kształcenia. Wydaje się, że korzystanie tylko z tekstowego rodzaju materiałów dydaktycznych w szkoleniach elektronicznych jest niewystarczające. Za pomocą samego tekstu bardzo trudno jest nauczyć się matematyki samodzielnie, dlatego do budowy elektronicznych materiałów dydaktycznych z tego przedmiotu pomocne może być zastosowanie animacji i elementów interakcji<sup>\*</sup>.

## 2. Wybrane zagadnienia dydaktyki i psychologii uczenia się w projekcie szkolenia mieszanego z matematyki

Jak już wspomniano powyżej, zastosowanie animacji i elementów interakcji w elektronicznych materiałach dydaktycznych z matematyki może wpłynąć korzystnie na realizację tego przedmiotu także w szkoleniach mieszanych. Jednak samo wkomponowanie tych elementów nie wystarczy, aby zbudować efektywne

---

<sup>\*</sup> „Właściwość urządzenia elektronicznego, a także programów, gier itp., polegająca na możliwości «prowadzenia dialogu» z użytkownikiem, reagowania na jego polecenia itp.: Dzięki interaktywności odtwarzacza każdą ze scen można łatwo powtarzać, zwalniać i zatrzymywać. INTERAKTYWNY o urządzeniu elektronicznym: «taki, który odznacza się tą cechą. współpracujący z odbiorcą»”.

szkolenie<sup>\*</sup>. Twórca materiałów musi znać podstawowe zagadnienia z psychologii ucznia się oraz pewne ogólne zasady nauczania matematyki.

W nauczaniu tego przedmiotu w sposób tradycyjny wykorzystuje się trzy podejścia psychologiczne:

- 1) koncepcję behawiorystyczną,
- 2) koncepcję psychodynamiczną,
- 3) koncepcję poznawczą [5; 1].

T teoria behawioryzmu zakłada, że zachowanie się człowieka, jego osiągnięcia w nauce oraz w trakcie pracy twórczej wynikają z potencjału genetycznego danego osobnika, jak również zależą od środowiska fizycznego i społecznego. Aby móc wpływać na zachowanie i proces uczenia się (a więc nauczać) człowieka, należy bacznie obserwować jego zachowanie oraz relację występującą pomiędzy bodźcem a reakcją na ten bodziec (w cybernetyce i ekonomii jest to nazywane analizą „wejście – wyjście”). Behawioryzm zakłada, że największy wpływ na zachowanie człowieka ma środowisko społeczne, a nie procesy psychiczne, takie jak świadomość, myślenie czy postawy, a to oznacza, że zdolności uczenia się człowieka są zasadniczo nieograniczone. Wpływ na osobnika mają wzmocnienia (nagrody lub kary bądź pozytywne lub negatywne konsekwencje postępowania człowieka) i umiejętny ich dobór, prowadzący do najlepszych osiągnięć w procesie kształcenia.

Elementem koncepcji behawiorystycznej jest nauczanie programowe, które opiera się na stworzeniu odpowiedniego programu nauczania i jego realizacji za pomocą środków dydaktycznych (np. wykład, ćwiczenia, film, rysunki, ilustracje itp.) oraz sprawdzaniu poziomów jego realizacji, co pozwala na wyznaczanie nagród lub kar.

Założeniem koncepcji psychodynamicznej jest determinowanie zachowań człowieka przez wewnętrzne mechanizmy motywacyjne. Mechanizmami motywacyjnymi są popędy, potrzeby i dążenia, które nie zawsze są ze sobą w zgodzie i człowiek nie zawsze potrafi sam rozwiązać powstałe pomiędzy nimi konflikty. Według takiego podejścia, uczenie się jest podobne do psychoterapii prowadzącej do zmian w zachowaniu człowieka. Głównym nurtem zainteresowań psychoanalityków są motywy, jakimi kierują się ludzie w trakcie nauki, oraz to, dlaczego jedni uczą się lepiej, a inni gorzej. Koncepcja ta ma jednak pewną wadę, a mianowicie przecenia przewagę czynników emocjonalnych i motywacyjnych nad procesami poznawczymi (spostrzeganie, pamięć i myślenie).

W koncepcji poznawczej człowiek jest postrzegany jako układ przetwarzający informacje. Na zachowanie człowieka ma wpływ nie tylko dostarczana

---

<sup>\*</sup> Przez efektywność szkolenia można rozumieć np. pozytywne wyniki osiągane przez osoby szkolone.

w danym momencie aktualna wiedza, ale także wiedza, jaką zdobył i zgromadził wcześniej (czyli doświadczenie). Chcąc zgodnie z założeniami tej teorii wpływać na zachowania człowieka, należy go celowo i systematycznie wychowywać. Koncepcja ta nie jest całkowicie jednolita. Można w niej wyodrębnić kilka nurtów:

1. Poznawczo-decyzyjny – czynności wykonywane przez człowieka są powodowane informacjami pozyskanymi od środowiska w trakcie procesu uczenia się bądź myślenia czy działania.
2. Sformalizowanych modeli teoretycznych – źródłem tego nurtu stał się rozwój cybernetyki, ekonometrii i lingwistyki. Nurt ten zakłada, że człowiek, oprócz zachowania automatycznego, czyli nieświadomych odruchów, wykorzystuje również działania całkowicie świadome i celowe. Zwolennicy tego nurtu są również zainteresowani wykrytą przez neurologów różnicą pomiędzy pamięcią świeżą, przechowującą informacje niezbędne do realizacji aktualnie wykonywanej czynności, a trwałą, w której są przechowywane informacje niezbędne do wykonywania różnych czynności, niekoniecznie realizowanych w danym momencie.
3. Teorii czynności – podstawą tego nurtu jest pojęcie czynności. Pod pojęciem tym rozumie się zachowanie z góry nastawione na osiągnięcie postawionego celu. Bardzo ważne są tutaj badania nad strukturą czynności oraz „mechanizmami sterującymi ich ukierunkowanym przebiegiem” [5, s. 40].

Podsumowując powyższe poglądy na postrzeganie człowieka, można przytoczyć cytát: „Współcześni psychologowie zgromadzili ogromny materiał empiryczny na temat funkcji i struktury procesów poznawczych. Wynika z niego, że człowiek jest pewnym układem poznawczym, który przetwarza informacje (information processing system). Przyjmuje informacje ze świata zewnętrznego, czyli spostrzega; koduje je w pamięci trwałej; wreszcie operuje tymi informacjami, czyli myśli. Procesy poznawcze nie są przypadkowe, odbywają się one zgodnie z pewnymi programami lub planami czynności. O ile dzięki motywacji człowiek wie, co warto osiągnąć, o tyle dzięki poznaniu orientuje się, co można zdobyć” [5, s. 41].

Można zauważyć, że w trakcie procesu uczenia się i nauczania sposobem tradycyjnym są wykorzystywane wszystkie trzy koncepcje psychologiczne.

W nauczaniu na odległość, zwłaszcza metodą e-learning, wydaje się być wykorzystywane przede wszystkim podejście behawiorystyczne (por. [10]). Stąd kształcenie metodą e-learning jest trudniejsze niż nauczanie tradycyjne lub metodą blended learning. Blended learning poprzez zajęcia laboratoryjne jest w pewnym stopniu podobny do kształcenia tradycyjnego, gdyż podczas zajęć prowadzący ma możliwość wpływania na kursantów również za pomocą podejścia psychodynamicznego i poznawczego.

Na proces kształcenia istotny wpływ mają różne rodzaje uczenia się. Najbardziej popularne są dwie koncepcje:

- 1) uczenie się receptywne (odtwórcze),
- 2) uczenie się odkrywające (inaczej problemowe) [3].

Uczenie się receptywne to uczenie się przez przyswajanie. Polega ono na pobieraniu informacji z różnych źródeł, przetwarzaniu ich oraz zapamiętywaniu. Jest ono bardzo pomocne w nauczaniu matematyki. Najlepiej sprawdza się na wyższych poziomach kształcenia, ponieważ najefektywniejsze nauczanie receptywne polega na nauce treści materiałów opierających się na informacjach wyuczonych wcześniej, a nie tylko na uczeniu się na pamięć treści zupełnie nowych. Do planowania kształcenia pojęć matematycznych używa się pięciu zasad nauczania receptywnego, które zostały przedstawione poniżej:

- nastawienie na zainteresowanie ucznia przedmiotem oraz organizowanie jego postępów poprzez odpowiednią motywację oraz pytania i wskazówki,
- progresywne różnicowanie pojęć za pomocą uogólnień i konkretyzacji,
- integracja w rozumieniu przypadków szczególnych danego pojęcia, związków pomiędzy pojęciami i analogii,
- systematyczna organizacja uczenia się poprzez kolejność w realizacji tematów,
- konsolidacja za pomocą utrwalania wiadomości poprzez ćwiczenia oraz powtarzanie i stosowanie wyuczonych informacji.

Zasadniczą tezą uczenia się odkrywającego jest samodzielne poszukiwanie faktów oraz odkrywanie związków pomiędzy nimi. W myśl tej zasady zakłada się, że osoba ucząca się lepiej zapamiętuje samodzielnie pozyskaną i przeanalizowaną wiedzę. Główną ideą uczenia się problemowego jest sterowanie odkrywaniem wiedzy (guided discovery learning) przez nauczyciela. Sterowanie to powinno usamodzielniać przechodzenie ucznia przez zasadnicze etapy rozwiązywania postawionego problemu.

Aby koncepcja uczenia się odkrywającego była efektywna, należy przestrzegać dwóch podstawowych zasad:

- 1) właściwego stawiania problemu,
- 2) minimalnej wskazówki.

Pierwsza z zasad jest jednak bardzo często pomijana w trakcie procesu nauczania, ponieważ pytania problemowe powstają spontanicznie w trakcie pracy z osobami uczącymi się [3].

Uczenie odkrywające jest uważane za bardziej czasochłonne w porównaniu z nauczaniem receptywnym, stąd też rzadsze jego zastosowanie. Jednak w tradycyjnym nauczaniu matematyki stosuje się obie koncepcje.

Analizując powyżej przedstawione rodzaje uczenia się, można zauważyć, że w e-learningu jest stosowany rodzaj uczenia się receptywnego. Wynika to z założeń samodzielnej nauki na podstawie dostarczanych materiałów. Natomiast w blended learningu wykorzystuje się ponadto uczenie się odkrywające, podobnie jak w nauczaniu tradycyjnym, ze względu na osobiste spotkania kursantów z nauczycielem. Wydaje się, że oba te podejścia można zastosować w materiałach dydaktycznych, co powinno korzystnie wpłynąć na ich jakość i efektywność.

W konkretnym przypadku nauczania matematyki na odległość podstawową oraz najskuteczniejszą metodą w projektowaniu elektronicznych materiałów dydaktycznych jest tzw. metoda aksjomatyczna. Polega ona na aksjomatyzacji, czyli podaniu gotowych treści matematycznych przez nauczyciela i dedukcji podanych zagadnień przez osoby uczące się na podstawie przytoczonych przykładów oraz interpretacji i zastosowaniu zdobytej w trakcie nauki wiedzy. Aby nauczanie matematyki tą metodą było skuteczne i efektywne, należy pamiętać o zaangażowaniu w ten proces wyobraźni, myślenia oraz świadomego i aktywnego udziału uczących się [3].

W przygotowywaniu elektronicznych materiałów dydaktycznych z matematyki istotne jest również zastosowanie pięciu zasad dydaktyki matematyki. Zasadami nauczania nazywa się „[...] najogólniejsze prawidła, których nauczyciel powinien przestrzegać we wszystkich swoich zabiegach dydaktycznych” [3, s. 166]. Zasady te odnoszą się do nauczania różnych przedmiotów oraz osób w różnym wieku (dzieci, młodzież i osoby dorosłe). Są to:

- zasada systematyczności,
- zasada przystępności,
- zasada pogładowości,
- zasada świadomości i aktywności,
- zasada trwałości.

Pierwsza z zasad, zasada systematyczności, dotyczy nauczyciela. Polega ona na systematyczności w doborze i układzie treści (treści kształcenia nadające się do ujęcia w logiczny system) oraz w jej opracowywaniu (staranny dobór materiałów pod względem ich aktualności i ukierunkowania w stronę najnowszych tendencji w rozwoju nauki). Przeanalizowanie przez nauczyciela programu nauczania oraz podręcznika pod względem dydaktycznym pozwala na systematyczność uczenia się przez ucznia, a także wpływa na płynność w procesie jego uczenia się.

Następną zasadą jest zasada przystępności, inaczej nazywana zasadą stopniowania trudności. Jej istotą jest ciągle stawianie przed uczniem nowych wyzwań (zadań) na miarę jego możliwości i umiejętności. Wiąże się z tym również stopniowanie trudności oraz „stworzenie warunków do świadomego ich prze-

zwycięzania” [3, s. 159]. Jednym z najtrudniejszych elementów tej zasady jest przekazanie przez nauczyciela treści, z zachowaniem stale rosnących wymogów ścisłości naukowej przekazywanych materiałów dydaktycznych, w sposób jak najbardziej przystępny dla ucznia.

Kolejną zasadą jest zasada pogłębliwości. Stosowanie tej zasady w trakcie procesu nauczania matematyki powoduje „[...] pobudzenie myślenia ucznia podczas wykorzystania różnego typu czynności, prowadzących stopniowo od czynności konkretnych, przez czynności wyobrażeniowe, do abstrakcyjnych operacji” [3, s. 161]. Sposoby realizacji tej zasady są uzależnione od właściwości rozwoju psychofizycznego osób uczących się, posiadanych przez nich umiejętności i doświadczenia oraz od rodzaju przyswajanych treści.

Następną z zasad jest zasada świadomości i aktywności, zwana również zasadą świadomego i twórczego udziału ucznia w procesie nauczania. Jej podstawą jest, zgodnie z nazwą, świadomy i twórczy udział w procesie nauczania. „Czynnikami gwarantującymi spełnienie obu postulatów nauczania, a więc zarówno świadomości, jak i aktywności, są: właściwa motywacja czynności uczenia się, prawidłowe kształcenie uwagi podczas różnego rodzaju zajęć organizujących uczenie się, praca nad kształtowaniem nawyków dobrej roboty oraz samodzielności myślenia i działania, wreszcie wzbudzanie zainteresowania przedmiotem uczenia się” [3, s. 164].

Ostatnią zasadą jest zasada trwałości. „Zasadą trwałości będziemy nazywać wskazanie dydaktyki dotyczące trwałego przyswojenia operatywnej i użytecznej wiedzy w wyniku pogłębiania jej rozumienia oraz jej utrwalania i stosowania. [...] Jest to proces przeistaczania się wiedzy jeszcze chaotycznej, fragmentarycznej, nieraz zdobytej przypadkowo, w wiedzę zorganizowaną i uporządkowaną” [3, s. 166]. Z podanych „definicji” zasady trwałości wynika, iż opiera się ona na wszystkich wyżej omówionych zasadach [3: 6; 8].

Powyższe zagadnienia z psychologii uczenia się oraz zasad dydaktyki matematyki zostały zastosowane w trakcie projektowania i budowy przykładowych elektronicznych materiałów dydaktycznych z algebry liniowej dla studentów uczelni ekonomicznych oraz do rozplanowania szkolenia mieszanego z tego przedmiotu. Przykład ten zostanie omówiony szerzej w kolejnym fragmencie opracowania.

### 3. Struktura treści i metody przekazu treści szkolenia

Zakres materiału z wybranych zagadnień algebry liniowej oraz ich zastosowań w naukach ekonomicznych, który zawarto w przykładowych elektronicz-

nych materiałach dydaktycznych, pochodzi z materiałów wykładowych dr Gabrieli Góreckiej-Berdowskiej.

Jak zauważono powyżej, na układ treści szkolenia ma wpływ kolejność występowania pojęć. W związku z tym na początku przedstawiono rodzaje macierzy, a następnie wykonalne na nich działania. Ilustrację praktyczną stanowią przykłady ekonomiczne. Po nich przedstawiono własności działań na macierzach.

Następnym wprowadzonym pojęciem jest wyznacznik macierzy i jego własności.

Kolejnym pojęciem zamieszczonym w materiałach dydaktycznych jest macierz odwrotna i jej własności. Wprowadzenie tego pojęcia po wyznaczniku macierzy jest uzasadnione definicją i sposobami otrzymywania macierzy odwrotnej. W dalszej kolejności przedstawiono operacje elementarne na macierzach, niezbędne do objaśnienia postaci kanonicznej macierzy i w konsekwencji rzędu macierzy, które to pojęcie wprowadzono jako następne.

Dalej omówiono partię materiału dotyczącą układów równań liniowych. Zakłada się, że wprowadzone wcześniej pojęcia powinny być na tym etapie dobrze opanowane przez kursantów, a więc zrozumienie metod rozwiązywania układów równań liniowych nie powinno kursantowi stwarzać większych trudności. W celu lepszego zobrazowania tych metod wykorzystano przykład praktyczny.

Zamieszczono również zarys klasycznej metody najmniejszych kwadratów oraz elementy programowania liniowego. Zagadnienia te są przykładami zastosowania elementów algebry liniowej do rozwiązywania problemów ekonomicznych.

Wszystkie powyższe pojęcia i metody rozwiązywania zostały zilustrowane praktycznymi przykładami ekonomicznymi.

W celu przekazania treści matematycznych zawartych w elektronicznych materiałach dydaktycznych zastosowano następujące środki przekazu:

- animacje – służące do zaprezentowania zagadnień matematycznych w sposób pobudzający wyobraźnię,
- filmy – wpływające na poczucie osobistego kontaktu z wykładowcą,
- elementy dźwiękowe – pomagające w lepszym zrozumieniu i zapamiętaniu podanych treści merytorycznych i wykorzystujące pamięć słuchową,
- dokumenty tekstowe – pozwalające na dokonanie wydruku i prace bez użycia komputera (co może być wygodniejsze dla osób pracujących na co dzień z komputerem, wykorzystanie pamięci wzrokowej),
- elementy pozwalające na interaktywność, czyli takie, które zmuszą użytkownika do aktywnego i świadomego uczestniczenia w procesie kształcenia (pozwalające na samodzielność w poruszaniu się po kolejnych etapach szkolenia oraz umożliwiające podejmowanie decyzji co do ich kolejności opracowywania),

- kolorowe ilustracje – obrazujące pojęcia w celu ich lepszego zrozumienia,
- zadania do samodzielnego rozwiązania – ułatwiające nabycie umiejętności praktycznych,
- odsyłacze do literatury – udostępniające dodatkowe źródła pozyskiwania informacji.

Elementami sprawdzającymi odpowiednie zrozumienie wiedzy przez studentów, użytymi w elektronicznych materiałach dydaktycznych, są:

- pytania – dotyczące wątpliwości związanych ze zrozumieniem materiału przez osobę uczącą się,
- krótkie zadania – pozwalające ustalić, czy dany fragment materiału został poprawnie rozumiany przez kursanta,
- testy – składające się z kilku pytań bądź zadań, oddzielające kolejne partie materiału (pozwalające na ocenę, czy dana osoba rozumiała podane zagadnienia na tyle, aby przejść do opracowywania następnych pojęć).

#### **4. Przykładowe szkolenie mieszane z algebry liniowej dla ekonomistów**

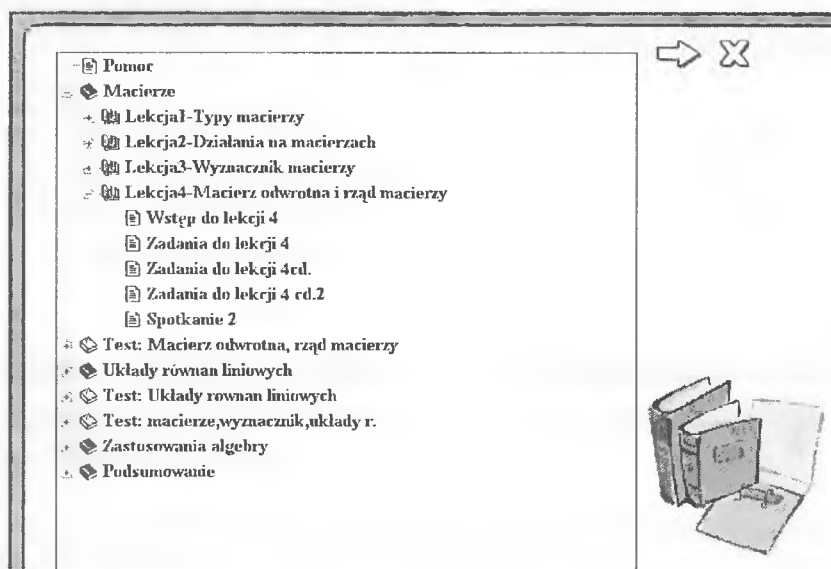
Niniejsze szkolenie jest przewidywane do stosowania w szkoleniach typu blended learning, w związku z czym zostały uwzględnione spotkania w salach lekcyjnych.

Pracę z elektronicznymi materiałami dydaktycznymi student rozpoczyna od obejrzenia filmowego wstępu. Film prezentuje wykładowcę, który krótko omawia zagadnienia związane ze szkoleniem.

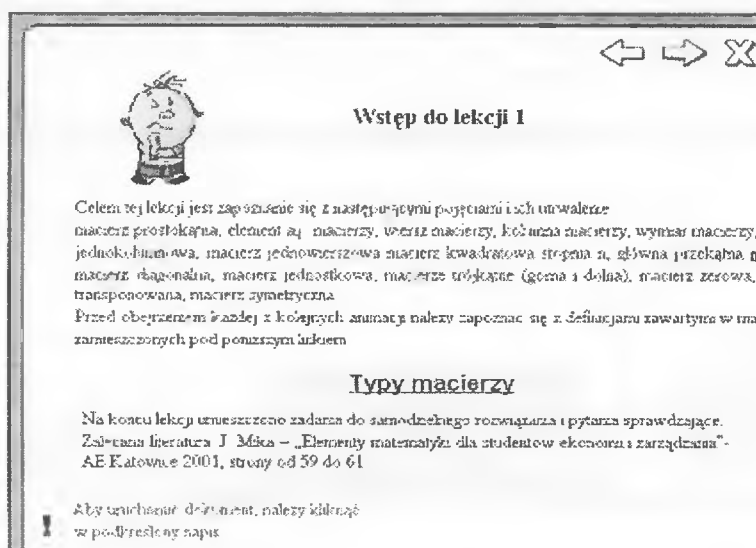
Kolejnym elementem jest spis treści (rysunek 1), w którym jest wyraźnie uwidoczniony podział materiału na działy, lekcje, strony oraz testy.

Następnie zamieszczono krótką „Pomoc” dla ucznia, w której zawarto objaśnienia przycisków oraz stosowanych w całości materiałach oznaczeń.

Jak widać na rysunku 1, treść została podzielona na trzy podstawowe działy: Macierze, Układy równań liniowych oraz Zastosowania algebry. Dział „Macierze” został podzielony na cztery lekcje. Pierwszą z nich jest lekcja o temacie: „Typy macierzy”. Na jej opanowanie przewidziano 2 godziny zegarowe. Na samym początku zamieszczono wstęp (rysunek 2), który określa cel lekcji oraz wytycza postępowanie w jej obrębie, a także z którego za pośrednictwem linku student przechodzi do materiałów dydaktycznych w formie pisemnej, które są możliwe do wydrukowania.

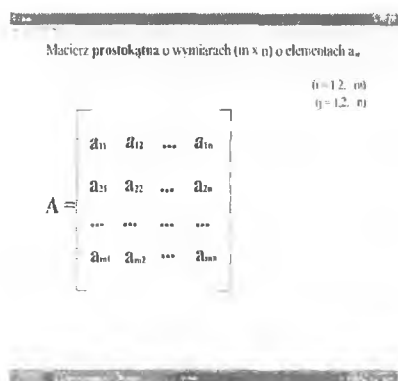


Rys. 1. Struktura treści



Rys. 2. Wstęp do wybranej lekcji z algebry liniowej

W dalszej części zilustrowano, za pomocą animacji, typy macierzy. Każda z animacji przedstawia kolejne etapy tworzenia się macierzy (rysunek 3 i 4), ich zapis teoretyczny oraz ilustrujące je przykłady liczbowe.

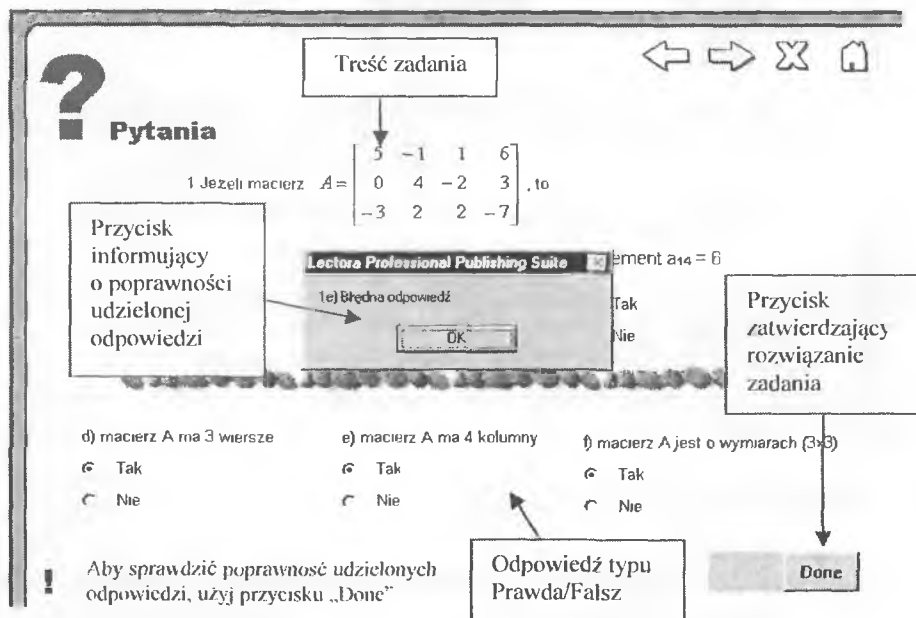


Rys. 3. Obraz macierzy prostokątnej



Rys. 4. Obraz macierzy prostokątnej wraz z zaznaczonymi wierszem i kolumną

Kolejnym elementem lekcji 1 są zadania do samodzielnego rozwiązania, wraz z linkiem do poprawnych odpowiedzi. Na samym końcu zamieszczono pytania sprawdzające zrozumienie materiału oraz utrwalające wiedzę. Zostały one skonstruowane jako pytania typu prawda-falsz. Zakładają one interakcję uczącego się. Po udzieleniu odpowiedzi na pytania, czyli zaznaczeniu pól przy odpowiednich odpowiedziach, należy użyć przycisku „Done”, aby pojawiały się kolejno informacje dotyczące poprawności udzielonych odpowiedzi (rysunek 5).



Rys. 5. Przykład pytania

Lekcja druga nosi tytuł: „Działania na macierzach”. Na zapoznanie się z jej zawartością przewidziano 2 godziny zegarowe. Podobnie jak lekcja pierwsza, lekcja druga zaczyna się od słów wstępu, informujących o jej zawartości oraz kolejności poruszania się po niej. Na początku zawarto również materiały pisemne. W dalszej części znajdują się animacje obrazujące działania na macierzach wraz z ilustrującymi je przykładami liczbowymi i ekonomicznymi (jeden z przykładów zamieszczono w tabeli 1).

Tabela 1

Trzy hurtownie I, II, III zaopatrują cztery duże sklepy ( $S_1, S_2, S_3, S_4$ ) w mąkę. Hurtownie mają mąkę w dwóch gatunkach:

- mąka wrocławska,
- mąka poznańska.

Miesięczny plan dostawy mąki wrocławskiej poszczególnych hurtowni do sklepów przedstawia się następująco (w kilogramach):

| Sklepy<br>Hurtownie | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|
| I                   | 100   | 100   | 150   | 70    |
| II                  | 150   | 130   | 100   | 120   |
| III                 | 50    | 120   | 0     | 160   |

Miesięczny plan dostawy mąki poznańskiej z danych hurtowni do poszczególnych sklepów obrazuje poniższa tabela (w kilogramach):

| Sklepy<br>Hurtownie | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|
| I                   | 50    | 115   | 0     | 40    |
| II                  | 70    | 80    | 125   | 0     |
| III                 | 80    | 50    | 180   | 110   |

Możemy postawić pytania:

- 1) Jak wygląda plan dostawy mąki z poszczególnych hurtowni do wymienionych sklepów?
- 2) Ile mąki otrzymuje sklep  $S_2$  z I hurtowni, a ile z II?

Aby odpowiedzieć na te pytania, wykorzystamy działanie dodawania macierzy.

Wprowadzimy niezbędne oznaczenia:

- A – macierz dostaw mąki wrocławskiej
- B – macierz dostaw mąki poznańskiej
- C – macierz łącznych dostaw mąki z poszczególnych hurtowni do wyżej wymienionych sklepów

$$A = \begin{bmatrix} 100 & 100 & 150 & 70 \\ 150 & 130 & 100 & 120 \\ 50 & 120 & 0 & 160 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 50 & 115 & 0 & 40 \\ 70 & 80 & 125 & 0 \\ 80 & 50 & 180 & 110 \end{bmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 150 & 215 & 150 & 110 \\ 220 & 210 & 225 & 120 \\ 130 & 170 & 180 & 270 \end{bmatrix}$$

czyli

| Hurtownie \ Sklepy |                |                |                |                |
|--------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
|                    | S <sub>1</sub> | S <sub>2</sub> | S <sub>3</sub> | S <sub>4</sub> |
| I                  | 150            | 215            | 150            | 110            |
| II                 | 220            | 210            | 225            | 120            |
| III                | 130            | 170            | 180            | 270            |

Na pierwsze pytanie daje odpowiedź macierz  $C=A+B$ , natomiast odpowiedzią na drugie są elementy macierzy  $C$ , mianowicie  $c_{12}=215$  oraz  $c_{22}=210$ , a więc sklep  $S_2$  otrzymuje miesięcznie 215 kilogramów mąki z I hurtowni, a 210 kilogramów z II hurtowni.

Jeśli dostawy mąki wrocławskiej są dostarczane przez kolejnych 5 miesięcy i są one takie same, to ile zostanie jej dostarczonej z poszczególnych hurtowni do sklepów?

Zakładamy więc, że dostawy mąki wrocławskiej nadal obrazuje macierz  $A$ , natomiast rozwiązanie problemu przedstawia macierz  $T=5A$

$$T = \begin{bmatrix} 500 & 500 & 750 & 350 \\ 750 & 650 & 500 & 600 \\ 250 & 600 & 0 & 800 \end{bmatrix}$$

W lekcji tej znajdują się również zadania do samodzielnego rozwiązania wraz z poprawnymi odpowiedziami, a także pytania sprawdzająco-utrwalające. Pytania te są pytaniami typu prawda-falsz i podobnie jak w lekcji pierwszej, wymagają udzielania odpowiedzi w sposób interaktywny.

W lekcji trzeciej zaprezentowano temat „Wyznacznik macierzy”. Podobnie jak w lekcjach poprzednich, czas na zapoznanie się z materiałem wynosi 2 godziny zegarowe. Lekcja ta rozpoczyna się również, jak dwie pozostałe, od wstępu oraz udostępnienia materiałów pisemnych. Nie zamieszczono animacji dotyczących wyznaczników, jednakże podano informację, iż animacja, przedstawiająca obliczanie wyznacznika metodą Sarrusa, została zamieszczona w lekcji piątej. W dalszej kolejności znajdują się zadania do samodzielnego rozwiązania oraz

zadania do rozwiązywania w grupie wraz z odpowiedziami. Zadania do rozwiązywania w grupie uczący się powinien rozwiązać wraz z innymi kursantami, biorącymi udział w tym samym kursie (szkoleniu). Rozwiązywanie zadań nie musi oczywiście odbywać się w czasie rzeczywistym, ale za pośrednictwem Internetu. Na samym końcu znajdują się, tak jak w lekcjach poprzednich, pytania, na które uczący się musi udzielić odpowiedzi przed przejściem do lekcji następnej.

Po lekcji pierwszej, drugiej i trzeciej zaplanowano spotkanie w sali lekcyjnej z udziałem wykładowcy. Tematem zajęć praktycznych będą „Działania na macierzach i przekształcenia elementarne na wyznacznikach”. Na ich realizację przeznaczono 4 godziny zegarowe.

Ostatnią lekcją z działu „Macierze” jest lekcja czwarta realizująca temat: „Macierz odwrotna i rząd macierzy”. Na jej realizację zaproponowano 2 godziny zegarowe. Tutaj również na samym początku zamieszczono kilka słów wstępu oraz materiały do wydruku. W dalszej części zamieszczono zadania do samodzielnego rozwiązania wraz odpowiedziami. Jako pomoc w rozwiązywaniu części zadań zamieszczono istotne wskazówki. Jedno z zadań (nr 5 – patrz rysunek 6) nie ma jednoznacznej odpowiedzi, dlatego też jego rozwiązanie powinno zostać przesłane do wykładowcy. W celu ułatwienia kontaktu dodano link łączący kursanta bezpośrednio z adresem mailowym wykładowcy (rysunek 6).

**Zadania**

**Odpowiedzi do zadań**

4 Korzystając ze wskazówki z zadania 3 wyznaczyć macierz  $X$  z równań:

a)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  b)  $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$  h)  $X \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^T$

c)  $X \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$  d)  $X \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

e)  $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

f)  $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \\ 7 & 1 & 20 \end{bmatrix}$

g)  $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

5 Wyznaczyć macierz  $X = [5B + (AB)^{-1} \cdot A] \cdot B^{-1}$  oraz  $Y = A[(BA)^{-1} \cdot B - 3A^{-1}]$  wiedząc, że  $A$  i  $B$  są dowolnymi nieosobliwymi macierzami stopnia  $n$ .

Rozwiązanie zadania należy przesłać wykładowcy e-mail'em

**Adres e-mail**

Rys. 6. Możliwości interaktywnej pomocy w trakcie rozwiązywania zadań

Lekcja czwarta kończy się testem. Zadania w nim zawarte są zadaniami wielokrotnego lub jednokrotnego wyboru. Te dwa typy zadań różnią się, ponieważ pola wyboru przy odpowiedziach są polami tego samego typu. Test ten nie jest ograniczony czasowo, dlatego też istnieje możliwość rozwiązania go w czasie wyznaczonym przez indywidualne potrzeby. Jest on również punktowany. Aby przejść pomyślnie do następnej lekcji, należy uzyskać minimum 70 punktów. W przeciwnym razie nie należy przechodzić do następnego działu. Na początku testu znajduje się wstęp, który przedstawia tematykę testu, informacje dotyczące czasu na jego rozwiązanie oraz ograniczeń punktowych, a także objaśnienia poszczególnych elementów interakcji. Na zakończenie testu pojawiają się podsumowanie wyniku testu i objaśnienia dotyczące poprawności udzielonych odpowiedzi (rysunek 7).



Rys. 7. Podsumowanie testu

Po wszystkich czterech lekcjach z działu „Macierze” przewidziano zajęcia praktyczne w sali, na których zostanie zrealizowany temat: „Wyznaczanie ma-

cierzy odwrotnej poprzez dopisanie macierzy jednostkowej oraz wyznaczanie rzędu macierzy”. Na ich realizację zaplanowano 4 godziny zegarowe.

Drugim z kolei działem są „Układy równań liniowych”. W obrębie tego działu jest realizowana tylko lekcja 5 zatytułowana „Układy równań”. Zapoznanie się z materiałami zawartymi w tej lekcji powinno zająć 2 godziny zegarowe. Podobnie jak w lekcjach poprzednich, na samym początku został zamieszczony wstęp oraz materiały w formie tekstowej. W dalszej części znajduje się animacja rozwiązania przykładu ekonomicznego wraz z częścią obrazującą wyznaczanie wyznacznika metodą Sarrusa. Następnie zamieszczono zadania do samodzielnego rozwiązania wraz z odpowiedziami. Na końcu znajduje się test dotyczący układów równań liniowych. Test ten, podobnie jak test poprzedni, jest nieograniczony czasowo. Występują w nim pytania wielokrotnego i jednokrotnego wyboru, które różnią się od siebie elementami interakcji. Informacja o tym jest zawarta we wstępie (rysunek 8).

**TEST Z DZIAŁU: UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH**

Zadania w teście są zadaniami jednokrotnego lub wielokrotnego wyboru.  
Czas na rozwiązanie testu jest nieograniczony.  
Po każdej udzielonej odpowiedzi pojawi się poprawna odpowiedź.  
Test jest punktowany. Za każdą poprawną odpowiedź można otrzymać jeden punkt. Aby test „zaliczyć”, należy uzyskać minimum 9 punktów, a maksymalnie 13. Jeżeli test zostanie zdany pomyślnie, to program pozwoli przejść do następnego działu, jeżeli natomiast uzyskany wynik nie przekroczy 13 punktów, odeśle do ponownego przestudiowania wcześniejszych działów.

**Objaśnienia przycisków :**

Cancel - rezygnacja z rozwiązywania testu  
Next - przejście do dalszej części testu  
Back - przejście do poprzedniej części testu

☐ test jednokrotnego wyboru      ☐ test wielokrotnego wyboru

Cancel

Next

Rys. 8. Oznaczenia testu

Aby test został uznany za „zaliczony”, konieczne jest uzyskanie minimum 70 punktów.

Po lekcji piątej przewidziano trzecie i ostatnie spotkanie z wykładownicą. Również na to spotkanie przewidziano 4 godziny zegarowe. Tematem tego spotkania o charakterze praktycznym będzie „Rozwiązywanie dowolnych układów równań liniowych zgodnych nieoznaczonych i sprzecznych”.

Po przestudiowaniu działów: „Macierze” i „Układy równań liniowych”, osoba ucząca się powinna rozwiązać test zawierający pytania dotyczące zagadnień z obu tych działów. Tym razem na jego rozwiązanie przeznaczono 60 minut. Zadania występujące w tym teście są zadaniami typu prawda-falsz. Minimalna ilość punktów do zdobycia wynosi 75. W razie uzyskania niewystarczającej liczby punktów uczący się jest odsyłany do ponownego przeanalizowania wszystkich działów obejmujących pytania testowe.

Kolejny dział to: „Zastosowania algebry”. Została w nim zamieszczona lekcja szósta zatytułowana „Model Leontiefa”. Na zapoznanie się z treścią tej lekcji przewidziano 1 godzinę zegarową. Na wstępie zamieszczono materiały tekstowe, a następnie animację z przykładem ekonomicznym.

Ponieważ, jak zostało to już wspomniane wcześniej, model Leontiefa jest omawiany jedynie jako przykładowe zastosowanie zagadnień algebry omówionych w lekcjach od 1 do 5, więc nie podano żadnych zadań do samodzielnego rozwiązania.

W tym dziale zrealizowano również lekcję siódmą pod tytułem „KMNK”. Również tutaj na realizację przeznaczono 1 godzinę zegarową. Lekcja ta zawiera materiały w formie tekstowej oraz zadanie do rozwiązania z grupą. Podano również literaturę pomocną do rozwiązania podanego zadania.

Jako ostatnia została przedstawiona lekcja ósma zatytułowana „Programowanie liniowe”. Na jej realizację przewiduje się 2 godziny zegarowe. Na początku, tak jak we wszystkich pozostałych lekcjach, zamieszczono materiały tekstowe, a także animację zawierającą przykład ekonomiczny. Podano również literaturę uzupełniającą. Na końcu zamieszczono zadania do samodzielnego rozwiązania wraz z poprawnymi odpowiedziami.

Na realizację całego kursu przewidziano łącznie 30 godzin zegarowych. Na spotkania z wykładownicą przeznaczono 12 godzin zegarowych, natomiast na zapoznanie się z materiałami dydaktycznymi – 15 godzin. Ze względu na indywidualne tempo nauki oraz możliwość nieograniczonego czasowo rozwiązywania dwóch testów przewidziano 3-godzinny zapas czasowy [9].

Do wykonania powyższych elektronicznych materiałów dydaktycznych zastosowano program Lectora Profesional firmy Trivantis. Jest to kompleksowe narzędzie do tworzenia elektronicznych materiałów dydaktycznych. Do wykonania animacji zastosowano program Flash firmy Adobe.

## Zakończenie

Celem pracy było zaprezentowanie projektu wykonania i realizacji szkolenia mieszanego nauczania matematyki na przykładzie szkolenia z elementów algebry liniowej. W opracowaniu przedstawiono pewne podstawy psychologii i dydaktyki wykorzystywane w nauczaniu tradycyjnym i ich próbę adaptacji do szkoleń elektronicznych. Szkolenia elektroniczne mogą być elementem uzupełniającym w nauczaniu tradycyjnym w przypadkach, gdy rzeczywiste uczestnictwo w zajęciach jest utrudnione (praca za granicą, absencja chorobowa, niepełnosprawność itp.). Jednak kontakt z najlepszym komputerem nie zastąpi dobrego wykładowcy i jego bezpośredniego wpływu na osobowość osoby szkolonej. Niemniej świat zmierza do jak najlepszego przybliżenia komputera do wzoru wykładowcy – prowadzącego szkolenie. Powyższe opracowanie jest niewielką próbą podejścia do tego zagadnienia.

## Literatura

1. Birch A., Malim T.: *Psychologia rozwojowa w zarysie – od niemowlęstwa do dorosłości*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1995.
2. Hyla M.: *Przewodnik po E-learningu*. ABC, Kraków 2007.
3. Krygowska Z.: *Zarys dydaktyki matematyki*. Tom II. Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1979.
4. *Nauczanie na odległość – nowa szansa dla edukacji*. Red. E. Okoń-Horodyńska. WSZiNS, Tychy 1999.
5. Nowak W.: *Konservatorium z dydaktyki matematyki*. PWN, Warszawa 1989.
6. Okoń W.: *Wprowadzenie do dydaktyki ogólnej*. Żak, Warszawa 2003.
7. *Polska w drodze do globalnego społeczeństwa informacyjnego*. Materiały konferencyjne, Warszawa 2002.
8. Pólturzycki J.: *Dydaktyka dla nauczycieli*. Novum, Płock 2002.
9. Salota K.: *E-learning – notatki szefa projektu*. [www.haker.pl](http://www.haker.pl)
10. Stecyk A.: *Abc eLearningu system LAMS*. Difin, Warszawa 2008.

## THE PROJECT OF TRAINING IN MATHEMATICS BLENDED TEACHING FOR THE ECONOMIC UNIVERSITIES

### Summary

The e-learning courses are the future for the Polish economic university education. Therefore, it is important to build effective electronic materials for every subject taught. Mathematics is a difficult subject to study, so the electronic materials for this subject must be prepared taking into account the psychological and didactic elements of this subject.

The main goal of this article has been the presentation of the project on The Training in Mathematics Blended Teaching for the Economic Universities. The paper describes the distance learning courses, the electronic and blended learning courses. It also shows the elements of psychology of learning and didactics of mathematics used in the project.

**Henryk Gurgul**  
**Paweł Majdosz**  
**Stanisław Mysza**

# **MODEL PROGNOZ ZŁOŻONYCH W PRZEDSIĘBIORSTWIE BRANŻY CERAMIKI SANITARNEJ**

## **Wprowadzenie**

W zarządzaniu przedsiębiorstwem szczególnie ważną rolę odgrywają prognozy sprzedaży. Stanowią podstawę podejmowania decyzji w zakresie produkcji, zaopatrzenia, zapasów, finansów, siły roboczej itp. Prawidłowe, tj. odpowiadające potrzebom rynku, zaplanowanie wielkości sprzedaży i wynikającej stąd wielkości produkcji jest dla przedsiębiorstwa sprawą niezmiernie ważną. Skutki błędnego zaplanowania tych wielkości mogą być bardzo poważne.

Gdy rynek okaże się bardziej chłonny, niż to założono w planie produkcji na podstawie zbudowanej prognozy sprzedaży, przedsiębiorstwo może nie zdołać zaspokoić potrzeb swoich klientów, zamówienia na produkty lub usługi przedsiębiorstwa będą realizowane z opóźnieniem, wzrośnie niezadowolenie klientów. Ponadto szybka realizacja nieplanowanych zamówień powoduje wzrost kosztów robocizny (nadgodziny) i trudne do przewidzenia koszty przezbierania maszyn i urządzeń. Może to doprowadzić do sytuacji, w której część klientów zacznie zaspokajać swoje potrzeby u innych producentów. W przedsiębiorstwie powstaną tzw. koszty utraconych możliwości. W rezultacie przedsiębiorstwo może stracić swoją pozycję na rynku.

Jeśli zaś rynek okaże się mniej chłonny, niż przewidywano na podstawie prognozy sprzedaży, przedsiębiorstwo może mieć kłopoty ze zbytem produkcji. Wpłynię to – m.in. poprzez nieplanowany wzrost zapasów – na zwiększenie kosztów ich magazynowania. Zamrożenie kapitału obrotowego w zapasach nie-

sprzedanych wyrobów gotowych wpłynię na pogorszenie sytuacji finansowej przedsiębiorstwa, a jeżeli przedsiębiorstwo finansowało swoje potrzeby ze źródeł zewnętrznych, konsekwencje mogą być znacznie poważniejsze.

Specyfika produkcji ceramiki sanitarnej określa potrzeby w zakresie prognozowania sprzedaży poszczególnych grup asortymentowych. Produkcja ta cechuje się dużą bezwładnością, jeśli chodzi o zmiany w produkowanych asortymentach. Częsta zmiana produkowanych asortymentów, dostosowująca asortyment do nagłych potrzeb rynku, jest tu niemal niemożliwa. Ograniczenia wprowadzają dwa etapy procesu produkcyjnego ceramiki sanitarnej: wydział odlewni i wydział modelarni. Odlewianie wyrobów sanitarnych polega na zalewaniu wcześniej przygotowanej formy masą (zawiesiną) lejną. Formy mogą być wykonane z gipsu – wtedy mamy do czynienia z odlewaniem tradycyjnym, lub z tworzywa sztucznego porowatego, które są stosowane do odlewania ciśnieniowego. Wynika stąd, że w określonym czasie rodzaj produkowanych wyrobów zależy od rodzaju form zainstalowanych na odlewni i od ewentualnego zapasu tych form przygotowanych do zainstalowania.

Istotne ogniwo procesu technologicznego stanowi wydział modelarni, gdzie szczególnym problemem przy planowaniu produkcji jest plan produkcji gipsowych form odlewniczych. Należy nadmienić, że z ekonomicznego punktu widzenia forma gipsowa po zainstalowaniu na tzw. ławach odlewniczych powinna być eksploatowana aż do jej całkowitego zużycia. Jej zbyt wczesny demontaż wywołuje wiele przerw technologicznych na odlewni oraz najczęściej powoduje zniszczenie niewykorzystanej do końca formy. Czas produkcji formy gipsowej (15 do 25 dni) i jej cykl życia (80 do 120 odlewów) oraz zdolność produkcyjna modelarni są znane w warunkach konkretnego przedsiębiorstwa branży ceramiki sanitarnej. Do sprawnego sterowania procesem produkcyjnym brakuje więc tylko wiarygodnej prognozy sprzedaży, którą można by się kierować przy planowaniu produkcji.

W niniejszym opracowaniu przedstawiono metodykę prognozowania wielkości sprzedaży przedsiębiorstwa branży ceramiki sanitarnej, wykorzystującą trzy różne źródła informacji: historyczną sprzedaż, prognozy działu marketingu oraz prognozy przygotowywane na podstawie złożonych zamówień. Dokonano oceny zbudowanych prognoz zarówno pod kątem ich dokładności, jak i korzyści finansowych dla przedsiębiorstwa. Porównano, w szczególności, dokładność prognoz zbudowanych na podstawie modeli złożonych z dotychczas stosowanymi w badanym przedsiębiorstwie rozwiązaniami, tj. prognozami formułowanymi przez dział marketingu z wykorzystaniem metod o charakterze jakościowym. W części drugiej dokonano charakterystyki próby badawczej, ze szczególnym uwzględnieniem sposobu gromadzenia danych i agregacji, co wy-

nika ze specyfiki badanego przedsiębiorstwa. Przedstawiono też etapy budowy prognoz sprzedaży dla wyróżnionych grup asortymentowych. Część trzecia zawiera wyniki empiryczne ilustrujące przydatność poszczególnych rozwiązań w ramach badanego przedsiębiorstwa. Ostatnia – czwarta – część zawiera krótkie podsumowanie i wnioski.

## **1. Przygotowanie badania**

### **1.1. Dane**

W rozważanym przedsiębiorstwie nie istniał dotąd spójny system gromadzenia i przechowywania danych dotyczących sprzedaży w formie elektronicznej. Dokumentacja źródłowa była głównie przechowywana w formie papierowej. W pierwszym etapie badań skoncentrowano się zatem na przygotowaniu właściwej bazy danych obejmującej szeregi czasowe wartości sprzedaży dla odpowiednio zagregowanych grup asortymentów. Należy podkreślić, że proces pozyskiwania i agregacji danych był przede wszystkim podporządkowany celom realizowanym w przedsiębiorstwie w zakresie prognozowania wielkości sprzedaży. W szczególności, aby prognoza wielkości sprzedaży konkretnego wyboru była przydatna na etapie budowy planów produkcji, należy identyfikować te spośród wyrobów, które mogą być wykonywane na formie odlewniczej o tym samym kształcie.

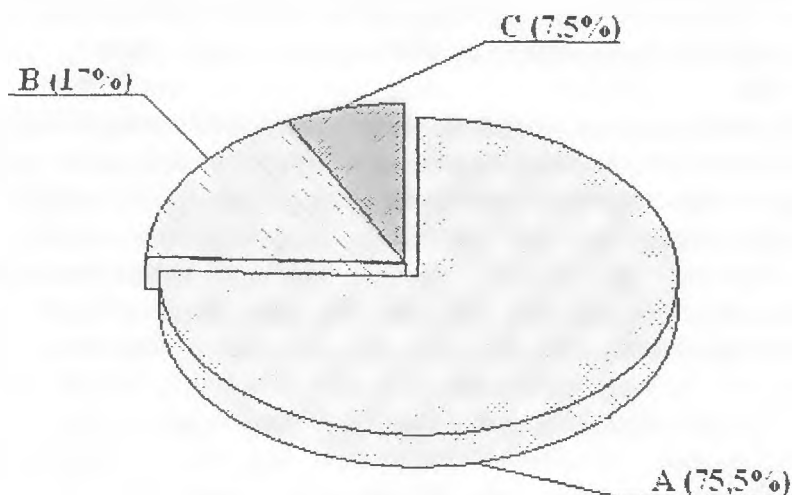
W praktyce modelowania wielkości sprzedaży należy się liczyć z niebezpieczeństwem zakłócenia wyników błędami występującymi w szeregach danych. Błędy te najczęściej mają charakter losowy i są konsekwencją pomyłek bądź to przy zbieraniu danych, bądź w trakcie ich komputerowego przetwarzania. Nie można jednak zupełnie wykluczyć celowego fałszowania danych, dlatego też konieczna jest formalna i merytoryczna kontrola poprawności danych, polegająca na wrywkowym sprawdzeniu ich rzetelności oraz porównaniu danych powiązanych ze sobą w celu ustalania stopnia zgodności.

W wybranym przedsiębiorstwie w okresie objętym badaniem produkowano około 250 rodzajów wyrobów. W wyniku analizy specyficznych cech asortymentów, w szczególności pod kątem realizowanego procesu technologicznego, wyodrębniono 39 grup asortymentowych, na które składało się od kilku do kilkunastu wyrobów. Grupowanie przeprowadzono na podstawie danych tygodniowych w zakresie wielkości oraz wartości sprzedaży za okres trzech lat działalności przedsiębiorstwa, tj. od stycznia 2001 do grudnia 2003 roku. Szeregi czasowe sprzedaży przeciętnie obejmowały 156 obserwacji.

Dla każdej z wyróżnionych grup asortymentowych ustalono następnie liczbę zamówień złożonych w poszczególnych tygodniach badanego okresu. Podstawą było w tym wypadku archiwum zamówień (przechowywane w formie papierowej) złożonych w latach 2001-2003, którego rzetelność została potwierdzona przez kierownictwo firmy i uzasadniona stosowaniem ścisłych procedur w zakresie rejestracji i archiwizowania zamówień w ramach stosowanego w przedsiębiorstwie systemu zarządzania opartego na normie ISO 9001.

Zdroworozsądkowe rozumowanie każe domniemywać, że między udziałem określonego asortymentu (grupy asortymentowej) w całkowitej marży brutto osiąganey przez przedsiębiorstwo w pewnym okresie a intensywnością zabiegów kierownictwa tego przedsiębiorstwa o możliwie ścisłe prognozowanie tej kategorii wyrobów będzie istnieć zależność dodatnia. Na podstawie wywiadu wewnątrz przedsiębiorstwa ustalono potrzeby kierownictwa w zakresie dokładności (trafności) prognozowania wielkości sprzedaży poszczególnych grup asortymentowych, utworzonych z wyrobów ceramiki sanitarnej produkowanych w przedsiębiorstwie. Stwierdzono też, że otrzymanie prognoz charakteryzujących się lepszą dokładnością w porównaniu do stosowanych dotąd w przedsiębiorstwie jakościowych metod prognozowania wielkości sprzedaży będzie przez kierownictwo firmy uważane za sukces. Kierownictwo przedsiębiorstwa było szczególnie zainteresowane finansowym aspektem ulepszenia systemu prognozowania wielkości sprzedaży w drodze mariażu stosowanego dotąd prognozowania jakościowego i ilościowej ekstrapolacji z wykorzystaniem historycznej wielkości sprzedaży zanotowanej w okresach przeszłych.

W wyniku zastosowania kryterium globalnej marży brutto, każda z wyróżnionych grup asortymentowych została zakwalifikowana do jednej z trzech kategorii, którym – w relacji do ich ważności – nadano oznaczenia literowe A, B i C. Literą A zostały oznaczone te spośród grup asortymentowych, których udział w globalnej marży brutto przekraczał 3%. Są to zatem albo wyroby sprzedawane w dużej ilości, albo wyroby o wysokiej jednostkowej marży pokrycia, albo wyroby spełniające jednocześnie oba warunki. Asortymenty kategorii B to produkty wytwarzane i sprzedawane wprawdzie w mniejszej ilości i o niższej marży pokrycia, lecz stanowiące istotne dopełnienie produkowanego asortymentu. Kategoria C składa się natomiast z wyrobów produkowanych w niewielkiej ilości lub na których uzyskuje się niewielką jednostkową marżę pokrycia. W załączniku (patrz tabela A.1) przedstawiono globalną marżę brutto dla poszczególnych grup asortymentowych, z podziałem na wyroby kategorii A, B i C. Struktura globalnej marży pokrycia według wyróżnionych kategorii wyrobów została zilustrowana na rysunku 1.



Rys. 1. Struktura globalnej marży pokrycia według wyróżnionych kategorii wyrobów

Można zauważyć, że znana w literaturze przedmiotu tzw. reguła Pareto znajduje potwierdzenie także w wypadku badanego przedsiębiorstwa. Wspomniana wyżej reguła formułuje wskazówkę dla kierownictwa przedsiębiorstwa, zgodnie z którą cztery piąte efektów jest generowane przez jedną piątą przyczyn. W badanym przedsiębiorstwie wyroby zaliczane do kategorii A (około 25% produkowanych wyrobów) generują ponad 75% całkowitej marży pokrycia.

Z uwagi na fakt, że w portfolio wyrobów produkowanych przez badane przedsiębiorstwo znajdowały się i takie, które były wytwarzane krócej niż rok, zdecydowano się na zróżnicowanie metodyki prognozowania. W odniesieniu do pięciu grup asortymentowych będących w sprzedaży przez okres krótszy niż rok stosowano zasadę, że poziom sprzedaży w tygodniu  $t$  będzie równy sprzedaży obserwowanej w tygodniu  $t-1$ . W wypadku tej grupy wyrobów niemożliwe było bowiem zastosowanie alternatywnych modeli ekonometrycznych, z reguły wymagających szeregów o długości przekraczającej 50 obserwacji.

## 1.2. Metodyka

W odniesieniu do każdej z wyróżnionych grup asortymentowych rozważono możliwość zastosowania do opisu szeregu czasowego sprzedaży alternatyw-

nych modeli należących do pięciu różnych klas, a mianowicie: trendów ze zmienną syntetyczną reprezentującą upływ czasu, modeli ARIMA ze stałą i zmienną w czasie wariancją, przełącznikowych modeli łańcuchów Markowa oraz modeli SETAR.

W grupie klasycznych modeli trendu rozważano zastosowanie trendu liniowego oraz kwadratowego. Zrezygnowano natomiast z prób opisu szeregow sprzedaży wyrobów badanego przedsiębiorstwa za pomocą wielomianów wyższych stopni oraz innych modeli tendencji rozwojowej, takich jak trend logistyczny czy trend wykładniczy, ponieważ ogląd zachowania się sprzedaży względem czasu nie pozostawiał wątpliwości co do słuszności tej decyzji.

Model ARIMA zyskał sobie wielką popularność, od kiedy Box i Jenkins zaproponowali tę metodologię blisko trzydzieści lat temu [5]. Praktyczne zastosowanie modelu ARIMA poprzedza etap jego identyfikacji, w trakcie którego badacz, na podstawie odpowiednich przesłanek, decyduje o wyborze konkretnej parametryzacji modelu. Aby to zilustrować, rozważmy ogólny model  $ARIMA(p,d,q)$  dla szeregu czasowego  $z_t$ , który wyraża się równaniem:

$$\phi_p(B)(1-B)^d z_t = \theta_0 + \theta_q(B)\varepsilon_t, \quad (1)$$

gdzie  $\phi_p(B) := 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$ ,  $\theta_q(B) := 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$ , przy czym  $Bz_t := z_{t-1}$ ,  $B$  jest operatorem przesunięcia (ang. backspace operator), zaś  $\varepsilon_t$  – białym szumem.

Parametryzacja modelu ARIMA rozpoczyna się od wyznaczenia funkcji autokorelacji ACF oraz funkcji autokorelacji cząstkowej PACF dla oryginalnego szeregu danych. Jeżeli uogólniony test Dickeya-Fullera [6] lub test Phillipsa-Perrona [14] świadczą o istnieniu pierwiastków jednostkowych (integracja szeregu stopnia  $d > 0$ ), konieczne jest uprzednie  $d$ -krotne różnicowanie szeregu w celu osiągnięcia jego stacjonarności. Następnie ustala się wartość  $p$  (liczba parametrów autoregresyjnych) oraz  $q$  (liczba parametrów średniej ruchomej). W tym celu rzeczywiste przebiegi funkcji ACF oraz PACF są porównywane z przebiegami teoretycznymi, których opis można znaleźć m.in. w pracy [10].

Często może się również zdarzyć, że faktycznego przebiegu funkcji ACF i PACF nie można jednoznacznie zakwalifikować jako odpowiadającego któremuś z teoretycznych schematów zachowania. W takich wypadkach pomocna może się okazać znajomość wartości wybranego kryterium informacyjnego, np. kryterium Akaike (AIC) lub Schwarza-Bayesa (SBIC). Oba kryteria pozwalają dokonać wyboru pomiędzy alternatywnymi parametryzacjami modelu ARIMA, mając na względzie z jednej strony adekwatność modelu względem oryginalnego szeregu danych, z drugiej zaś – oszczędność modelu, która wyraża się możliwie najmniejszą liczbą parametrów do oszacowania.

Duża popularność modeli klasy ARIMA wynika również i stąd, że uprzednio stosowane modele, takie jak model błędzenia losowego z dryfem oraz model wygładzania wykładniczego, często wybierane przez praktyków jako podstawowe narzędzie prognostyczne ze względu na swą prostotę i łatwość zastosowania, są szczególnymi parametryzacjami w ramach ogólnego modelu ARIMA.

Uogólnieniem metodologii zaproponowanej przez Boxa i Jenkinsa jest model uchylający założenie o stałości wariancji składnika losowego w czasie. Realizuje się to najczęściej poprzez wyrażenie funkcji warunkowej wariancji w postaci liniowej kombinacji opóźnionych wartości kwadratów składnika losowego (model ARCH) i opóźnionych wartości wariancji (model GARCH). Model ARIMA ze zmienną w czasie wariancją składnika losowego wyraża się równaniem:

$$\begin{aligned}\phi_p(B)(1-B)^d z_t &= \theta_0 + \theta_q(B)\varepsilon_t, \varepsilon_t \sim (0, \sigma_t^2), \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_q(B)\varepsilon_t^2 + \beta_p(B)\sigma_t^2.\end{aligned}\quad (2)$$

Od kiedy Engle po raz pierwszy zaproponował model ARCH [7], który następnie został uogólniony do procesu GARCH przez Bollersleva [1; 2], stworzono wiele odmian tego modelu, nierzadko bardzo skomplikowanych w warstwie teoretycznej, które pozwalają uwzględnić wiele dodatkowych własności ekonomicznych szeregów czasowych (por. [4; 3; 7]). Mimo dostępności skomplikowanych narzędzi, relatywnie prosta parametryzacja GARCH(1,1) cieszy się ciągle dużą popularnością, szczególnie w praktycznych zastosowaniach. Z tego też względu wydaje się, że wykorzystanie wspomnianej wyżej parametryzacji w modelowaniu szeregów sprzedaży wyrobów badanego przedsiębiorstwa jest w pełni wystarczającym rozwiązaniem zarówno z teoretycznego punktu widzenia, jak i potrzeb praktyki gospodarczej.

Przełącznikowe modele łańcuchów Markowa to jedna z klas modeli niestacjonarnych procesów stochastycznych. Modele te znajdują zastosowanie w modelowaniu szeregów ekonomicznych szczególnie wówczas, gdy rozkłady odpowiednich zmiennych wykazują silną asymetrię oraz duże prawdopodobieństwo wystąpienia obserwacji nietypowej bądź też zasadne jest przyjęcie hipotezy, że są one mieszkankami rozkładów. W ogólnym zapisie przełącznikowe modele Markowa wyrażają się wzorem:

$$y_t = \begin{cases} z_{1t} & \text{gdy } s_t = 1 \\ z_{2t} & \text{gdy } s_t = 2 \\ \vdots & \\ z_{kt} & \text{gdy } s_t = k \end{cases} \quad (3)$$

gdzie  $s_t$  jest realizacją jednorodnego łańcucha Markowa  $S_t$  o  $k$  stanach zadanego macierzą przejścia  $\mathbf{P} = [p_{ij}]_{k \times k}$ .

Biorąc pod uwagę heterogeniczność klientów firmy produkującej wyroby ceramiki sanitarnej, przyjęcie założenia, że szereg sprzedaży pochodzi w istocie z mieszanek indywidualnych rozkładów poszczególnych grup klientów, wydaje się być w pełni uzasadnione. Za hipotezą tą przemawia dodatkowo fakt, że rozkład tygodniowej sprzedaży wyrobów odznacza się silną asymetrią oraz tzw. grubymi ogonami (skrajne wielkości sprzedaży realizują się częściej, niż w wypadku obowiązywania rozkładu normalnego). Na podstawie analizy działu marketingu, wśród klientów badanego przedsiębiorstwa wyróżniono dwie kluczowe grupy, a mianowicie klientów krajowych i zagranicznych. Szczegółowa analiza wykazała, że w ramach każdej z wyróżnionych grup klientów inna jest wielkość popytu odtworzeniowego. Dlatego też zdecydowano się opisać proces tygodniowej sprzedaży wyrobów przedsiębiorstwa dwustanowym modelem łańcuchów Markowa. Model ten wyraża się równaniem:

$$\begin{aligned} z_t &= \alpha_0 + \alpha_{11}z_{t-1} + \varepsilon_t & \text{gdy } s_t = 1 & & \varepsilon_t \sim N(0, \sigma) \\ z_t &= \alpha_0 + \alpha_{21}z_{t-1} + \varepsilon_t & \text{gdy } s_t = 2 & & \varepsilon_t \sim N(0, \sigma) \end{aligned} \quad (4)$$

Założono dodatkowo, że  $\alpha_{11} > \alpha_{21}$ .

Zmienna  $S_t$  przyjmuje wartość 1, gdy znajdujemy się w reżimie (stanie) wysokiego popytu odtworzeniowego, oraz wartość 2, gdy znajdujemy się w reżimie niskiego popytu odtworzeniowego. Zmienna  $S_t$  nie jest bezpośrednio obserwowalna, a jej wartość w chwili  $t$  zależy tylko i wyłącznie od jej wartości w chwili  $t-1$ . Dlatego stany łańcucha Markowa są opisane następującymi prawdopodobieństwami przejścia:

$$\begin{aligned} P(S_t = 1 | S_{t-1} = 1) &= p_{11}, \\ P(S_t = 1 | S_{t-1} = 2) &= p_{12} = 1 - p_{11}, \\ P(S_t = 2 | S_{t-1} = 1) &= p_{21} = 1 - p_{22}, \\ P(S_t = 2 | S_{t-1} = 2) &= p_{22}, \end{aligned}$$

gdzie  $p_{ij}$  jest prawdopodobieństwem przebywania procesu w reżimie  $j$  w okresie  $t$ , jeżeli w okresie  $t-1$  proces przebywał w reżimie  $i$ .

Zaproponowany model wymaga oszacowania sześciu parametrów ( $\alpha_0$ ,  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{21}$ ,  $\sigma$ ,  $p_{11}$  i  $p_{22}$ ). Wyczerpujący opis procedury estymacyjnej przełącznikowych modeli łańcuchów Markowa można znaleźć w pracy [11].

Ostatni z rozważanych modeli ekonometrycznych należy do klasy modeli progowych. O przełączeniu z jednego reżimu w drugi nie decyduje, tak jak było to w wypadku modeli Markowa, nieobserwowalna zmienna  $S_t$ , lecz poziom zjawiska  $z_t$ . Model SETAR rzędu  $(p, k_1, \dots, k_p)$  wyraża się równaniem:

$$z_t = \begin{cases} \alpha_0^1 + \alpha_1^1 z_{t-1} + \dots + \alpha_{k_1}^1 z_{t-k_1} + h^1 \varepsilon_t & \text{gdy } z_{t-d} \leq r_1 \\ \alpha_0^2 + \alpha_1^2 z_{t-1} + \dots + \alpha_{k_2}^2 z_{t-k_2} + h^2 \varepsilon_t & \text{gdy } r_1 < z_{t-d} \leq r_2 \\ \vdots & \\ \alpha_0^p + \alpha_1^p z_{t-1} + \dots + \alpha_{k_p}^p z_{t-k_p} + h^p \varepsilon_t & \text{gdy } z_{t-d} > r_{p-1} \end{cases} \quad (5)$$

Na podstawie wyników wstępnych analiz szeregów czasowych sprzedaży wyrobów badanego przedsiębiorstwa podjęto decyzję o ograniczeniu rzędu modelu SETAR do dwóch ( $p=2$ ). Model ten można wówczas zapisać w prostej postaci jako:

$$z_t = \begin{cases} \alpha_{10} + \alpha_{11} z_{t-1} + \varepsilon_{1t} & \text{gdy } z_{t-1} \leq r \\ \alpha_{20} + \alpha_{21} z_{t-1} + \varepsilon_{2t} & \text{gdy } z_{t-1} > r \end{cases} \quad (6)$$

Dodatkowe informacje na temat estymacji modelu (6) można znaleźć w pracy [13].

Na wstępie badania okres próby został podzielony na dwie części, a mianowicie okres estymacyjny (przeciętnie 156 obserwacji) oraz okres testowy (13 najnowszych obserwacji). Następnie w odniesieniu do każdego z szeregów zweryfikowano hipotezę o istnieniu pierwiastka jednostkowego z użyciem uogólnionego testu Dickeya-Fullera. O wyborze pomiędzy np. modelem trendu liniowego i modelem ARIMA( $p, d, q$ ) decydowała wartość kryterium informacyjnego AIC oraz dodatkowe przesłanki, takie jak poprawna struktura stochastyczna modelu. Statystyczna istotność parametrów każdego z modeli została zweryfikowana za pomocą klasycznego testu opartego na statystyce  $t$ -Studenta. Badaniu poddano również statystyczne własności reszt, a w szczególności zweryfikowano hipotezę o niewystępowaniu efektu ARCH (z użyciem testu Engla) oraz braku autokorelacji składnika losowego (z użyciem testu Ljunga-Boxa o 15 opóźnieniach).

Stosując przedstawione wyżej kryteria, szeregi sprzedaży wyrobów badanego przedsiębiorstwa opisano z wykorzystaniem ośmiu różnych modeli, a mianowicie: trendu liniowego – w jedenastu wypadkach, trendu kwadratowego – w jednym wypadku,  $ARIMA(0,0,0)$  – w trzynastu wypadkach,  $ARIMA(1,0,0)$  – w dwóch wypadkach,  $ARIMA(1,0,1)$  – w dwóch wypadkach,  $ARIMA(1,0,1)$ – $GARCH(1,1)$  w trzynastu wypadkach,  $ARIMA(2,0,2)$ – $GARCH(1,1)$  – w jednym wypadku (tabela A.2 w załączniku zawiera oszacowane modele oraz wartości statystyk testowych w testach ARCH oraz Ljunga-Boxa, a także odpowiadające im prawdopodobieństwo krytyczne dla grup asortymentowych zakwalifikowanych do kategorii A).

Po zweryfikowaniu statystycznej istotności parametrów, ważnych z punktu widzenia własności prognostycznych modelu, oraz zbadaniu własności składnika losowego dokonano prognozy sprzedaży każdego z wyróżnionych asortymentów na trzynaście tygodni poza próbę estymacyjną.

W następnym etapie badania przystąpiono do konstrukcji prognoz złożonych. Modele prognoz złożonych są wykorzystywane w wielu obszarach, od prognozowania wartości sprzedaży w pojedynczym przedsiębiorstwie do prognoz wielkości makroekonomicznych, takich jak inflacja, dochód czy PKB (zob. np. [9; 12]). Model prognoz złożonych w ogólnej postaci wyraża się równaniem:

$$C_t = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_k f_k + \varepsilon_t, \quad (7)$$

gdzie  $C_t$  jest prognozą złożoną, zaś  $f_i$  ( $i=1, \dots, k$ ) są prognozami indywidualnymi.

W charakterze prognoz indywidualnych wykorzystano: prognozę uzyskaną na podstawie wybranego modelu ekonometrycznego, prognozę przygotowaną przez dział marketingu badanego przedsiębiorstwa oraz prognozę ekstrapolowaną z zamówień, które wpłynęły do zrealizowania w ostatnim kwartale. Włączenie do modelu prognoz złożonych zamówień wynika z doświadczeń kadry kierowniczej przedsiębiorstwa, które wskazują na dużą przydatność niezrealizowanych zamówień w procesie prognozowania wielkości sprzedaży.

Model (7) może być zatem zapisany jako:

$$C_t = \alpha_1 f_M + \alpha_2 f_{DM} + \alpha_3 f_Z + \varepsilon_t, \quad (8)$$

przy czym  $\alpha_i \geq 0, \forall i$  oraz  $\sum_{i=1}^3 \alpha_i = 1$ .

Estymację parametrów modelu (8) przeprowadzono dwuwariantowo (wyniki estymacji w grupach asortymentowych zakwalifikowanych do kategorii A

można znaleźć w tabeli A.3 w załączniku). W wariancie *A* funkcję straty zdefiniowano klasycznie, tj. jako sumę kwadratów reszt. Jednakże asymetria między kosztami zawyżonych i zaniżonych prognoz uzasadniała uwzględnienie jej bezpośrednio w równaniu minimalizowanej funkcji. Problem nie dotyczy zresztą tylko różnicy w kosztach zawyżonych i zaniżonych prognoz. Wyobraźmy sobie sytuację, że w okresie *t* prognoza przewyższa rzeczywistą wielkość sprzedaży o pewną wartość  $e_t$ . Ponieważ produkcja w normalnych warunkach zawsze odpowiada prognozie, wielkość  $e_t$  podlega magazynowaniu, generując określone koszty, które jest zmuszone ponosić przedsiębiorstwo. Jeżeli w okresie *t*+1 prognoza znowu jest zawyżona, to wielkość  $e_{t+1}$  – tak jak poprzednio – będzie stanowić przymusowe inwestycje przedsiębiorstwa w zapasy. Należy jednak zauważyć, że w okresie *t*+1 na całkowite koszty przedsiębiorstwa z tytułu zawyżonej prognozy składają się koszty związane z utrzymaniem  $e_t$  oraz  $e_{t+1}$ . Z tego też względu w wariancie *B* funkcja straty dla modelu (8) została zdefiniowana następująco:

$$\Psi = \sum_{t=1}^T (M_t jk_m + P_t jk_p), \quad (9)$$

gdzie  $jk_m$  oraz  $jk_p$  oznaczają jednostkowe koszty odpowiednio utrzymania przymusowego zapasu wyrobów gotowych i wyprodukowania wyrobu w stanie ponadplanowego obciążenia (produkcja powyżej ilości prognozowanej),  $M_t$  i  $P_t$  są zaś funkcjami zdefiniowanym następująco:

$$M_t = \begin{cases} M_t = -e_t + M_{t-1} & \text{gdy } e_t - M_{t-1} < 0 \\ M_t = 0 & \text{gdy } e_t - M_{t-1} \geq 0 \end{cases}$$

$$P_t = \begin{cases} P_t = e_t - M_{t-1} & \text{gdy } e_t - M_{t-1} > 0 \\ P_t = 0 & \text{gdy } e_t - M_{t-1} \leq 0 \end{cases}$$

oraz  $M_0 = 0$  i  $P_0 = 0$ .

## 2. Wyniki empiryczne

Prezentację wyników empirycznych rozpoczyna porównanie średniego absolutnego błędu procentowego (MAPE) dla poszczególnych modeli i metod pro-

gnozowania wartości sprzedaży badanego przedsiębiorstwa w okresie estymacyjnym i testowym (zob. tabele 1 i 2). Można zauważyć, że w okresie estymacyjnym, w wypadku 80% grup asortymentowych, wartość MAPE była niższa dla prognoz wyznaczonych z użyciem modeli prognoz złożonych (w obu wersjach) niż dla analogicznych prognoz opracowanych przez dział marketingu. W okresie testowym prognozy przygotowane przez dział marketingu badanego przedsiębiorstwa wypadły już nieco lepiej w porównaniu do prognoz modeli złożonych. Nadal jednak wartość MAPE była niższa w wypadku tego ostatniego dla 27 grup asortymentowych spośród 34 przebadanych.

W kolejnym etapie porównano przeciętne koszty całkowite przedsiębiorstwa z tytułu nietrafionej prognozy dla alternatywnych rozwiązań prognostycznych w ramach okresu estymacyjnego i testowego (zob. tabele 3 i 4). Pierwszym spostrzeżeniem są niższe średnie koszty tygodniowe w wypadku użycia modeli prognoz złożonych. Jak wynika z obliczeń, zastosowanie w badanym przedsiębiorstwie opisanego wyżej rozwiązania, opierającego się na modelu prognoz złożonych, pozwoliłoby na wygenerowanie oszczędności na poziomie około pięciu tysięcy trzystu złotych, średnio w każdym tygodniu działalności. Należy jednak pamiętać, że jest to wartość hipotetyczna, odnosi się bowiem do okresu estymacyjnego. Przewaga modeli prognoz złożonych (w ujęciu kosztowym) nad prognozami działu marketingu oraz prognozami budowanymi na podstawie zamówień jest, do pewnego stopnia, konsekwencją zastosowania w estymacji parametrów modeli złożonych kryterium minimalnych kosztów całkowitych. W okresie testowym modele te okazały się dużo gorsze, choć ciągle lepsze od prognoz formułowanych na bazie zamówień. Najlepiej wypadły natomiast prognozy budowane na podstawie odpowiednich modeli ekonometrycznych, będących częścią modelu złożonego. Należy jednak podkreślić, że różnice w kosztach całkowitych nietrafionych prognoz nie są w tym wypadku duże.

Tabela 1

## Porównanie MAPE w okresie estymacyjnym

| Kod grupy | Prognozy złożone: wariant A | Prognozy złożone: wariant B | Model | Dział marketingu | Zamówienia |
|-----------|-----------------------------|-----------------------------|-------|------------------|------------|
| 1         | 2                           | 3                           | 4     | 5                | 6          |
| K1        | 1,849                       | 1,849                       | 1,777 | 2,317            | 2,135      |
| K2        | 3,071                       | 3,118                       | 3,089 | 3,214            | 3,027      |
| U3        | 1,350                       | 1,409                       | 1,400 | 1,502            | 1,219      |

cd. tabeli 1

| 1   | 2      | 3      | 4      | 5      | 6       |
|-----|--------|--------|--------|--------|---------|
| U4  | 3,682  | 3,835  | 3,980  | 3,759  | 2,942   |
| P5  | 2,446  | 2,349  | 2,318  | 3,115  | 2,747   |
| P6  | 2,524  | 2,297  | 2,591  | 2,573  | 2,341   |
| P7  | 7,478  | 7,077  | 7,852  | 7,550  | 4,397   |
| M8  | 3,116  | 3,288  | 3,599  | 2,779  | 3,420   |
| B9  | 1,803  | 2,178  | 1,801  | 2,300  | 2,423   |
| K10 | 3,199  | 3,310  | 3,103  | 4,019  | 3,893   |
| K11 | 2,952  | 2,972  | 3,547  | 2,907  | 2,147   |
| U12 | 4,387  | 5,005  | 4,580  | 5,005  | 1,705   |
| U13 | 3,634  | 3,560  | 3,560  | 6,283  | 3,581   |
| U14 | 5,903  | 5,903  | 5,903  | 7,828  | 3,649   |
| N15 | 4,625  | 4,712  | 4,649  | 4,712  | 3,994   |
| N16 | 3,078  | 3,108  | 3,385  | 2,174  | 1,354   |
| N17 | 13,981 | 14,590 | 13,491 | 14,993 | 15,924  |
| N18 | 6,200  | 6,299  | 6,299  | 5,858  | 5,328   |
| N19 | 6,874  | 6,370  | 7,206  | 5,335  | 6,583   |
| N20 | 21,029 | 24,966 | 24,966 | 19,301 | 21,902  |
| K22 | 63,810 | 78,550 | 63,810 | 70,691 | 101,219 |
| K25 | 9,075  | 12,085 | 8,569  | 9,424  | 12,921  |
| U28 | 2,774  | 2,737  | 2,712  | 2,963  | 2,520   |
| B29 | 1,577  | 1,680  | 1,577  | 1,363  | 2,258   |
| K30 | 1,391  | 1,551  | 1,507  | 1,306  | 1,939   |
| K31 | 2,260  | 2,182  | 2,245  | 2,471  | 2,266   |
| P32 | 3,067  | 3,318  | 3,081  | 3,683  | 3,212   |
| P33 | 2,506  | 2,814  | 2,469  | 3,139  | 2,340   |
| U34 | 4,534  | 4,523  | 4,478  | 4,629  | 4,382   |
| U35 | 3,723  | 3,336  | 3,723  | 4,262  | 3,325   |
| B36 | 1,524  | 1,670  | 1,670  | 2,010  | 1,328   |
| M37 | 0,969  | 1,232  | 7,812  | 2,318  | 0,969   |
| M38 | 4,080  | 3,564  | 7,616  | 3,997  | 3,564   |
| M39 | 1,169  | 2,774  | 7,576  | 15,092 | 1,169   |

Tabela 2

## Porównanie MAPE w okresie testowym

| Kod grupy | Prognozy złożone:<br>wariant A | Prognozy złożone:<br>wariant B | Model  | Dział marketingu | Zamówienia |
|-----------|--------------------------------|--------------------------------|--------|------------------|------------|
| K1        | 1,236                          | 0,969                          | 1,361  | 2,359            | 0,571      |
| K2        | 1,580                          | 2,170                          | 0,714  | 2,887            | 0,482      |
| U3        | 0,926                          | 0,885                          | 1,092  | 0,963            | 1,024      |
| U4        | 0,905                          | 0,945                          | 0,971  | 0,919            | 0,923      |
| P5        | 0,720                          | 0,650                          | 0,717  | 0,850            | 0,528      |
| P6        | 0,464                          | 0,435                          | 0,400  | 0,537            | 0,569      |
| P7        | 2,682                          | 2,588                          | 3,232  | 2,224            | 0,584      |
| M8        | 1,278                          | 1,505                          | 2,368  | 0,619            | 0,761      |
| B9        | 0,640                          | 0,781                          | 0,643  | 1,511            | 1,048      |
| K10       | 0,411                          | 0,487                          | 0,410  | 1,284            | 0,745      |
| K11       | 2,675                          | 4,712                          | 2,754  | 6,878            | 0,912      |
| U12       | 0,802                          | 0,807                          | 0,884  | 0,807            | 0,490      |
| U13       | 42,546                         | 43,909                         | 43,909 | 51,885           | 31,247     |
| U14       | 3,857                          | 3,857                          | 3,857  | 4,869            | 0,843      |
| N15       | 0,697                          | 0,608                          | 0,723  | 0,608            | 0,546      |
| N16       | 0,649                          | 0,674                          | 0,650  | 0,642            | 0,892      |
| N17       | 0,977                          | 0,874                          | 1,071  | 0,832            | 0,805      |
| N18       | 0,761                          | 0,842                          | 0,842  | 0,389            | 0,603      |
| N19       | 0,975                          | 0,717                          | 1,058  | 0,630            | 0,637      |
| N20       | 14,967                         | 18,541                         | 18,541 | 13,413           | 4,396      |
| K22       | 0,383                          | 0,508                          | 0,383  | 0,367            | 0,918      |
| K25       | 0,516                          | 0,320                          | 0,522  | 0,567            | 0,354      |
| U28       | 2,284                          | 2,347                          | 1,985  | 3,050            | 1,436      |
| B29       | 1,679                          | 1,915                          | 1,679  | 1,426            | 2,716      |
| K30       | 0,980                          | 0,836                          | 0,814  | 1,140            | 0,689      |
| K31       | 1,820                          | 1,356                          | 1,795  | 2,205            | 0,486      |
| P32       | 1,305                          | 1,615                          | 1,265  | 1,432            | 2,118      |
| P33       | 0,718                          | 0,787                          | 0,714  | 0,859            | 0,525      |
| U34       | 0,858                          | 0,804                          | 0,851  | 0,868            | 0,666      |
| U35       | 2,768                          | 0,920                          | 2,768  | 2,437            | 0,852      |
| B36       | 0,448                          | 0,455                          | 0,455  | 0,825            | 0,485      |
| M37       | 0,952                          | 1,428                          | 14,162 | 2,907            | 0,952      |
| M38       | 4,875                          | 4,667                          | 6,948  | 2,984            | 4,667      |
| M39       | 0,534                          | 4,082                          | 11,771 | 32,923           | 0,534      |

Przyczyn tego stanu rzeczy może być oczywiście wiele. Wśród nich na szczególną uwagę zasługuje być może fakt, że okres testowy został wyodrębniony w taki sposób, iż zawiera najstarsze dostępne obserwacje. Należy oczekiwać, że prognozowaniu wartości sprzedaży towarzyszył w badanym przedsiębiorstwie proces samokształcenia i wzrost świadomości finansowych aspektów budowania prognoz w dziale marketingu. Ponadto, trzynastodniowy okres testowy wydaje się być dość krótki, szczególnie gdy porówna się go z okresem estymacyjnym, co może negatywnie wpływać na poprawność formułowanych wniosków. Przyjęta długość okresu testowego jest wynikiem kompromisu między zagwarantowaniem dostatecznej liczebności próby estymacyjnej z jednej strony a potrzebami wnioskowania o własnościach modelu na podstawie okresu testowego z drugiej strony.

Aby, mimo ograniczonej długości okresu testowego, formalnie sprawdzić, czy zastosowanie któregoś z alternatywnych rozwiązań prowadzi do istotnej redukcji kosztów, wykorzystano rangowy test Wilcozona. Hipotezę zerową sformulowano następująco:

Mediana przeciętnych kosztów tygodniowych w ramach modelu prognoz złożonych jest równa medianie przeciętnych kosztów tygodniowych w związku z zastosowaniem alternatywnych rozwiązań (tj. Model, Dział Marketingu oraz Zamówienia).

Hipotezę alternatywną stanowiło przypuszczenie, że:

Mediana przeciętnych kosztów tygodniowych w ramach modelu prognoz złożonych jest mniejsza niż w wypadku alternatywnych rozwiązań.

W toku analizy stwierdzono, że model prognoz złożonych okazał się lepszy (przyjęcie hipotezy alternatywnej) od modelu jednostkowego w wypadku ośmiu i trzech grup asortymentowych, odpowiednio dla wariantu *A* i *B*. Na tle prognoz działu marketingu i prognoz budowanych na podstawie zamówień, istotnie niższą medianę przeciętnych kosztów tygodniowych stwierdzono w blisko jednej trzeciej przebadanych grup asortymentowych. Na uwagę zasługuje dodatkowo fakt, że gdy ograniczymy zainteresowanie do dziewięciu najważniejszych grup asortymentowych, pozytywna ocena przydatności modeli prognoz złożonych zyskuje kolejne potwierdzenie.

Na zakończenie konieczne jest wyjaśnienie przyczyn wysokiej trafności prognoz działu marketingu w wypadku grupy asortymentowej oznaczonej symbolem K22. Wyrób oznaczony tym symbolem jest sprzedawany głównie na eksport do krajów byłego Związku Radzieckiego, głównie do Rosji. Pod koniec 2003 roku, a zatem w okresie testowym, sprzedaż na ten rynek ustabilizowała się, a prognozy opierały się na wiarygodnych deklaracjach partnera handlowego. Z łatwością można więc było przewidzieć moment zwiększonej aktywności po stronie zakupów, która tradycyjnie przypada na dwa ostatnie miesiące w roku.

Tabela 3

Porównanie przeciętnych kosztów nietrafionej prognozy w okresie estymacyjnym  
(w zł na jeden tydzień produkcji)

| Kod grupy      | Prognozy złożone:<br>wariant A | Prognozy złożone:<br>wariant B | Model           | Dział marketingu | Zamówienia      |
|----------------|--------------------------------|--------------------------------|-----------------|------------------|-----------------|
| K1             | 236,54                         | 129,28                         | 293,64          | 567,19           | 262,08          |
| K2             | 449,69                         | 562,08                         | 826,51          | 967,50           | 1 080,81        |
| U3             | 84,42                          | 94,88                          | 87,58           | 106,77           | 107,46          |
| U4             | 83,92                          | 88,54                          | 117,22          | 100,55           | 102,37          |
| P5             | 26,35                          | 21,98                          | 19,59           | 26,31            | 24,40           |
| P6             | 61,22                          | 44,88                          | 76,52           | 58,11            | 66,29           |
| P7             | 72,92                          | 57,63                          | 97,91           | 113,43           | 151,28          |
| M8             | 139,01                         | 87,49                          | 141,07          | 279,41           | 226,67          |
| B9             | 48,25                          | 22,06                          | 48,54           | 46,32            | 43,57           |
| K10            | 73,44                          | 54,27                          | 72,60           | 140,65           | 135,11          |
| K11            | 152,40                         | 120,41                         | 193,94          | 228,52           | 273,97          |
| U12            | 128,35                         | 150,49                         | 129,16          | 150,49           | 376,53          |
| U13            | 77,90                          | 77,43                          | 77,43           | 229,61           | 152,67          |
| U14            | 31,28                          | 31,28                          | 31,28           | 91,37            | 65,03           |
| N15            | 302,90                         | 323,77                         | 311,33          | 323,77           | 879,07          |
| N16            | 261,14                         | 232,77                         | 274,07          | 907,05           | 715,37          |
| N17            | 324,67                         | 242,88                         | 427,43          | 269,89           | 648,43          |
| N18            | 27,99                          | 18,70                          | 18,70           | 133,92           | 90,16           |
| N19            | 40,87                          | 45,48                          | 40,27           | 150,98           | 93,11           |
| N20            | 191,71                         | 133,50                         | 133,50          | 239,20           | 283,20          |
| K22            | 1 252,18                       | 1 019,36                       | 1 252,18        | 2 555,95         | 1 183,84        |
| K25            | 412,37                         | 212,56                         | 466,24          | 727,65           | 314,08          |
| U28            | 38,43                          | 26,75                          | 45,53           | 49,55            | 50,69           |
| B29            | 17,95                          | 16,09                          | 17,95           | 57,70            | 42,96           |
| K30            | 28,26                          | 13,36                          | 23,47           | 49,54            | 59,50           |
| K31            | 82,98                          | 62,49                          | 81,76           | 131,08           | 202,48          |
| P32            | 36,29                          | 43,22                          | 35,35           | 37,78            | 66,74           |
| P33            | 30,98                          | 38,18                          | 29,50           | 61,46            | 88,77           |
| U34            | 83,73                          | 71,33                          | 107,97          | 147,11           | 170,45          |
| U35            | 66,26                          | 38,08                          | 66,26           | 112,13           | 41,60           |
| B36            | 34,04                          | 30,19                          | 30,19           | 56,17            | 90,61           |
| M37            | 187,78                         | 151,54                         | 327,70          | 230,29           | 187,68          |
| M38            | 87,80                          | 67,52                          | 219,95          | 96,53            | 68,79           |
| M39            | 55,61                          | 22,41                          | 92,25           | 217,76           | 55,61           |
| <b>Łącznie</b> | <b>5 229,66</b>                | <b>4 352,89</b>                | <b>6 214,57</b> | <b>9 661,72</b>  | <b>8 401,38</b> |

Tabela 4

Porównanie przeciętnych kosztów nietrafionej prognozy w okresie testowym  
(w zł na jeden tydzień produkcji)

| Kod grupy | Prognozy złożone:<br>wariant A | Prognozy złożone:<br>wariant B | Model    | Dział marketingu | Zamówienia |
|-----------|--------------------------------|--------------------------------|----------|------------------|------------|
| K1        | 12,03                          | 18,28                          | 13,39    | 8,47             | 28,26      |
| K2        | 20,05                          | 29,90                          | 37,18    | 41,02            | 49,44      |
| U3        | 11,63                          | 12,23                          | 7,63     | 9,99             | 22,30      |
| U4        | 19,72                          | 17,44                          | 16,40    | 18,52            | 35,18      |
| P5        | 0,24                           | 0,16                           | 0,22     | 0,42             | 4,59       |
| P6        | 0,66                           | 6,97                           | 1,62     | 1,00             | 11,31      |
| P7        | 31,31                          | 32,88                          | 20,42    | 40,90            | 79,90      |
| M8        | 30,53                          | 28,78                          | 24,59    | 63,50            | 59,44      |
| B9        | 7,99                           | 3,41                           | 8,04     | 0,82             | 2,27       |
| K10       | 11,41                          | 14,34                          | 15,45    | 2,77             | 12,15      |
| K11       | 4,12                           | 4,10                           | 5,23     | 7,87             | 25,22      |
| U12       | 78,38                          | 85,14                          | 72,95    | 85,14            | 114,64     |
| U13       | 9,08                           | 6,99                           | 6,99     | 7,83             | 27,13      |
| U14       | 25,21                          | 25,21                          | 25,21    | 19,53            | 39,66      |
| N15       | 164,12                         | 229,69                         | 155,58   | 229,69           | 273,54     |
| N16       | 772,21                         | 718,05                         | 757,61   | 842,32           | 429,48     |
| N17       | 160,41                         | 230,13                         | 114,02   | 260,38           | 564,98     |
| N18       | 113,32                         | 122,08                         | 122,08   | 53,63            | 45,47      |
| N19       | 57,74                          | 94,18                          | 43,25    | 126,70           | 120,66     |
| N20       | 8,14                           | 4,75                           | 4,75     | 22,69            | 78,85      |
| K22       | 590,85                         | 793,25                         | 590,85   | 289,57           | 1 109,60   |
| K25       | 64,75                          | 147,01                         | 66,03    | 62,89            | 219,74     |
| U28       | 4,03                           | 3,11                           | 5,92     | 3,12             | 8,91       |
| B29       | 0,60                           | 1,14                           | 0,60     | 0,78             | 2,04       |
| K30       | 7,46                           | 7,04                           | 12,89    | 8,64             | 10,74      |
| K31       | 18,21                          | 24,97                          | 18,29    | 17,13            | 79,69      |
| P32       | 5,43                           | 3,31                           | 5,66     | 3,68             | 3,89       |
| P33       | 5,65                           | 3,96                           | 5,83     | 2,26             | 9,88       |
| U34       | 9,77                           | 9,63                           | 9,87     | 9,64             | 9,66       |
| U35       | 1,05                           | 6,15                           | 1,05     | 1,11             | 7,17       |
| B36       | 17,28                          | 16,78                          | 16,78    | 6,68             | 22,86      |
| M37       | 1,72                           | 1,31                           | 5,26     | 0,52             | 1,69       |
| M38       | 2,64                           | 3,20                           | 2,05     | 2,74             | 3,20       |
| M39       | 1,82                           | 0,67                           | 1,82     | 6,38             | 1,82       |
| Łącznie   | 2 269,58                       | 2 706,26                       | 2 195,51 | 2 258,31         | 3 515,37   |

## Wnioski

Celem niniejszego opracowania było empiryczne zweryfikowanie przydatności zastosowania modeli prognoz złożonych w przedsiębiorstwie branży ceramiki sanitarnej. Modele te uwzględniają oprócz prognoz uzyskanych na podstawie jednostkowych modeli ekonometrycznych także subiektywne prognozy działu marketingu i prognozy ekstrapolowane z zamówień (ze względu na zauważoną przez pracowników badanej firmy cykliczną zależność wielkości sprzedaży od złożonych w danym okresie zamówień).

Zaprezentowane wyniki empiryczne uprawniają do sformułowania następujących wniosków:

- modele złożone wydają się być dobrym narzędziem budowania krótkoterminowych prognoz sprzedaży wyrobów ceramiki sanitarnej ze względu na niski błąd prognozy i niskie koszty, które jest zmuszone ponosić przedsiębiorstwo z tytułu nietrafionej prognozy,

- zastosowanie w modelu prognoz złożonych kryterium maksymalnych korzyści finansowych, zamiast minimalizacji sumy kwadratów błędów, ujawniło jego dużą elastyczność, która polega na możliwości uwzględnienia bezpośrednio w modelu asymetrii między kosztami zawyżonej i zaniżonej prognozy.

Należy jednak zauważyć, że koszty zaniżonej i zawyżonej prognozy muszą być rozliczone na każdy z produktów podlegających prognozowaniu z osobna. Dodatkowo występują duże trudności dotyczące dokładnego oszacowania tego rodzaju kosztów.

## Załącznik

Tabela A.1

Globalne marże brutto dla grup asortymentowych

| Kod grupy asortymentowej | Globalna marża brutto (w zł) | Kategoria |
|--------------------------|------------------------------|-----------|
| K22                      | 3 260 281                    | A         |
| N17                      | 2 023 763                    |           |
| K2                       | 1 779 962                    |           |
| N15                      | 1 577 013                    |           |
| N16                      | 1 536 288                    |           |
| K25                      | 1 000 754                    |           |
| K1                       | 709 176                      |           |
| U12                      | 513 331                      |           |
| M8                       | 512 651                      | B         |
| K31                      | 462 174                      |           |
| K11                      | 429 952                      |           |
| N20                      | 381 148                      |           |
| K23                      | 298 481                      |           |
| U13                      | 234 726                      |           |
| N19                      | 195 896                      |           |
| K26                      | 187 147                      |           |
| K10                      | 167 649                      |           |
| P7                       | 158 580                      |           |
| U3                       | 135 100                      |           |
| M39                      | 134 289                      |           |
| M37                      | 125 480                      | C         |
| P6                       | 125 274                      |           |
| U34                      | 122 531                      |           |
| N18                      | 122 065                      |           |
| B36                      | 113 134                      |           |
| K30                      | 93 871                       |           |
| B9                       | 90 481                       |           |
| U4                       | 66 656                       |           |
| U11                      | 66 357                       |           |
| M38                      | 65 460                       |           |
| P32                      | 64 596                       |           |
| P33                      | 63 957                       |           |
| B29                      | 57 370                       |           |
| P5                       | 55 805                       |           |
| U28                      | 52 522                       |           |
| K24                      | 51 535                       |           |
| U35                      | 39 541                       |           |
| K21                      | 23 722                       |           |
| U27                      | 8 530                        |           |
| RAZEM                    | 17 107 247                   |           |

Tabela A.2

Wyniki estymacji modeli ekonometrycznych dla grup asortymentowych  
zakwalifikowanych do kategorii A

| Kod grupy | Model                                                                                                                                                                                                                                                | ARCH test                     | Ljung-Box test    |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|-------------------|
| K22       | $z_t = 81,070 + 0,862 z_{t-1} - 0,781 \varepsilon_{t-1}; \sigma^2 = 1,9 \times 10^5$<br>(68,871) <sup>a</sup> (0,124) (0,157)                                                                                                                        | 9,148<br>(0,870) <sup>b</sup> | 17,311<br>(0,301) |
| N17       | $z_t = 62,966 + 2,206 t; \sigma^2 = 6,07 \times 10^4$<br>(68,532) (0,668)                                                                                                                                                                            | 11,675<br>(0,703)             | 27,257<br>(0,027) |
| K2        | $z_t = 0,867 + 0,985 z_{t-1} - 0,898 \varepsilon_{t-1}$<br>(2,127) (0,019) (0,056)<br>$\sigma_t^2 = 0,000 + 0,050 \varepsilon_{t-1}^2 + 0,935 \sigma_{t-1}^2$<br>(0,000) (0,020) (0,022)                                                             | 5,385<br>(0,996)              | 22,123<br>(0,105) |
| N15       | $z_t = 182,844 + -2,106 t + 0,015 t^2; \sigma^2 = 7,80 \times 10^3$<br>(21,147) (0,694) (0,005)                                                                                                                                                      | 12,101<br>(0,671)             | 12,213<br>(0,663) |
| N16       | $z_t = 16,011 + 1,367 t; \sigma^2 = 4,32 \times 10^3$<br>(16,717) (0,208)                                                                                                                                                                            | 22,514<br>(0,095)             | 9,419<br>(0,855)  |
| K25       | $z_t = 101,526 + 3,612 t; \sigma^2 = 3,15 \times 10^4$<br>(49,024) (1,136)                                                                                                                                                                           | 5,068<br>(0,992)              | 6,584<br>(0,968)  |
| K1        | $z_t = 2,435 + 0,381 z_{t-1} - 0,556 z_{t-2} - 0,326 \varepsilon_{t-1} - 0,673 \varepsilon_{t-2}$<br>(0,351) (0,130) (0,129) (0,118) (0,127)<br>$\sigma_t^2 = 88,026 + 0,296 \varepsilon_{t-1}^2 + 0,691 \sigma_{t-1}^2$<br>(80,253) (0,145) (0,124) | 21,925<br>(0,101)             | 10,980<br>(0,754) |
| U12       | $z_t = 141,543 + 0,588 t; \sigma^2 = 1,24 \times 10^4$<br>(24,152) (0,276)                                                                                                                                                                           | 15,237<br>(0,434)             | 10,746<br>(0,770) |
| M8        | $z_t = -0,688 + 1,037 z_{t-1} - 0,922 \varepsilon_{t-1}$<br>(1,592) (0,033) (0,041)<br>$\sigma_t^2 = 99,503 + 0,171 \varepsilon_{t-1}^2 + 0,829 \sigma_{t-1}^2$<br>(119,509) (0,072) (0,056)                                                         | 12,404<br>(0,641)             | 13,907<br>(0,533) |

<sup>a</sup> W nawiasach umieszczono błędy średnie szacunku odpowiednich parametrów.

<sup>b</sup> W nawiasach umieszczono prawdopodobieństwa krytyczne.

Tabela A.3

Wyniki estymacji modeli prognoz złożonych w grupach asortymentowych kategorii A

| Kod grupy | Funkcja straty:      |                  |            | Funkcja straty:                    |                  |            |
|-----------|----------------------|------------------|------------|------------------------------------|------------------|------------|
|           | suma kwadratów reszt |                  |            | strata przedsiębiorstwa według (9) |                  |            |
|           | model                | dział marketingu | zamówienia | model                              | dział marketingu | zamówienia |
| K22       | 1,000                | 0,000            | 0,000      | 0,605                              | 0,000            | 0,395      |
| N17       | 0,666                | 0,334            | 0,000      | 0,286                              | 0,667            | 0,047      |
| K2        | 0,151                | 0,523            | 0,326      | 0,000                              | 0,748            | 0,252      |
| N15       | 0,891                | 0,078            | 0,031      | 0,000                              | 1,000            | 0,000      |
| N16       | 0,770                | 0,219            | 0,011      | 0,882                              | 0,000            | 0,118      |
| K25       | 0,594                | 0,351            | 0,055      | 0,000                              | 0,211            | 0,789      |
| K1        | 0,756                | 0,082            | 0,162      | 0,663                              | 0,000            | 0,337      |
| U12       | 0,650                | 0,254            | 0,096      | 0,000                              | 1,000            | 0,000      |
| M8        | 0,428                | 0,572            | 0,000      | 0,552                              | 0,222            | 0,225      |

## Literatura

1. Bollerslev T.: *Generalised Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*. „Journal of Econometrics” 1986, 31, s. 307-327.
2. Bollerslev T.: *A Conditionally Heteroscedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return*. „Review of Economics and Statistics” 1987, 69, s. 542-546.
3. Bollerslev T.: *Modeling the Coherence in Short-run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH Approach*. „Review of Economics and Statistics” 1990, 72, s. 498-505.
4. Bollerslev T., Engle R.F., Wooldridge J.M.: *A Capital Assets Pricing Model with Time Varying Covariances*. „Journal of Political Economy” 1988, 96, s. 116-131.
5. Box G., Jenkins G.: *Analiza szeregów czasowych*. PWN, Warszawa 1983.
6. Charemza W.W., Deadman D.F.: *Nowa ekonometria*. PWE, Warszawa 1997.
7. Engle R.: *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*. „Econometrica” 1982, 50, s. 987-1008.

8. Engle R.F.: *Dynamic Conditional Correlation – A Simple Class of Multivariate GARCH Model*. „Journal of Business and Economic Statistics” 2002, 20, s. 339-350.
9. Grajek M.: *Combined Forecasts – Application for Poland*. W: *Modelling Economies in Transition*. Red. W. Welfe, P. Wdowiński. Proceeding of the Fourth International Conference, Łódź 2000.
10. Gurgul H., Mysza S., Syrek R.: *Modele wielkości sprzedaży ceramiki sanitarnej*. „Polish Academy of Sciences” 2004, 84, s. 247-255.
11. Hamilton J.D.: *Time Series Analysis*. Princeton University Press, 1994.
12. Moriarty M.M., Adams A.J.: *Management Judgment Forecasts, Composite Forecasting Models and Conditional Efficiency*. „Journal of Marketing Research” 1984, 21, s. 239-250.
13. Osińska M., Witkowski M.: *Zastosowanie modeli progowych do analizy finansowych szeregów czasowych*. W: *Dynamiczne modele ekonometryczne*. Red. T. Kufel, M. Piłatowska. Materiały zgłoszone na VIII Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń 2003.
14. Phillips P.C.B., Perron P.: *Testing for A Unit Root in Time Series Regression*. „Biometrika” 1988, 75, s. 335-346.

## COMPOSITE FORECASTING MODEL FOR SANITARY CERAMICS ENTERPRISE

### Summary

The forecast methodology of sale value of a ceramics company has been presented in the paper. Three sources of information have been used, i.e.: sale in the past, forecasts of marketing department and forecasts based on orders. The relevance of the alternative solutions has been verified by the means of data sample from the selected company for the time period from January 2001 to December 2003. The empirical results seem to confirm the reasonability of inclusion of a new element, namely composite forecasts, into the forecasting system.

**Bartłomiej Jabłoński**

# **MODEL WYCENY PRZEDSIĘBIORSTW METODĄ DOCHODOWĄ**

## **Wstęp**

Wycena spółek notowanych na giełdzie papierów wartościowych służy potencjalnemu inwestorowi przede wszystkim do określenia, czy warto dane przedsiębiorstwo nabyć do portfela inwestycyjnego celem późniejszej sprzedaży po wyższej cenie lub w przypadku inwestowania długoterminowego, które preferuje Warren Buffett, w pierwszej kolejności czerpać korzyści z wypłacanych dywidend, a dopiero potem ze wzrostu rynkowej wartości.

Aby rozważać sposób czerpania korzyści z tanio kupionych akcji trafnie wycenionego przedsiębiorstwa, należy najpierw rozwiązać problem, w jaki sposób wyceniać przedsiębiorstwa, aby wytypować te, które są niedowartościowane i mają największy potencjał wzrostu na rynku kapitałowym.

W gospodarce rynkowej jest wiele powodów wymuszających przeprowadzenie wyceny przedsiębiorstw. Obok klasycznych transakcji kupna-sprzedaży są to m.in. fuzje i przejęcia przedsiębiorstw, podziały firm, likwidacje, wniesienie przedsiębiorstw w formie aportu, podwyższenie kapitału, ustalenie wartości ubezpieczenia. W zależności od rodzaju wycenianego przedsiębiorstwa, celu wyceny i innych istotnych okoliczności są stosowane różne metod wyceny przedsiębiorstw [7, s. 13].

Przeprowadzenie wyceny często zostaje wymuszone przez różne okoliczności, dlatego też można wskazać następujące grupy przesłanek wyceny przedsiębiorstwa, tj. przesłanki związane z:

- 1) transakcjami kupna-sprzedaży lub innymi prowadzącymi tym samym do zmiany właściciela przedsiębiorstwa,
- 2) restrukturyzacją przedsiębiorstw,
- 3) prowadzeniem transakcji finansowych, najczęściej związanych z finansowaniem przedsiębiorstwa poprzez kapitały obce,

- 4) koncepcją zarządzania wartością przedsiębiorstwa,
- 5) wyceną, przeznaczone do celów podatkowych,
- 6) prawem rodzinnym lub prawem o spadkach i darowiznach,
- 7) wymiarem odszkodowań [1, s. 64].

## 1. Wyceny i ich podział

Z pojęciem wyceny nierozdzielnie wiąże się zagadnienie wartości, które jest wieloznaczne w zależności od tego, w jakiej dziedzinie nauki się je stosuje. Idea wartości ekonomicznej opiera się na zdolności aktywów do dostarczenia ich posiadaczowi strumienia wolnych przepływów pieniężnych. Przepływy te mogą mieć formę zysków lub określonych płatności umownych.

Z kolei wartość księgowa aktywów lub pasywów jest sumą wartości ujętej w zestawieniu bilansowym według zasad rachunkowości. Zatem wartość księgowa jest koncepcją stosowaną na potrzeby rachunkowości. Inne pojęcie wartości – wartość odtworzeniowa, to kwota konieczna do zastąpienia istniejących aktywów trwałych według rodzaju, czyli inaczej jest to koszt zastąpienia posiadanych maszyn, urządzeń i innych środków trwałych jednakowymi co do rodzaju aktywami. Natomiast wartość likwidacyjna dotyczy szczególnej sytuacji, gdy firma musi zlikwidować część lub całość swoich aktywów i roszczeń.

Jako podsumowanie rozważań nad odmianami terminu „wartość” warto przytoczyć pojęcie wartości rynkowej. Wartość rynkowa to wartość aktywu będącego przedmiotem na zorganizowanym rynku, np. na giełdach towarowych czy giełdach papierów wartościowych.

W teorii oraz praktyce występuje wiele metod wyceny przedsiębiorstw i wybór ich odpowiedniej formy jest uzależniony nie tylko od specyfiki wycenianego podmiotu, ale i od celu wyceny.

Klasyfikacja metody wyceny, która została zaproponowana przez M. Kufla, wyróżnia 4 grupy, tj.:

1. Metody dochodowe, które opierają się na wielkości dywidend, przepływów pieniężnych lub zysków.
2. Metody majątkowe dotyczące kosztów odtworzenia majątku przedsiębiorstwa.
3. Metody mieszane, które łączą wartość majątkową z dochodową. Wśród nich wyróżnia się: metody średniej wartości i metody z zyskiem dodatkowym jako źródłem wartości reputacji.
4. Metody niekonwencjonalne obejmujące metody wyceny przez porównania rynkowe oraz metody wyceny z opóźnieniem czasowym [6, s. 18].

Z kolei Dariusz Zarzecki proponuje inny podział, tj. na metody:

- 1) dochodowe,
- 2) majątkowe,
- 3) mieszane,
- 4) porównawcze,
- 5) niekonwencjonalne [7, s. 13].

Istnienie różnych poglądów na temat wartości przedsiębiorstwa i ustalania jego wyceny spowodowało wyróżnienie następujących funkcji wyceny, tj.:

1. Doradczych, inaczej decyzyjnych, które są wyznacznikiem procesu decyzyjnego dotyczącego negocjacji ceny przedsiębiorstwa. Ich realizacja stwarza możliwość określenia indywidualnego obszaru cenowego zarówno dla nabywcy, jak i zbywcy oraz pozwala na wyznaczenie strategii negocjacji ceny dla obydwóch stron.
2. Uzasadniających (zwanych również argumentacyjnymi, negocjacyjnymi), które są związane z funkcjami doradczymi. Dostarczają one argumentów mogących wzmocnić pozycję negocjacyjną danej strony w taki sposób, żeby przekonać stronę przeciwną do swoich racji.
3. Pośredniczących, czyli mediacyjnych, pozwalających na znalezienie wartości akceptowalnej przez obie strony, czyli nabywcę i sprzedawcę.
4. Zabezpieczających, które odnoszą się do wycen wykonywanych przez zewnętrznych ekspertów w celu zabezpieczenia się właścicieli przed powstaniem ewentualnych sporów na tle tej wyceny.
5. Informacji zewnętrznej (informacyjnych), które nie służą żadnej ze stron tylko stanowią sygnał lub wskazówkę skierowaną do otoczenia. Zawierają one informacje dotyczące np. sytuacji finansowej przedsiębiorstwa czy warunków jego przejęcia [1, s. 70].

Z praktycznego punktu widzenia wyceny przedsiębiorstw najbardziej praktyczne są podejścia majątkowe i dochodowe. Według metod majątkowych, przedsiębiorstwo jest warte tyle, ile przynależy do niego majątek, a zgodnie z metodami dochodowymi przedsiębiorstwo jest warte tyle, ile przyniesie dochód od dzisiaj do nieskończoności.

## 2. Dochodowe metody wyceny przedsiębiorstw

Dochodowe podejście do wartości przedsiębiorstwa wiąże się z sumą zysków lub innej postaci dochodu netto przedsiębiorstwa, jakie przyniesie ono właścicielom w okresie swojej działalności.

W rzeczywistości poszczególne strumienie dochodów przypadają na różne momenty czasowe od chwili wyceny. Powoduje to konieczność ich korygowania, które uwzględnia zmienność ich wartości wraz z upływem czasu. Dlatego też w tym celu jest wykorzystywana metoda dyskonta. Wykorzystanie tej metody przy wycenie dochodowej ma bezpośrednie odzwierciedlenie w określaniu metody zdyskontowanych przepływów pieniężnych. Najprostsza jej odmiana opiera się na założeniu, że w okresie  $n$ -lat funkcjonowania przedsiębiorstwa od momentu wyceny przynosi ono co roku stały dochód o oszacowanej wartości CF [1, s. 56].

Opisując nadwyżkę finansową jako pomiar przyszłej dochodowości przedsiębiorstwa, powinno się przyjąć ją w takiej postaci, żeby mogła ona w sposób obiektywny i kompletny odzwierciedlać zdolność aktywów przedsiębiorstwa do generowania dochodów.

Sposobów wyznaczania przepływów pieniężnych jest kilka. Warto przytoczyć najciekawsze metody ich szacowania dla wycenianego przedsiębiorstwa.

### **I sposób:**

$$\begin{aligned} \text{FCFE} &= \text{zysk netto} + \text{amortyzacja} - \\ &- \text{wydatki inwestycyjne} - \text{zwiększenie kapitału pracującego} - \\ &- \text{splata zadłużenia} + \text{zaciągnięcia nowych kredytów} \end{aligned} \quad (1)$$

### **II sposób:**

$$\text{CF} = \text{ZO} * (1 - r_p) + A - \Delta K_O - I \quad (2)$$

gdzie:

CF – nadwyżka finansowa,

ZO – zysk operacyjny,

$r_p$  – stopa podatku dochodowego płaconego przez przedsiębiorstwo,

A – amortyzacja,

$\Delta K_O$  – przyrost kapitału obrotowego netto,

I – nakłady inwestycyjne [1, s. 114].

Przepływy pieniężne należące do wszystkich stron finansujących to również rodzaj dochodu ekonomicznego, który jest stosowany na potrzeby szacowania wartości przedsiębiorstw. Przepływy pieniężne należące do wszystkich stron finansujących FCFF (cash flow to firm) wyznacza się następująco:

$$\begin{aligned}
 \text{FCFF} = & \text{FCFE} + \text{odsetki} (1 - \text{stopa podatkowa}) + \text{spłata zadłużenia} - \\
 & - \text{zaciągnięcia nowych kredytów} + \text{dywidendy uprzywilejowane} = \\
 & = \text{zysk netto} + \text{amortyzacja} - \text{wydatki inwestycyjne} - \\
 & - \text{zwiększenie kapitału pracującego} + \text{odsetki} (1 - \text{stopa podatkowa}) + \\
 & + \text{dywidendy uprzywilejowane} [7, s. 125]
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Innym, nieco uproszczonym sposobem liczenia przepływu pieniężnego jest zsumowanie zysku netto oraz amortyzacji przedsiębiorstwa za ostatnie cztery kwartały. Sposób ten jest dopuszczalny w liczeniu przepływu pieniężnego jako nadwyżki finansowej w dużych przedsiębiorstwach, szczególnie tych, które są notowane na rynku kapitałowym. Wtedy wzór na CF przyjmuje postać:

$$CF = \text{roczny zysk netto} + \text{roczna amortyzacja} \tag{4}$$

Dochodowa wycena przedsiębiorstwa stanowi problem w momencie, gdy analityk zastanawia się, jak długo w sposób uzasadniony i maksymalnie prawdopodobny jest w stanie szacować konieczne do przeprowadzenia rachunku elementy składowe.

Formuła wyrażająca sumę zdyskontowanych dochodów przedsiębiorstwa z okresu  $n$  lat powinna zostać uzupełniona o element odzwierciedlający wartość firmy na końcu  $n$ -tego roku. Składnik ten jest określany jako wartość rezydualna przedsiębiorstwa. Biorąc pod uwagę przedstawione uwarunkowania wyceny dochodowej przedsiębiorstwa, można ją zobrazować w następujący sposób:

$$PV = \sum_{t=1}^n \frac{CF_t}{(1+r)^t} + RV \tag{5}$$

gdzie:

PV – wartość przedsiębiorstwa,

$CF_t$  – przewidywane przepływy pieniężne w przedsiębiorstwie w okresie  $t$ ,

$r$  – stopa dyskontowa.

RV – wartość rezydualna [1, s. 115].

Istotnym elementem jest również właściwe oszacowanie poziomu stopy dyskontowej. Powinna ona we właściwy sposób odzwierciedlać tzw. cenę wymiany dochodu teraźniejszego na przyszły. Można zatem stwierdzić, że w poziomie stopy dyskontowej jest zawarta oczekiwana przez inwestora stopa zwrotu od zainwestowanego przez niego kapitału. Trzeba jednak pamiętać, że przyjęcie stopy dyskontowej na takim poziomie byłoby zbyt dużym ułatwieniem, ponieważ

najczęściej działalność przedsiębiorstwa, oprócz kapitału własnego, jest finansowana także przez kapitał obcy. Dlatego też podstawą do wyznaczania poziomu stopy dyskontowej w tym przypadku będzie tzw. średni ważony koszt kapitału przedsiębiorstwa (WACC – weighted average cost of capital). Jest to średnia kosztu kapitału własnego i kosztu kapitału obcego ważona ich udziałem w całym kapitale zainwestowanym w przedsiębiorstwie.

Średni ważony koszt kapitału oblicza się jako:

$$r = r_w * w_w + r_d * w_d * (1 - r_p) \quad (6)$$

gdzie:

$r$  – średnia ważona stopa zwrotu z kapitału całkowitego przedsiębiorstwa (stopa dyskontowa),

$r_w$  – oczekiwana przez inwestora stopa zwrotu z kapitału własnego (koszt kapitału własnego),

$r_d$  – średnie ważne oprocentowanie kapitału własnego,

$r_p$  – stopa podatku dochodowego,

$w_w$  – wskaźnik udziału kapitału własnego w kapitale przedsiębiorstwa,

$w_d$  – wskaźnik udziału kapitału obcego w kapitale przedsiębiorstwa [1, s. 85].

Z kolei określając wartość rezydualną przedsiębiorstwa w celu oszacowania jego wartości po okresie szczegółowej prognozy, w literaturze przedmiotu stosuje się również różne sposoby jej kalkulacji.

Gdy sytuacja ekonomiczna przedsiębiorstwa, jej prognozy oraz perspektywy rozwojowe na najbliższe lata wskazują na szansę jej dalszej stabilizacji w kolejnych latach, wtedy do celów obliczenia wartości rezydualnej wykorzystuje się wzór:

$$RV = \frac{CF_n}{r * (1 + r)^n} \quad (7)$$

Zakładając coroczny, regularny wzrost zysku w wymienionym okresie, w celu wyrażenia wartości rezydualnej można skorzystać z formuły tzw. modelu stałego wzrostu, wtedy:

$$RV = \frac{|1+q| * CF_n}{(r-q) * (1+r)^n} \quad (8)$$

gdzie:

$CF_n$  – wartość przepływów z ostatniego roku prognozy,

$q$  – założona stała stopa wzrostu po okresie prognozowanym,

$r$  – przyjęta dla całego okresu prognozy stopa dyskontowa.

### 3. Model wyceny w praktyce

Aby stworzyć model wyceny przedsiębiorstw, posłużono się następującymi, wcześniej omówionymi wzorami:

$$PV = \sum_{i=1}^n \frac{CF_i}{(1+r)^i} + RV \quad (9)$$

$$RV = \frac{CF_n}{r * (1+r)^n} \quad (10)$$

Ponadto w celu zaprezentowania przykładowej wyceny założono, że:

- przykładowe wyceniane przedsiębiorstwo to spółka giełdowa Lubawa S.A., wycena przedsiębiorstwa uwzględnia jego sytuację finansową na dzień 27.12.2007,
- przepływy pieniężne CF obliczono jako nadwyżkę finansową, czyli: zysk netto + amortyzacja, co jest podyktowane nieskomplikowanym i logicznym sposobem liczenia przepływu pieniężnego,
- zmiany zysku uwzględniono na poziomie 5% rocznie,
- zmiany amortyzacji uwzględniono na poziomie 2% rocznie,
- przepływ pieniężny w wartości rezydualnej obliczono jako przepływ z ostatniego okresu prognozy pomniejszony o 20%, co oznacza, że przedsiębiorstwo ponosi koszty na poziomie 20%, aby w przyszłości mogło nadal funkcjonować,
- koszt kapitału określono na poziomie 8%.

Tabela 1 przedstawia zestawienie założeń liczbowych służących jako dane wejściowe do modelu wyceny.

Tabela 1

Dane wejściowe do modelu wyceny

|                                                   |         |
|---------------------------------------------------|---------|
| 1. Dynamika zysku netto:                          | 5,00%   |
| 2. Dynamika amortyzacji:                          | 2,00%   |
| 3. Liczba akcji (w tys.):                         | 87 000  |
| 4. Rynkowa cena akcji:                            | 0,75 zł |
| 5. Stopa dyskonta:                                | 8,00%   |
| 6. Roczna stopa inwestycji poza okresem prognozy: | 20,00%  |

Z tabeli 1 można odczytać nie tylko założenia wyceny, lecz także to, że przedsiębiorstwo będące przedmiotem wyceny jest notowane po 0,75 zł. Wskazana wartość notowania jest ważna przy porównaniu jej ze sporządzoną wyceną.

Tabela 2

Wyniki historyczne oraz prognoza na przyszłe lata (tys. zł)

| Rok         | Historia | Prognoza |        |        |        |        |
|-------------|----------|----------|--------|--------|--------|--------|
|             | 2007     | 2008     | 2009   | 2010   | 2011   | 2012   |
| Zysk netto  | 10 666   | 11 199   | 11 759 | 12 347 | 12 965 | 13 613 |
| Amortyzacja | 1 010    | 1 030    | 1 051  | 1 072  | 1 093  | 1 115  |
| CF          | 11 676   | 12 230   | 12 810 | 13 419 | 14 058 | 14 728 |

Z tabeli 2 widać, że zgodnie z poczynionymi bezpiecznymi założeniami wyceny, wyniki w okresie prognozy (2008-2012) rosną systematycznie. Wzrost ten jednak nie jest obarczony ryzykiem przeszacowania, gdyż należy mieć na uwadze fakt, że przyjęte założenie wzrostu zysku netto o 5%, a amortyzacji o 2% jest uśrednionym wynikiem. Może to oznaczać, że w 2009 roku dynamika będzie ujemna, aby w 2010 roku przekroczyć 10% zmiany, co średnio w badanym okresie da założone wartości dynamiki z tabeli 1.

Tabela 3 przedstawia model wyceny przedsiębiorstwa oparty na zdyskontowanych przepływach pieniężnych dla 5 lat prognozy z tabeli 2 oraz wartości rezydualnej.

Tabela 3

## Model wyceny (tys. zł)

| Okres wyceny      | 1       | 2      | 3      | 4      | 5      | RV     |
|-------------------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Stopa dyskonta    | 8,00%   | 8,00%  | 8,00%  | 8,00%  | 8,00%  | 8,00%  |
| Wycena w okresach | 11 324  | 10 983 | 10 652 | 10 333 | 10 024 | 92 952 |
| Wartość wyceny    | 146 267 |        |        |        |        |        |
| Wycena akcji DCF  | 1,68 zł |        |        |        |        |        |

Z tabeli 3 wynika, że wartość wyceny całego przedsiębiorstwa wynosi 146 267 mln zł. Z kolei wycena 1 akcji spółki Lubawa S.A. wynosi 1,68 zł, co przy notowaniach z dnia wyceny na poziomie 0,75 zł oraz zakładanych wzrostach w przyszłości daje możliwość hipotetycznego zarobku 0,93 zł, czyli 124% zysku.

## Wnioski

Podsumowując problematykę dochodowych metod wyceny przedsiębiorstwa, należy nadmienić, że są one obarczone błędem prognozy wyników i zakładają wycenę wartości jedynie po przyszłym dochodzie bez uwzględnienia majątku wycenianego podmiotu. Może się zatem zdarzyć, że wyceniane przedsiębiorstwo w kolejnym okresie osiągnie inne wyniki od poczynionych prognoz CF. Należy wtedy korygować wycenę i dostosowywać swoje decyzje inwestycyjne już do zmienionej wyceny.

Jeśli wyceniane przedsiębiorstwo nie tylko nie będzie osiągać zysków na zakładanym poziomie, ale i będzie generować straty, wówczas prognoza CF będzie błędna, a wartość wycenianego podmiotu przewartościowana względem cen rynkowych. W takiej sytuacji inwestor poniesie stratę, a na odrobienie jej będzie musiał poczekać, aż osiągnie przez przedsiębiorstwo wyniki będą adekwatne do wcześniejszej wysokiej ceny nabycia.

## Literatura

1. Borowiecki R., Czaja J., Jaki A., Kulczycki M.: *Metody i systemy wyceny przedsiębiorstw*. Twigger, Warszawa 2002.
2. Francis J.C.: *Inwestycje. Analiza i zarządzanie*. WIG-PRESS, Warszawa 2000.
3. Graham B.: *Mądry inwestor*. Wydawnictwo Profesjonalnej Szkoły Biznesu, Kraków 1999.
4. Groppelli A.A.: *Wstęp do finansów*. WIG-PRESS, Warszawa 1999.
5. Haugen R.A.: *Nowa nauka o finansach*. WIG-PRESS, Warszawa 1999.
6. Kufel M.: *Metody wyceny przedsiębiorstw*. Wydawnictwo Park, Bielsko-Biała 1992.
7. Zarzecki D.: *Metody wyceny przedsiębiorstw*. Fundacja Rozwoju Rachunkowości w Polsce, Warszawa 1999.

## A MODEL OF EVALUATING ENTERPRISES BY INCOME METHOD

### Summary

The article describes the task of value estimating shares by the income method together with a detailed description of the problems of estimating cash flow, cost of capital and residual value.

In order to consider the way of the benefits from the inexpensively bought shares of the correctly estimated enterprise, we should solve the problem how to estimate the enterprises in order to show these which are undervaluated and have the biggest potential to increase on the capital market.

The income method evaluating the enterprise is connected with the sum of incomes or any other forms of the net income of the enterprise obtained by its owners during their activity.

An important element is also the correct estimation of the level of the discount rate. The discount rate should properly reflect the so called the price of the present exchange income related to the future one.

**Anna Janiga-Ćmiel**

# **ANALIZA ZMIENNOŚCI W DYNAMICE PROCESÓW FINANSOWYCH NA PODSTAWIE FUNKCJI GĘSTOŚCI SPEKTRALNEJ**

## **Wprowadzenie**

Analiza działalności na rynku finansowym w większości przypadków sprowadza się do wszechstronnego badania dynamiki zjawisk. Najczęściej przedmiotem badania jest zmienność w czasie wartości instrumentów rynku kapitałowego, różnego rodzaju transakcji, w szczególności krótko- lub długookresowych. Do takich zagadnień można zaliczyć dzienne zyski z giełdy papierów wartościowych. W sytuacji powtarzalności sekwencji stanów, tj. cykliczności pewnych zachowań, można się posłużyć analizą spektralną. W większości przypadków dynamika procesów finansowych nie zawiera wyraźnie ustalonych cykli. Często mówi się o efekcie jednego momentu, np. jednego dnia, mimo że takie obserwacje nie zawsze znajdują pełne potwierdzenie empiryczne.

Jednocześnie w analizach finansowych mamy do czynienia z teorią tzw. długiej pamięci, czyli wielookresowej autozależności procesów finansowych. Autozależność w badanym zjawisku może być jednookresowa lub wielookresowa. W przypadku autozależności jednookresowej mamy do czynienia z autokorelacją wartości w okresie  $t$  z wartością z okresu jednoimiennego cyklu poprzedniego. W przypadku autokorelacji wielookresowej istotna jest zależność wartości zjawiska w okresie  $t$  jednocześnie od wartości tego zjawiska w okresach jednoimiennych z kilku cykli wstecz. Analiza spektralna w pełni pozwala tę zależność identyfikować, i to zarówno dla momentów, jak i przedziałów czaso-

wych dla krótkiego i długiego okresu. Jednym z wymogów, jaki stawia się przed analizą spektralną, jest założenie stacjonarności procesu. Zbadanie stacjonarności stanowi punkt wyjścia w analizie spektralnej.

Analizę spektralną w niniejszym opracowaniu podjęto w celu dekompozycji procesu na składowe częstotliwościowe o różnych okresach. Osiągnięto przez to przedstawienie procesu w dziedzinie częstości. Nie stracono przy tym informacji z dziedziny czasu. Informacja ta w wystarczającym stopniu podlega opisowi za pomocą funkcji spektrum  $f(\omega)$  oraz funkcji  $p(\omega)$  spełniającej założenia funkcji gęstości spektralnej. Najważniejszym założeniem jest stacjonarność procesu w węższym sensie. Stacjonarność ta zostanie tu sprawdzona. Analiza spektralna polegająca na przekształceniu trygonometrycznym Fouriera ma tę zaletę, że może być wykorzystana do krótkich szeregów obejmujących do pięćdziesięciu obserwacji.

## 1. Model procesu

Podstawą analizy spektralnej w przypadku stacjonarnego procesu stochastycznego jest model funkcji gęstości spektralnej. Model ten jest określony następującym wzorem, zgodnie z którym szereg aproksymujemy  $n$ -tą sumą częściową:

$$y_t = f(t) + \sum_{i=1}^n [a_i \cos(\omega_i t) + b_i \sin(\omega_i t)] = f(t) + \sum_{i=1}^n [a_i \cos(\omega_i t) + b_i \sin(\omega_i t)]. \quad (1)$$

W powyższym wzorze wskaźnik  $\omega_i$  to częstość związana z cyklem wyrażona wzorem:

$$\omega_i = \frac{2\pi i}{n}, \quad \text{dla } i = 0, 1, \dots, \frac{n}{2}.$$

Funkcję trendu przyjmujemy w postaci funkcyjnej, a w rozpatrywanym przykładzie zostanie uwzględniona postać funkcji liniowej  $f(t) = mt + n$ .

Oceny parametrów modelu  $a_i$ ,  $b_i$  to stałe niezależne od czasu, zdefiniowane wzorem:

$$a_i = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y_t \cos \omega_i t, & \text{dla } i = 0 \text{ oraz } i = \frac{n}{2} \quad \text{gdy } n \text{ parzyste} \\ \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n y_t \cos \omega_i t, & \text{dla } i = 1, 2, \dots, (\frac{n-1}{2}), \end{cases}$$

$$b_i = \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n y_t \sin \omega_i t \text{ dla } i = 1, 2, \dots, \left(\frac{n-1}{2}\right). \quad (2)$$

Przedstawiona postać modelu  $y_t$  jest z jednej strony funkcją czasu, a z drugiej strony funkcją rozpatrywanych częstości, można więc ją rozpatrywać, ograniczając się do zależności:

$$y_t = f(\omega). \quad (3)$$

Funkcja  $f(\omega)$  nosi nazwę spektrum, jest funkcją ciągłą, nieujemną, okresową, spełnia wszystkie założenia spektrum, jest rozpatrywana w mierze spektralnej określonej za pomocą miary Euklidesowej wektora danych empirycznych. Funkcję tę w najprostszym przypadku można przedstawić w postaci:

$$p(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau} K(\tau) e^{-i\omega\tau}, \quad \tau = (t-s), \text{ dla } t, s = 1, \dots, 20. \quad (4)$$

Jest to funkcja rzeczywista, ponieważ kowariancja sprowadza się do funkcji jednej zmiennej  $\tau$ . W związku z tym:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau} K(\tau) \cos \omega\tau. \quad (5)$$

Przez  $K(0)$  oznaczmy wariancję rozpatrywanej zmiennej  $y_t$ ,  $K(0) = D^2(y_t)$ .  $K(0)$  wyodrębnimy z funkcji spektrum  $f(\omega)$  i otrzymamy postać:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\omega} K(0) + \frac{1}{\pi} \sum_{\tau} K(\tau) \cos \omega\tau. \quad (6)$$

Obejmuje ona wszystkie możliwe częstości, jakie mogą się pojawić w realizacji zjawiska  $y_t$ , czyli  $\omega \in \langle -\pi, \pi \rangle$ . Funkcja spektrum jest funkcją okresową, co podkreśla słuszność podjętej analizy. Iloraz funkcji spektrum i wariancji całkowitej rozpatrywanego zjawiska  $y_t$  jest funkcją spełniającą założenia funkcji

gęstości rozkładu, czyli  $p(\omega) = \frac{f(\omega)}{K(0)}$ . Całka funkcji gęstości spektralnej jest liczbą rzeczywistą, a jako iloraz kowariancji do iloczynu odchyleń standardowych może być potraktowana jako estymator współczynnika autokorelacji.  $K(0)$  jest stałą, w związku z tym spektrum można utożsamiać z gęstością spektralną, której model zostanie przedstawiony w niniejszym opracowaniu zgodnie ze wzorami (1) i (7).

Szereg (1) można przedstawić w alternatywnej, nieco uproszczonej postaci:

$$y_t = f(t) + \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i), \quad (7)$$

gdzie jest uwidoczniła amplituda wahań harmoniczych, która wynosi:

$$A_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}. \quad (8)$$

Podane jest przesunięcie początkowe  $\varphi_i$ , określone zgodnie ze wzorem:

$$\varphi_i = \arctg \frac{a_i}{b_i}, \quad (9)$$

gdzie  $\omega$ , to wskaźnik częstości zdefiniowany wcześniej.

W przypadku ograniczonej kowariancji  $\text{cov}(Y_t, Y_s)$  powyższy szereg jest zbieżny, przy czym rozpatrujemy kowariancję między wartościami z okresów  $t$  i  $s$ .

W dalszych etapach obliczeń zostaną oszacowane parametry wprowadzonego do modelu szeregu, a w przypadku wykazania jego stacjonarności można będzie wyodrębnić prognozę kształtowania się obrotów spółki na giełdzie w przyszłości.

## 2. Dane empiryczne

Analizie poddano codzienne przychody z giełdy papierów wartościowych spółki z 40 dni od 2 listopada 2005 roku do 30 grudnia 2005 roku, uwzględniając wartość akcji na dany dzień w momencie jej zamknięcia.

Tabela 1

## Zysk akcji w momencie zamknięcia

| Data       | Zamknięcie | Data       | Zamknięcie |
|------------|------------|------------|------------|
| 2005-11-02 | 19         | 2005-12-02 | 20,5       |
| 2005-11-03 | 18,7       | 2005-12-05 | 22,3       |
| 2005-11-04 | 19,4       | 2005-12-06 | 21,7       |
| 2005-11-07 | 20,3       | 2005-12-07 | 21,2       |
| 2005-11-08 | 20,9       | 2005-12-08 | 21,8       |
| 2005-11-09 | 20,8       | 2005-12-09 | 21,4       |
| 2005-11-10 | 20,7       | 2005-12-12 | 21,7       |
| 2005-11-14 | 19,5       | 2005-12-13 | 21         |
| 2005-11-15 | 18,6       | 2005-12-14 | 20,2       |
| 2005-11-16 | 18,8       | 2005-12-15 | 20,4       |
| 2005-11-17 | 19,25      | 2005-12-16 | 20,9       |
| 2005-11-18 | 18,8       | 2005-12-19 | 20,3       |
| 2005-11-21 | 19,25      | 2005-12-20 | 20,2       |
| 2005-11-22 | 18,95      | 2005-12-21 | 20,7       |
| 2005-11-23 | 19,1       | 2005-12-22 | 20,4       |
| 2005-11-24 | 18,8       | 2005-12-23 | 20,9       |
| 2005-11-25 | 18,75      | 2005-12-27 | 20,9       |
| 2005-11-28 | 18,5       | 2005-12-28 | 21,2       |
| 2005-11-29 | 18,7       | 2005-12-29 | 22,8       |
| 2005-11-30 | 18,5       | 2005-12-30 | 21,7       |
| 2005-12-01 | 19,6       |            |            |

Źródło: [www.biznes.onet.pl](http://www.biznes.onet.pl)

### 3. Zbadanie zgodności z rozkładem normalnym

Jednym z założeń zjawisk opisywanych metodami analizy spektralnej jest zgodność realizacji zjawiska z rozkładem normalnym. Rozkład normalny jest rozkładem symetrycznym, którego kurtoza  $K_0 = 3$ . Oszacowano wariancję  $D^*(Y) = 1,088$  oraz odchylenie standardowe  $\sigma(Y) = 1,043$ . Wyznaczono wartość oczekiwaną, która dla rozpatrywanego szeregu czasowego wynosi  $E(Y) = 20,05$ . Wyznaczono także wartość wskaźnika kurtozy:

$$K = 2,934,$$

$$\frac{K - K_0}{K_0} 100\% = \frac{2,934 - 3}{3} = -0,22\%, \quad (10)$$

$$\frac{\sigma(x) - \sigma_0}{\sigma_0} 100\% = \frac{1,043 - 1}{1} 100\% = 4,3\%. \quad (11)$$

Kurtoza rozkładu rozpatrywanego szeregu czasowego od wartości 3 jest niższa o 0,22%, a odchylenie standardowe od wartości 1 jest wyższe o 4,3%. Wartość oczekiwana wynosi 20,05 i wykazuje nieznaczny wzrost wraz z upływem czasu. Rozkład badanej zmiennej można traktować jako zbliżony do normalnego. Wartość oczekiwana jest różna od zera, wzrost wartości badanej zmiennej jest nieistotny statystycznie. Można więc przyjąć, że wartość oczekiwana nie różni się istotnie od wartości, jakie zmienna przyjmuje w rozpatrywanym okresie.

#### 4. Zbadanie stacjonarności rozpatrywanego procesu

W punkcie 3 wykazano, że wartość oczekiwana i wariancja są skończone. Wyznaczenie wartości oczekiwanej i wariancji dla innej próby dało wynik, na podstawie którego można było wnioskować o nieznacznym wzroście wartości oczekiwanej. Wzrost ten będzie odzwierciedlała funkcja trendu liniowego wprowadzonego do modelu. Natomiast wariancja dla innych okresów obejmujących około czterdziestu dni nie różni się istotnie od wariancji oszacowanej dla rozpatrywanej próby. Wartość średnia z upływem czasu wzrasta średnio o 0,05 zł, natomiast wariancja zawiera się w przedziale  $[1 \pm 0,15]$  – przedział ten wyznaczono jako przedział ufności na podstawie poziomu istotności  $\alpha = 0,05$ .

Wyznaczono funkcję kowariancji:

$$\text{cov}(Y_t, Y_s) = \frac{1}{n} \sum (Y_t - \bar{Y}_t)(Y_s - \bar{Y}_s) \quad (12)$$

oraz odpowiednie wartości kowariancji dla różnych okresów  $t$  i  $s$ . Jeżeli przez  $\tau$  oznaczymy różnicę  $t-s$ , to okazuje się, że kowariancja zależy w sposób liniowy od  $\tau = t-s$ ,  $\text{cov}(Y_t, Y_s) = 0,001(t-s) + 0,5$  i siła tej zależności jest słaba, ale ze

wzrostem różnicy między rozpatrywanymi okresami nieznacznie wzrasta. Wzrost ten jest nieistotny statystycznie, można go więc pominąć. Można go pominąć tym bardziej, że suma bezwzględnych wartości wszystkich kowariancji jest mniejsza od 20, czyli od połowy ilości rozpatrywanych obserwacji. Oznacza to, że kowariancja spełnia warunek bezwzględnej zbieżności:

$$\sum_{\tau} |K(\tau)| < \infty. \quad (13)$$

Spełnione są założenia stacjonarności funkcji autokowariancji. Wartość oczekiwana i wariancja procesu  $y_t$  są skończone:

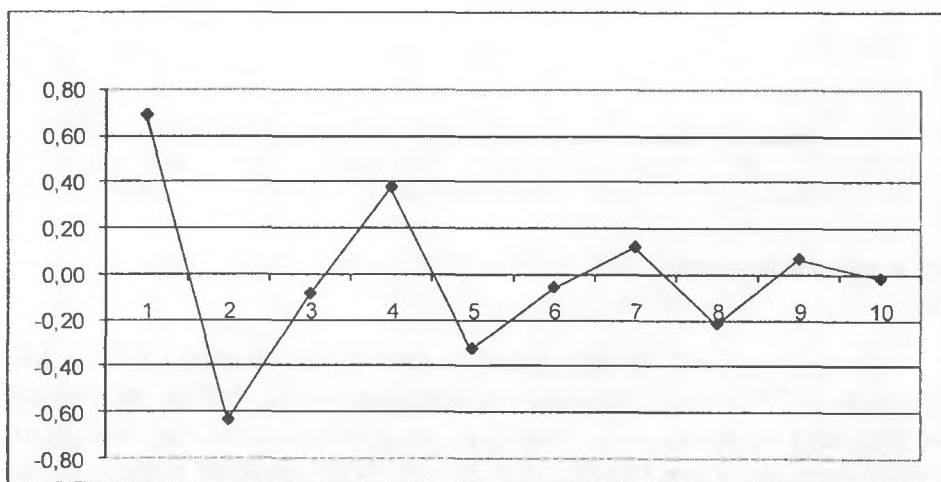
$$E(Y_t) = \text{const.}, D^2(Y_t) = \text{const.} \quad (14)$$

Ponadto kowariancja stanów w dowolnych okresach  $t, s$  zależy jedynie od różnicy czasu:

$$\text{cov}(Y_t, Y_s) = K(t - s) = K(\tau). \quad (15)$$

Spełnienie powyższych trzech warunków oznacza, że proces jest stacjonarny w węższym sensie.

Funkcja gęstości spektralnej jako ilustracja empirycznej postaci zjawiska jest funkcją okresową i została przedstawiona na rysunku 1.



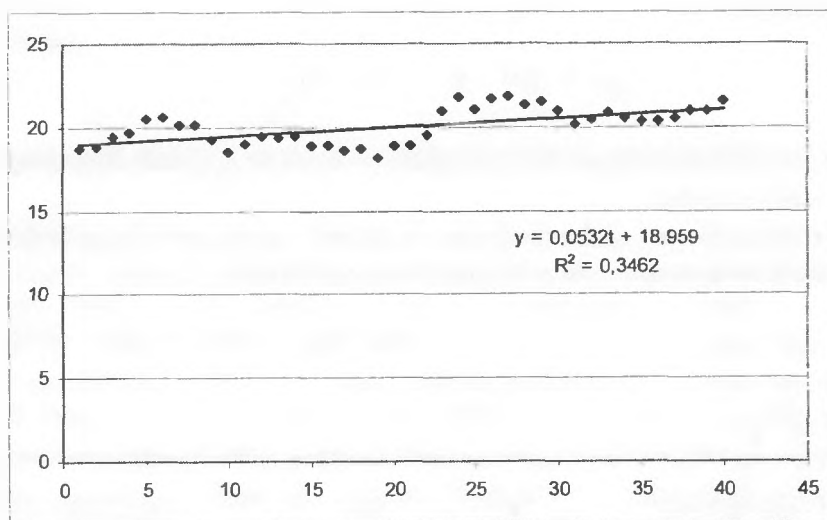
Rys. 1. Estymator funkcji gęstości spektralnej

Rysunek 1 przedstawia dziesięć końcowych obserwacji. Widoczne są zaniżające wahania przy stałej długości cyklu. Oznacza to, że udział częstości w kształtowaniu zjawiska z upływem czasu jest coraz mniej istotny. Proces ten nie jest białym szumem, ponieważ  $E(Y_t) \neq 0$  i  $\text{cov}(Y_t, Y_s) \neq 0$ . Skoro nie jest białym szumem, to należy wskazać trend i oszacować ewentualne wahania cykliczne.

## 5. Wyznaczenie trendu

Wyznaczono liniową funkcję trendu. Jest to funkcja w postaci:

$$y = 0,05t + 18,96.$$



Rys. 2. Wykres funkcji trendu

Oznacza to, że wartość akcji z dnia na dzień wzrasta średnio o 0,05 zł. Model trendu w 34,62% odzwierciedla zmienność cen akcji. Poziom determinacji jest taki słaby, ponieważ model liniowy nie uwzględnia wahań. Aby uwzględnić wahania regularne i tym bardziej nieregularne, należy pogłębić analizę, np. zastosować analizę spektralną.

## 6. Wyznaczenie modelu wahań

Na podstawie danych z tabeli 1 i wzoru (1) dokonano oszacowania modelu dynamiki dziennych zysków z akcji:

$$y_t = f(t) + \sum_{i=1}^n [a_i \cos(\omega_i t) + b_i \sin(\omega_i t)]. \quad (16)$$

Wyniki obliczeń przedstawiono w tabeli 2.

Tabela 2

Obliczenia pomocnicze

| i    | numer harmoniki | $\sin(\omega_i t)$ | $\cos(\omega_i t)$ | $a_0$ | $a_i$  | $b_i$ | $a_i^2 + b_i^2$ | $A_i$ | $a_i/b_i$ | $\arctg(a_i/b_i)$ | $\omega_i$ | $\omega_i \cdot t$ | i  |
|------|-----------------|--------------------|--------------------|-------|--------|-------|-----------------|-------|-----------|-------------------|------------|--------------------|----|
| 1    |                 | -18,83             | 6,75               | 20,05 | -0,941 | 0,34  | 1,00            | 1,00  | -2,79     | -1,23             | 45,97      | 45,97              | 1  |
| 2    |                 | 9,48               | 9,48               |       | 0,474  | 0,47  | 0,45            | 0,67  | 1,00      | 0,79              | 20,65      | 66,61              | 2  |
| 3    |                 | -5,24              | 6,47               |       | -0,262 | 0,32  | 0,17            | 0,42  | -0,81     | -0,68             | 7,63       | 74,24              | 3  |
| 4    |                 | -5,33              | -6,55              |       | -0,267 | -0,33 | 0,18            | 0,42  | 0,81      | 0,68              | 8,20       | 82,43              | 4  |
| 5    |                 | -6,49              | 3,55               |       | -0,324 | 0,18  | 0,14            | 0,37  | -1,83     | -1,07             | 6,28       | 88,72              | 5  |
| 6    |                 | -3,90              | 3,55               |       | -0,195 | 0,18  | 0,07            | 0,26  | -1,10     | -0,83             | 2,20       | 90,91              | 6  |
| 7    |                 | -0,89              | 3,98               |       | -0,045 | 0,20  | 0,04            | 0,20  | -0,22     | -0,22             | 1,92       | 92,83              | 7  |
| 8    |                 | -4,33              | -0,23              |       | -0,217 | -0,01 | 0,05            | 0,22  | 18,93     | 1,52              | 1,16       | 93,99              | 8  |
| 9    |                 | -1,45              | 0,46               |       | -0,072 | 0,02  | 0,01            | 0,08  | -3,18     | -1,27             | 0,26       | 94,26              | 9  |
| 10   |                 | -0,85              | 2,80               |       | -0,042 | 0,14  | 0,02            | 0,15  | -0,30     | -0,29             | 0,98       | 95,24              | 10 |
| 11   |                 | 0,88               | 0,69               |       | 0,044  | 0,03  | 0,00            | 0,06  | 1,28      | 0,91              | 0,14       | 95,39              |    |
| 12   |                 | -0,97              | 3,12               |       | -0,049 | 0,16  | 0,03            | 0,16  | -0,31     | -0,30             | 1,23       | 96,62              |    |
| 13   |                 | 0,00               | -0,16              |       | 0,000  | -0,01 | 0,00            | 0,01  | 0,00      | 0,00              | 0,00       | 96,62              |    |
| 14   |                 | 1,18               | 2,30               |       | 0,059  | 0,12  | 0,02            | 0,13  | 0,51      | 0,47              | 0,77       | 97,39              |    |
| 15   |                 | -0,09              | 3,05               |       | -0,004 | 0,15  | 0,02            | 0,15  | -0,03     | -0,03             | 1,07       | 98,46              |    |
| 16   |                 | 0,74               | 1,50               |       | 0,037  | 0,08  | 0,01            | 0,08  | 0,49      | 0,46              | 0,32       | 98,78              |    |
| 17   |                 | 0,15               | 1,45               |       | 0,007  | 0,07  | 0,01            | 0,07  | 0,10      | 0,10              | 0,25       | 99,03              |    |
| 18   |                 | 0,40               | 2,43               |       | 0,020  | 0,12  | 0,02            | 0,12  | 0,16      | 0,16              | 0,69       | 99,72              |    |
| 19   |                 | -0,59              | 0,29               |       | -0,030 | 0,01  | 0,00            | 0,03  | -2,01     | -1,11             | 0,05       | 99,77              |    |
| 20   |                 | 0,00               | 2,85               |       | 0,000  | 0,07  | 0,01            | 0,07  | 0,00      | 0,00              | 0,23       | 100,00             |    |
| Suma |                 | -36,14             | 47,80              | 20,05 | -1,81  | 2,32  | 2,23            | 4,68  | 10,70     | -1,94             | 100,00     |                    |    |

W kolejnych kolumnach przedstawiono wykonane pośrednie obliczenia mające na celu wyznaczenie parametrów modelu. Kolumna  $\omega_i$  to wykaz części ogólnej wariancji zmiennej  $Y$  wyjaśnionej przez kolejne spośród dwudziestu harmonik:

$$\begin{cases} \omega_i = \frac{A_i^2}{2S^2}, & i = 1, \dots, \frac{n}{2} - 1 \\ \omega_i = \frac{A_i}{S^2} & i = \frac{n}{2} \end{cases} \quad (17)$$

W związku z tym, że model całkowity zawiera 20 harmonik, z których 10 wyjaśnia 95% ogólnej wariancji zmiennej  $Y$ , końcowe 10 harmonik pominięto jako nieistotne statystycznie. Model ma więc postać:

$$\begin{aligned} y_t = & 0,05t + 18,96 + 1\sin(45,97t - 1,23) + 0,67\sin(20,65t + 0,79 + \\ & + 0,42\sin(7,63t - 0,68) + 0,42\sin(0,68t + 8,20) + 0,37\sin(6,28t - 1,07) + \\ & + 0,26\sin(2,20t - 0,83) + 0,20\sin(1,92t - 0,22) + 0,22\sin(1,16t + 1,52) + \\ & + 0,08\sin(0,26t - 1,27) + 0,15\sin(0,98t - 0,29). \end{aligned} \quad (18)$$

## 7. Ocena jakości oszacowanego modelu

Wyznaczono wariancję resztową  $S_u^2 = 0,405$ , odchylenie resztowe  $S_u = 0,63$  oraz  $V_u = 3,17\%$ . Oznacza to, że model charakteryzuje się bardzo dobrą wyrazistością. Współczynnik zmienności resztowej nie przekracza progowej wartości 10%, model można więc wykorzystać do celów diagnostycznych lub celów prognostycznych badanego zjawiska. Współczynnik zbieżności  $\varphi^2 = \frac{0,405}{1,088} = 37,22\%$ ,  $R^2 = 62,78\%$ . Oszacowany model nie wyjaśnia zmienności zjawiska w 37,22% zakresu zmienności zmiennej objaśnianej, natomiast wyjaśnienie tej zmienności ma miejsce w 62,78%.

## 8. Prognozowanie kształtowania się zysków dziennych w przyszłości

W celu zbadania dopuszczalności modelu do szacowania prognoz wyznaczono dla każdego okresu danych historycznych prognozę wygaślą. Są to pro-

gnozy ex post przedstawione w tabeli 3. Zbadano sumę wartości rzeczywistych, zaobserwowanych:

$$\sum y_t = 801,65$$

i sumę wartości prognoz wygasłych, która ukształtowała się na poziomie  $\sum y_t^* = 801,71$ . Zgodność powyższych sum zbadano z racji niewysokiego współczynnika determinacji przedstawionego w poprzednim punkcie. Przy takiej zgodności wartości empirycznych i prognoz wygasłych można przedstawić prognozę ex ante na najbliższe kolejne interesujące dla opracowania okresy.

Tabela 3

Prognoza ex post

| t  | $y_t$ | $y_t^*$ |
|----|-------|---------|
| 1  | 18,75 | 19,535  |
| 2  | 18,8  | 17,298  |
| 3  | 19,45 | 18,879  |
| 4  | 19,7  | 21,003  |
| 5  | 20,5  | 20,005  |
| 6  | 20,6  | 19,122  |
| 7  | 20,2  | 19,654  |
| 8  | 20,2  | 20,194  |
| 9  | 19,25 | 18,411  |
| 10 | 18,55 | 19,472  |
| 11 | 19    | 19,773  |
| 12 | 19,45 | 19,107  |
| 13 | 19,35 | 19,356  |
| 14 | 19,4  | 19,104  |
| 15 | 18,95 | 18,953  |
| 16 | 18,95 | 18,901  |
| 17 | 18,6  | 18,622  |
| 18 | 18,75 | 18,667  |
| 19 | 18,2  | 18,294  |
| 20 | 18,9  | 18,225  |

| t    | $y_t$  | $y_t^*$ |
|------|--------|---------|
| 21   | 18,9   | 19,296  |
| 22   | 19,5   | 19,566  |
| 23   | 21     | 21,547  |
| 24   | 21,8   | 21,067  |
| 25   | 21,1   | 20,000  |
| 26   | 21,7   | 20,977  |
| 27   | 21,9   | 21,730  |
| 28   | 21,3   | 20,930  |
| 29   | 21,5   | 21,880  |
| 30   | 21     | 20,926  |
| 31   | 20,2   | 20,093  |
| 32   | 20,4   | 21,603  |
| 33   | 20,9   | 22,049  |
| 34   | 20,5   | 20,555  |
| 35   | 20,3   | 20,747  |
| 36   | 20,3   | 20,501  |
| 37   | 20,5   | 20,343  |
| 38   | 21     | 21,683  |
| 39   | 21     | 21,678  |
| 40   | 21,6   | 21,963  |
| Suma | 801,65 | 801,711 |

Tabela 4

Prognozy na następne okresy

| t  | $y_t$  | $y_t^*$ |
|----|--------|---------|
| 41 | 18,967 | 19,211  |
| 42 | 22,010 | 22,100  |
| 43 | 20,928 | 21,311  |

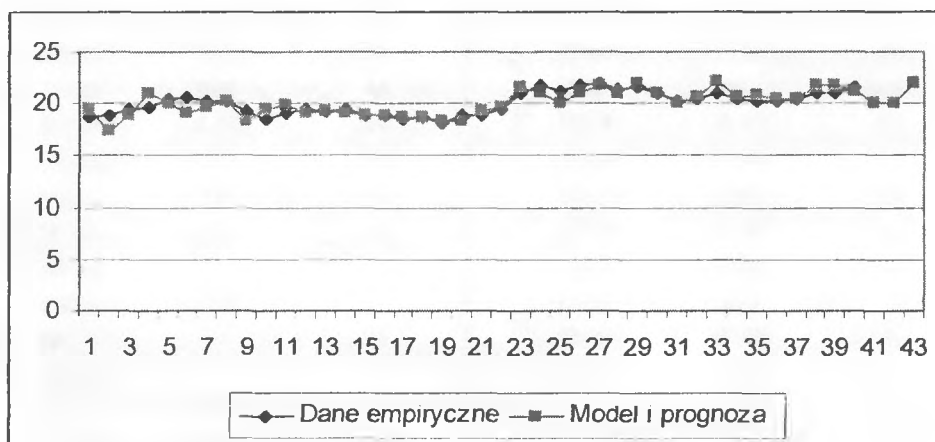
Wariancja predykcji ex post wynosi:

$$S_u^2 = \frac{\sum (Y_t - Y_t^*)^2}{n} = 0,405, \quad (19)$$

natomiast wariancja predykcji ex ante wynosi:

$$S_v^2 = \frac{\sum (Y_T - Y_T^*)^2}{m} = 0,071. \quad (20)$$

Niskie wartości obliczonych wariancji występują przy wysokiej zgodności modelu z rzeczywistością, co potwierdza poniższy diagram.



Rys. 3. Model i prognoza

Korzystając z powyższych obliczeń, wyznaczono również współczynnik Janusowy, zdefiniowany jako stosunek wariancji prognoz na przedziale horyzontu prognozy do wariancji z okresu z danych historycznych. Prognozy są dopuszczalne, gdy wartość współczynnika nie przekracza wartości 2. W przedstawionym przykładzie wartość współczynnika wynosi 0,176, co ma miejsce przy niższej wariancji prognoz *ex ante* od wariancji prognoz *ex post*.

$$J = \frac{S_v^2}{S_u^2} \approx 0,176. \quad (21)$$

## Wnioski

Analiza spektralna pozwala na zbadanie wahań regularnych i nieregularnych rozpatrywanego zjawiska. Pozwala również na szacowanie precyzyjnych prognoz. Współczynnik Janusowy ma wartość mniejszą od 1, co oznacza, że prognoza jest trafna. Analiza spektralna stanowi narzędzie wyznaczania prognoz obarczonych nieistotnym błędem, co jest szczególnie przydatne w przypadku badania cen akcji na giełdzie i przewidywań ich wartości na okresy przyszłe. Analiza spektralna oparta na przedstawionej transformacie Fouriera pozwoliła zbadać autokorelację rozwoju procesu finansowego poddanego badaniu na podstawie krótkiego szeregu czasowego. Zanikające wahania przedstawionej funkcji spektralnej uzasadniają słuszność wykorzystania modelu do wyznaczenia prognoz kształtowania się zjawiska na przyszłość. Przedstawiona analiza pozwoliła na zbadanie poziomu zanikania wahań. Jednak do jej wad należy to, że nie ma możliwości przedstawienia czynników, które w istotny sposób mają wpływ na zanikanie wahań.

## Literatura

1. Czerwiński Z., Guzik B.: *Prognozowanie ekonometryczne*. PWE, Warszawa 1980.
2. Osińska M.: *Ekonometria finansowa*. PWE, Warszawa 2006.
3. Ostasiewicz W.: *Statystyczne metody analizy danych*. AE, Wrocław 1999.
4. Zeliś A., Pawełek B., Wanat S.: *Prognozowanie ekonomiczne. Teoria, przykłady, zadania*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2003.

## **ANALYSIS OF THE FLUCTUATION IN THE DYNAMICS OF THE PROCESSES FINANCED ON THE BASIS OF THE SPECTRAL DENSITY FUNCTION**

### **Summary**

The paper presents an analysis of the revenues from the Stock Exchange. The data covers the period from 2 November 2005 to 30 December 2005. A model was constructed, its stationary character was proved and its forecast was prepared – Janusowy ratio stands at less than 1, which means that the forecast is accurate.

**Adrianna Mastalerz-Kodzis**

# **MULTIUŁAMKOWY PROCES RUCHU BROWNA A FUNKCJA WEIERSTRASSA – PORÓWNANIE WYBRANYCH WŁASNOŚCI**

## **Wstęp**

Multiułamkowy proces ruchu Browna jest procesem stochastycznym wykorzystywanym m.in. do opisu zmian kursów giełdowych. Postać analityczna funkcji Weierstrassa to suma nieskończonego ciągu trygonometrycznego. Okazuje się jednak, że wspomniane dwa pojęcia wiele łączy. Czy można np. w analizach empirycznych zamiast dosyć skomplikowanego matematycznie procesu wykorzystywać funkcję Weierstrassa?

Celem opracowania jest zaprezentowanie wybranych własności multiułamkowego procesu ruchu Browna i jego uogólnienia oraz porównanie tych własności z własnościami funkcji Weierstrassa.

Opracowanie składa się z trzech części. W pierwszej przedstawiono podstawowe pojęcia analizy fraktalnej i multifraktalnej. W części drugiej zaprezentowano wybrane uogólnienie multiułamkowego procesu ruchu Browna, zaś w trzeciej pokazano związek pomiędzy omawianym ruchem Browna a standardową i uogólnioną funkcją Weierstrassa.

## **1. Multiułamkowy proces ruchu Browna i jego własności**

Obiekty fraktalne posiadają własność samopodobieństwa. Można je podzielić na części o takiej własności, że każda z nich stanowi pomniejszoną kopię ca-

łości. O samopodobieństwie mówi się wtedy, gdy każdy element obrazu zostaje pomniejszony lub powiększony w takim samym stosunku (zob. [6; 3]). Multi-fraktale (multifractals) opisują obiekty, których składowe nie muszą być pomniejszone w takiej samej skali.

Multiłamkowy proces ruchu Browna (ang. Multifractal Brownian Motion) został wprowadzony niezależnie przez Lévy Véhel i Peltier [8] oraz Benassi, Jaffard i Roux [2]. W definicji wykorzystuje się pojęcie funkcji Höldera.

Niech będzie dana funkcja  $f : D \rightarrow \mathfrak{R}$  ( $D \subset \mathfrak{R}$ ) oraz parametr  $\alpha \in (0,1)$ . Funkcja  $f : D \rightarrow \mathfrak{R}$  jest funkcją klasy  $C^\alpha$  Höldera ( $f \in C^\alpha$ ), jeżeli istnieją stałe  $c > 0$  oraz  $h_0 > 0$  takie, że dla każdego  $x$  oraz wszystkich  $h$  takich, że  $0 < h \leq h_0$  jest spełniona nierówność:

$$|f(x+h) - f(x)| \leq ch^\alpha. \quad (1)$$

Dalej, niech  $x_0$  będzie dowolnym punktem z dziedziny funkcji  $f$  ( $x_0 \in D \subset \mathfrak{R}$ ). Funkcja  $f : D \rightarrow \mathfrak{R}$  jest w punkcie  $x_0$  funkcją klasy  $C_{x_0}^\alpha$  Höldera ( $f \in C_{x_0}^\alpha$ ), jeżeli istnieją stałe  $\varepsilon, c > 0$  takie, że dla każdego  $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$  jest spełniona nierówność:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq c|x - x_0|^\alpha. \quad (2)$$

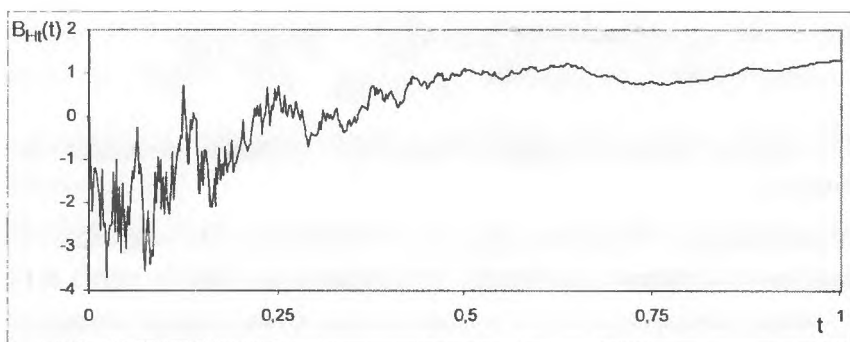
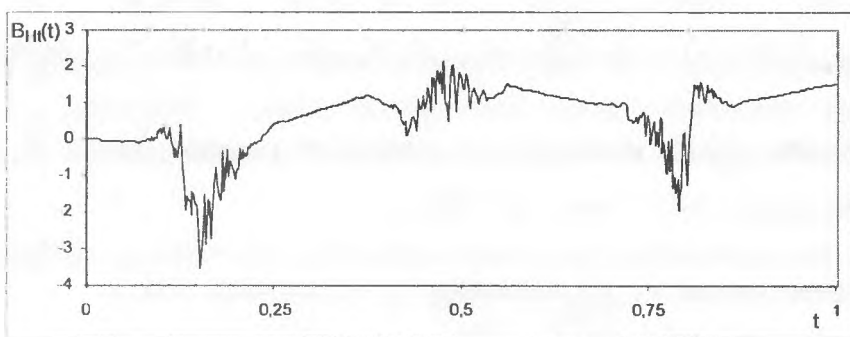
Punktowym wykładnikiem Höldera funkcji  $f$  w punkcie  $x_0$  nazywamy liczbę  $\alpha_f(x_0)$  daną wzorem  $\alpha_f(x_0) = \sup \left\{ \alpha : f \in C_{x_0}^\alpha \right\}$ . Funkcją Höldera dla funkcji  $f$  nazywamy funkcję, która każdemu punktowi  $x \in D$  przyporządkowuje liczbę  $\alpha_f(x)$ .

Niech  $H_t : [0, \infty) \rightarrow (0,1)$  będzie funkcją Höldera o wykładniku  $\alpha > 0$ .

Multiłamkowym procesem ruchu Browna z parametrem funkcyjnym  $H_t$  nazywamy proces stochastyczny  $B_{H_t}(t)$  zdefiniowany dla  $t \geq 0$  wzorem:

$$B_{H_t}(t) = \frac{1}{\Gamma(H_t + \frac{1}{2})} \left\{ \int_{-\infty}^0 [(t-s)^{H_t-\frac{1}{2}} - (-s)^{H_t-\frac{1}{2}}] dB(s) + \int_0^t (t-s)^{H_t-\frac{1}{2}} dB(s) \right\}, \quad (3)$$

gdzie  $B$  jest standardowym procesem ruchu Browna.

a)  $H(t) = \sin t + 1/100$ b)  $H(t) = 0,9 (\cos^2(10t) + 0,1)$ 

Rys. 1. Realizacja multiłamkowego procesu ruchu Browna

Powyższy proces ma m.in. następujące własności (zob. [8; 1]).

1. Proces nie ma przyrostów stacjonarnych, gdy funkcja Höldera nie jest funkcją stałą.
2. Jeśli  $H$  jest funkcją Höldera, to multiłamkowy proces ruchu Browna  $B_{H_t}(t)$  dla  $t \geq 0$  jest ciągłą funkcją zmiennej  $t$  (z prawdopodobieństwem równym jeden).
3. Im wartości funkcji Höldera są bliższe zera, tym wykres jest bardziej nieregularny, postrzępiony, o wyższym wymiarze fraktalnym; dla wartości funkcji  $H$ , bliskich jedynki proces jest gładszy.
4. Proces nie jest samopodobny, jest lokalnie asymptotycznie samopodobny, tzn.:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{B_{H_t}(t + \varepsilon u) - B_{H_t}(t)}{\varepsilon^{H(t)}} \right\}_{u \geq 0} \stackrel{d}{=} \{B_{H_t}(t)\}_{u \geq 0}$$

( $\stackrel{d}{=}$  oznacza równość względem wszystkich rozkładów skończenie wymiarowych).

Wprowadzono dodatkowe założenie, a mianowicie dla wszystkich  $t \geq 0$  wartości funkcji Höldera ograniczono do przedziału  $0 < H(t) < \min(1, \alpha)$ . Wtedy z prawdopodobieństwem równym jeden są prawdziwe poniższe własności:

1. Dla dowolnego przedziału  $[a, b] \subset \mathbb{R}^+$  wymiar pojemnościowy i Hausdorffa wykresu trajektorii procesu  $B_{H_t}(t)$  wynosi (zob. [6]):

$$\dim_{\text{Haus}} \{ \{t, B_{H_t}(t) : t \in [a, b]\} \} = \dim_{\text{Box}} \{ \{t, B_{H_t}(t) : t \in [a, b]\} \} = 2 - \min_{t \in [a, b]} \{H(t)\}.$$

2. Lokalny wymiar pojemnościowy i Hausdorffa trajektorii procesu  $B_{H_t}(t)$  dla każdego  $t_0 \geq 0$  wynosi  $2 - H(t_0)$ .
3. Z prawdopodobieństwem równym jeden punktowy wykładnik Höldera trajektorii procesu  $B_{H_t}(t)$  dla każdego  $t_0 \geq 0$  jest równy  $H(t_0)$ .
4. Funkcja  $B_{H_t}(t)$  jest ciągła.

## 2. Uogólniony multiułamkowy proces ruchu Browna

W multiułamkowym procesie ruchu Browna funkcja Höldera była funkcją ciągłą, a zatem mierzona tą funkcją regularność trajektorii procesu również zmieniała się w sposób ciągły. Uogólnienie procesu ruchu Browna polega na zastąpieniu ciągłej funkcji Höldera funkcją nieciągłą (zob. [1]).

Funkcję  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nazywamy funkcją Höldera typu  $(\alpha, c)$ , gdzie  $\alpha, c > 0$ , wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych  $t_1, t_2$  takich, że  $|t_1 - t_2| < 1$  zachodzi nierówność:

$$|h(t_1) - h(t_2)| \leq c |t_1 - t_2|^\alpha. \quad (4)$$

Niech  $H$  będzie zbiorem funkcji  $H$  zdefiniowanych na  $\mathfrak{R}$  takich, że  $H(t) = \liminf_{n \rightarrow \infty} H_n(t)$ , gdzie  $(H_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  jest ciągiem funkcji Höldera typu  $(\alpha, c_n)$ , funkcji o wartościach z przedziału  $[a, b] \subset [0, 1]$  i spełniających poniższe własności:

1. Dla każdego  $\varepsilon > 0$  i  $t_0$  istnieje  $n_0 = n_0(t_0, \varepsilon)$  oraz  $h_0 = h_0(t_0, \varepsilon) > 0$  takie, że dla  $n \geq n_0$  i  $|h| \leq h_0$  zachodzi nierówność  $H_n(t_0 + h) \geq H(t_0) - \varepsilon$ .
2. Dla każdego  $t$   $H(t) < \alpha$  oraz  $c_n = 0(n)$ .

Niech funkcja  $H$  o wartościach  $H(t) = \liminf_{n \rightarrow \infty} H_n(t)$  będzie funkcją ze zbioru  $H$  i niech  $\lambda > 1$ . Uogólnionym multiułamkowym procesem ruchu Browna (ang. generalized multifractional Brownian motion) z parametrem funkcyjnym  $H(t)$  i  $\lambda$  liczbą rzeczywistą nazywamy proces  $\{B_{H,\lambda}(t)\}_{t \in \mathfrak{R}}$ , taki, że dla każdego  $t \in \mathfrak{R}$ :

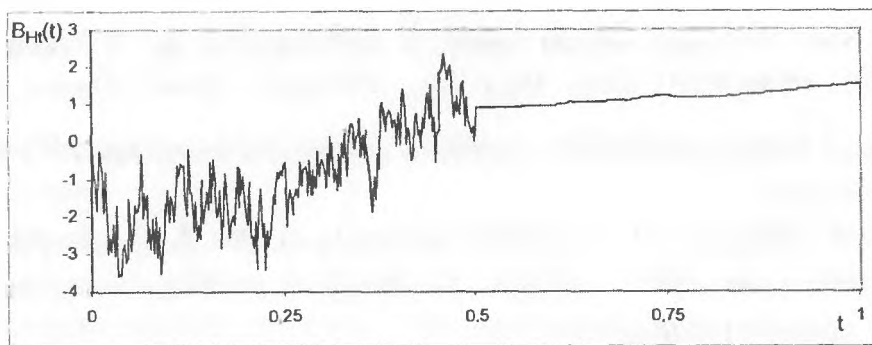
$$B_{H,\lambda}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{D_n} \frac{e^{it\xi} - 1}{|\xi|^{H_n(t)+0,5}} dB(\xi), \quad (5)$$

gdzie  $D_0 = \{\xi : |\xi| < 1\}$  oraz dla wszystkich  $n \geq 1$   $D_n = \{\xi : \lambda^{n-1} \leq |\xi| < \lambda^n\}$ .

Przykłady funkcji należących do zbioru  $H$  można znaleźć w pracy [1]. Uogólniony multiułamkowy proces ruchu Browna jest procesem zależnym nie tylko od funkcji  $H(t)$ , ale także od ciągu  $H_n(t)$ . Autorzy definiują ułamkowy proces ruchu Browna jako całkę stochastyczną po procesie ruchu Browna w następujący sposób (zob. także [7; 5]):

$$B_H(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it\xi} - 1}{|\xi|^{H+0,5}} dB(\xi). \quad (6)$$

Gdy w powyższym wzorze zastąpimy  $H$  funkcją nieciągłą, to uzyskamy nieciągły proces stochastyczny.



Rys. 2. Realizacja uogólnionego multiłamkowego procesu ruchu Browna

$$H(t) = \begin{cases} 0,1 & \text{dla } t \in [0, 1/2] \\ 0,9 & \text{dla } t \in (1/2, 1] \end{cases}$$

Niech  $\{B_{H,\lambda}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  będzie uogólnionym multiłamkowym procesem ruchu Browna z parametrem funkcyjnym  $H(t)$  i  $\lambda > 1$ . Niech  $t_0$  będzie wybraną rzeczywistą wartością oraz niech  $\alpha_{B_{H,\lambda}}(t_0)$  będzie wykładnikiem Höldera procesu  $\{B_{H,\lambda}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  w punkcie  $t_0$ . Z prawdopodobieństwem równym jeden zachodzi równość  $\alpha_Y(t_0) = H(t_0)$ .

### 3. Funkcja Weierstrassa i jej uogólnienie

Poniżej podano przykład funkcji o stałym wykładniku Höldera w każdym punkcie dziedziny (funkcji Weierstrassa) oraz przykład funkcji, dla której wykładnik ten nie jest stały w całej dziedzinie (uogólnionej funkcji Weierstrassa) (zob. [4; 9]).

Funkcją Weierstrassa nazywamy funkcję dla  $x \in \mathbb{R}$  daną wzorem:

$$W(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-ks} \sin(\lambda^k x), \quad (7)$$

gdzie  $\lambda > 0$  oraz  $s \in (0,1)$ .

Funkcja Weierstrassa jest funkcją ciągłą, ale nie ma pochodnej w żadnym punkcie dziedziny (zob. [4]). Jest to funkcja klasy  $C^s$ , zatem wymiar Hausdorffa wykresu funkcji spełnia nierówność:

$$\dim_{\text{Haus}}(\text{Graph } W) \leq 2 - s$$

(przypuszcza się, że wymiar ten jest równy liczbie  $(2 - s)$ , ale jeszcze nie zostało to dowiedzione).

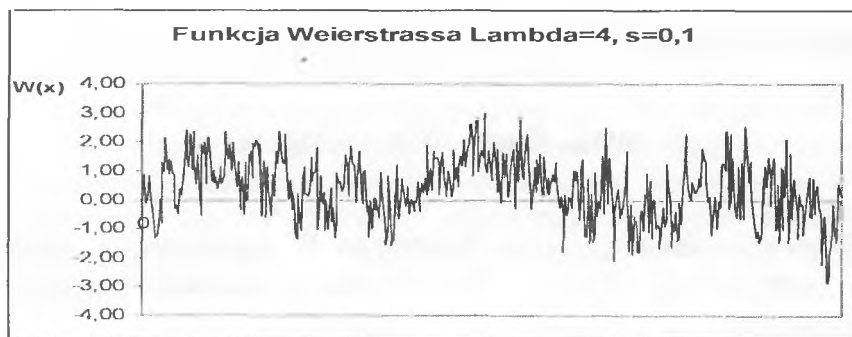
Wykres funkcji  $W$  zacieśnionej do przedziału  $[a, b]$  dla dowolnych  $a, b \in \mathbb{R}$  ma wymiar pojemnościowy równy liczbie  $(2 - s)$ :

$$\dim_{\text{Box}}(\text{Graph } W) = 2 - s$$

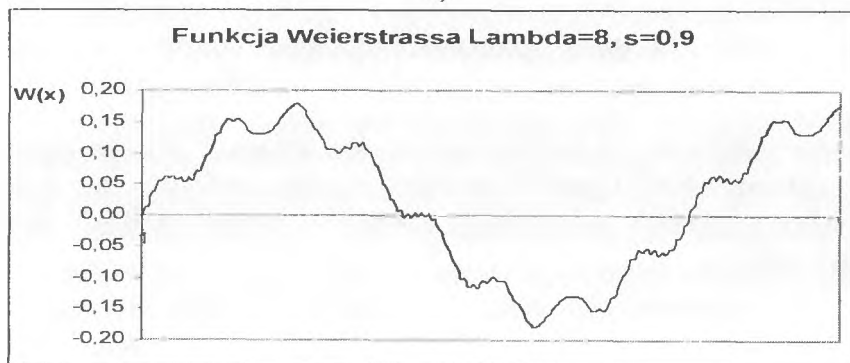
oraz dla każdego  $x \in [a, b]$  wymiar pojemnościowy funkcji w punkcie jest stały, równy  $(2 - s)$ :

$$\dim_{\text{Box}}^x(\text{Graph } W) = 2 - s.$$

Zatem wykres funkcji Weierstrassa jest fraktalem o wymiarze pojemnościowym równym 1,5. Punktowy wykładnik Höldera w każdym punkcie dziedziny przyjmuje taką samą wartość równą  $\alpha_W(x) = s$ .



a)



b)

Rys. 3. Przybliżony wykres funkcji Weierstrassa (nieskończony szereg trygonometryczny zastąpiono 10-elementową sumę częściową)

Funkcję Weierstrassa można uogólnić, przyjmując w zamian za stały parametr  $s \in (0,1)$  funkcję ciągłą. Niech zatem  $a, b \in \mathfrak{R}$ ,  $[a, b] \subset (0,1)$ . Dalej, niech  $s: [0,1] \rightarrow [a, b]$  będzie funkcją ciągłą dla każdego  $x \in [0,1]$  spełniającą nierówność  $s(x) < \alpha_s(x)$ . Ponadto, niech istnieje stała  $M > 0$  taka, aby dla każdego  $(t, u) \in [0,1] \times [0,1]$  zachodziła nierówność:

$$|s(t) - s(u)| \leq M|t - u|^{\alpha_s(t)}.$$

Wtedy dla dostatecznie dużej i nieparzystej liczby  $\lambda > 0$  dla uogólnionej funkcji Weierstrassa w postaci:

$$\tilde{W}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-ks(x)} \sin(\lambda^k x) \quad (8)$$

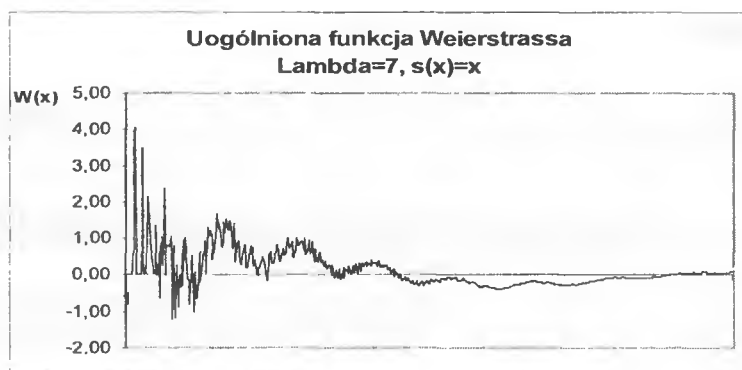
jest spełniona równość:

$$2 - \dim_{\text{Box}}^x(\text{Graph } \tilde{W}) = \alpha_{\tilde{W}}(x) = s(x).$$

Rozważmy uogólnioną funkcję Weierstrassa  $\tilde{W}$  zacieśnioną do przedziału  $[0,1]$  z ciągłą funkcją  $s(x) = x$ . Lokalny wymiar pojemnościowy wykresu tej funkcji wynosi:

$$\dim_{\text{Box}}^x(\text{Graph } \tilde{W}) = 2 - s(x).$$

Wykres uogólnionej funkcji Weierstrassa jest fraktalem. Wymiar pojemnościowy wykresu funkcji w punkcie jest różny w różnych punktach. Jest to przykład funkcji o różnych wykładnikach Höldera w różnych punktach wykresu  $\alpha_f(x) = s(x)$ .



Rys. 4. Uogólniona funkcja Weierstrassa

## Podsumowanie

W opracowaniu rozważano wybrane własności dwóch przekształceń: multiułankowego procesu ruchu Browna i jego uogólnienia oraz standardowej i uogólnionej funkcji Weierstrassa. Proces stochastyczny jest generowany przez funkcję Höldera; to własności tej funkcji odpowiadają za stopień regularności (wymiar fraktalny wykresu), natomiast czynnikiem wskazującym na regularność w funkcji Weierstrassa jest  $s(x)$ . Pokazano podobieństwa pomiędzy własnościami omawianych przekształceń, w szczególności wskazano na równość wymiarów fraktalnych.

Jakie własności posiadałaby funkcja  $\tilde{W}(x)$  zadana wzorem (9), gdyby funkcja  $s$  była nieciągła? Czy byłby to odpowiednik uogólnionego multiułankowego procesu ruchu Browna? Można przypuszczać, że większość własności fraktalnych nie uległaby zmianie, w szczególności wymiar pojemnościowy.

Czy można zatem zamiast procesu stochastycznego, jakim jest multiułankowy proces ruchu Browna w analizach empirycznych, stosować łatwiejszą w sensie obliczeniowym funkcję Weierstrassa? Wydaje się, że taka zamiana jest możliwa. Wartości funkcji Höldera – punktowe wykładniki Höldera – są interpretowane jako miary ryzyka punktowego (w otoczeniu dowolnego punktu wykresu); wartości funkcji  $s$  ze wzoru (9) można także traktować jako lokalne mierniki ryzyka.

## Literatura

1. Ayache A., Lévy Véhel J.: *Generalized Multifractional Brownian Motion: Definition and Preliminary Results*. W: *Fractals: Theory and Applications in Engineering*. Red. M. Dekking, J. Lévy Véhel, E. Lutton, C. Tricot. Springer-Verlag, New York 1999.
2. Benassi A., Jaffard S., Roux D.: *Gaussian Processes and Pseudodifferential Elliptic Operators*. „Rev. Mat. Iberoamericana” 1997, 13 (1), 19-89.
3. Daoudi K., Lévy Véhel J., Meyer Y.: *Construction of Continuous Functions with Prescribed Local Regularity*. „Journal of Constructive Approximations” 1998, 014(03), 349-385.
4. Falconer K.J.: *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley & Sons, New York 1990.
5. Hunt G.A.: *Random Fourier Transforms*. „Trans. Amer. Math. Soc.” 1951, 71, 38-69.
6. Mandelbrot B.B.: *Fractals and Scaling in Finance. Discontinuity, Concentration, Risk*. Springer-Verlag, New York 1997.
7. Mandelbrot B.B., Van Ness J.W.: *Fractional Brownian Motion, Fractional Noises and Applications*. „SIAM Review” 1968, Vol. 10, No. 4, October, 422-437.
8. Peltier R.F., Lévy Véhel J.: *Multifractional Brownian Motion: Definition and Preliminary Results*. INRIA Recquencourt, Rapport de recherche No. 2645, 1995.
9. Zawadzki H.: *Fraktale na rynkach finansowych. Część druga*. Praca naukowo-badawcza zrealizowana w ramach badań własnych, Katowice 1999.

## MULTIFRACTIONAL BROWNIAN MOTION AND WEIERSTRASS FUNCTION – COMPARISON OF THE SELECTED PROPERTIES

### Summary

In this article we compare the selected properties of Multifractional Brownian Motion and Generalised Weierstrass Function. As it turned out the main fractional properties are the same (for example the local fractional dimension). So, we have concluded that it is possible to replace the Multifractional Brownian Motion by the Generalised Weierstrass Function.

**Jerzy Mika**

# **O LINEARYZACJI I ROZWIĄZANIACH UOGÓLNIONYCH ZADAŃ OPTYMALIZACJI ILORAZOWEJ**

## **Wprowadzenie**

Istotnym zarówno z teoretycznego, jak i praktycznego punktu widzenia przypadkiem szczególnym zadań optymalizacyjnych wykorzystywanych w procesach wspomagania podejmowania decyzji ekonomicznych są tzw. zadania optymalizacji ilorazowej, czyli zadania optymalizacyjne charakteryzujące się tym, że ich zbiorem rozwiązań dopuszczalnych jest zbiór rozwiązań pewnego układu równań i nierówności liniowych, a funkcja kryterium jest ilorazem form liniowych zmiennych decyzyjnych rozpatrywanego zadania optymalizacyjnego. Zadania optymalizacyjne tego typu są jednym z nieliniowych uogólnień zadań optymalizacji liniowej. Racjonalnym uzasadnieniem istotności modeli optymalizacji ilorazowej jest m.in. to, iż są one naturalnym krokiem w uogólnianiu i doskonaleniu idei i metod programowania matematycznego. Ilorazowy charakter funkcji kryterium tego typu zagadnień optymalizacyjnych, jak wykazują szczegółowe analizy rozpatrywanego problemu decyzyjnego, może umożliwiać efektywne stosowanie niektórych standardowych i specjalnych algorytmów optymalizacji liniowej do rozwiązywania tego typu zagadnień optymalizacyjnych. Algorytmy optymalizacji ilorazowej mogą ponadto, nie tylko potencjalnie, lecz również efektywnie, być wykorzystywane jako podprogramy w bardziej ogólnych algorytmach optymalizacji nieliniowej. W związku z powyższym uprawniona jest konstatacja, że wyodrębnienie zadań optymalizacji ilorazowej z ogólnych badań dotyczących optymalizacji nieliniowej jest uzasadnione zarówno ze względów teoretycznych, jak i praktycznych i można w tym zakresie oczekiwać oryginalnych wyników badawczych.

W dalszych rozważaniach niniejszego opracowania zostanie zaprezentowana oryginalna propozycja praktycznego zastosowania wybranych idei ogólnej teorii optymalizacji nieliniowej z efektywnym zastosowaniem procedury tzw. metody uogólnionych macierzy odwrotnych dla zadań optymalizacji ilorazowej.

## 1. Zadania optymalizacji ilorazowej

Rozpatrywane i analizowane zadania optymalizacji ilorazowej należą do bardziej ogólnej i obszernej klasy zadań optymalizacyjnych z liniowym układem warunków ograniczających. Mają następującą postać ogólną:

$$\min \left\{ f(X) = \frac{C_1 X + \alpha}{C_2 X + \beta}; A_1 X = b_1 \wedge A_2 X \leq b_2 \right\}$$

Dla dalszych szczegółowych rozważań merytorycznych związanych z analizami czysto teoretycznymi oraz w odniesieniu do zastosowań utylitarnych tego typu zadań optymalizacyjnych oddzielne znaczenie mają następujące dwie szczególne postacie sformułowanego wyżej zadania:

- postać kanoniczna zadania optymalizacji ilorazowej z liniowym układem warunków ograniczających:

$$\min \left\{ \frac{C_1 X + \alpha}{C_2 X + \beta}; AX = b \wedge X \geq \Theta \right\}$$

- postać standardowa zadania optymalizacji ilorazowej z liniowym układem warunków ograniczających:

$$\min \left\{ \frac{C_1 X + \alpha}{C_2 X + \beta}; AX \leq b \wedge X \geq \Theta \right\}$$

Zadania optymalizacyjne dwóch powyższych wyodrębnionych postaci są oczywiście szczególnymi przypadkami pierwotnej, ogólnej postaci rozpatrywanego zadania optymalizacji ilorazowej. Ponadto, doniosłe i niebanalne znaczenie praktyczne ma fakt, że zadania optymalizacji nieliniowej powyższej postaci są często występującymi przypadkami zadań optymalizacji nieliniowej w zastosowaniach praktycznych związanych zwłaszcza z niektórymi ideami w optymalizacji.

zacji wielokryterialnej i koncepcjami maksymalnej efektywności w procesach wspomagania podejmowania optymalnych decyzji przy wielorakości celów.

Dalsze analizy rozpatrywanej klasy nieliniowych zadań optymalizacyjnych w postaci kanonicznej z liniowym układem warunków ograniczających będą uwzględniać ich przynależność do klasy tzw. zadań optymalizacji wypukłej. Zasadność powyższej uwagi wynika z wypukłości funkcji kryterium

$$f(X) = \frac{C_1 X + \alpha}{C_2 X + \beta} \text{ na następującym niepustym i ograniczonym zbiorze rozwiązań dopuszczalnych:}$$

$$D = \{\bar{X} \in R^n ; AX = b \wedge X \geq \Theta\}$$

$$\text{Postulowany warunek wypukłości funkcji kryterium } f(X) = \frac{C_1 X + \alpha}{C_2 X + \beta}$$

ma przy tym następującą szczegółową postać analityczną:

$$\bigwedge_{X_1, X_2 \in R^n} \bigwedge_{0 \leq \lambda \leq 1} \{f[\lambda X^1 + (1-\lambda)X^2] \leq \lambda f(X^1) + (1-\lambda)f(X^2)\}$$

czyli:

$$\bigwedge_{X_1, X_2 \in R^n} \bigwedge_{0 \leq \lambda \leq 1} \left\{ \frac{C_1 [\lambda X^1 + (1-\lambda)X^2] + \alpha}{C_2 [\lambda X^1 + (1-\lambda)X^2] + \beta} \leq \lambda \frac{C_1 X_1 + \alpha}{C_2 X_1 + \beta} + (1-\lambda) \frac{C_1 X_2 + \alpha}{C_2 X_2 + \beta} \right\}$$

Analizowana klasa zadań optymalizacji ilorazowej w postaci kanonicznej z liniowym układem warunków ograniczających spełnia dodatkowo, wymagane w dalszych analizach, założenie klasy różniczkowalności  $C''$  wypukłej funkcji

$$\text{kryterium } f(X) = \frac{C_1 X + \alpha}{C_2 X + \beta} \text{ na zbiorze rozwiązań dopuszczalnych } D. \text{ Oznacza to, że funkcja kryterium rozpatrywanego zadania optymalizacji nieliniowej}$$

ma ciągle wszystkie pochodne cząstkowe rzędu pierwszego na zbiorze rozwią-

zań dopuszczalnych. Spełnienie tego dodatkowego założenia pozwoli efektywnie stosować metody rachunku różniczkowego w analizach dotyczących zadań optymalizacyjnych rozpatrywanej postaci i wykorzystywać podstawowe idee metody uogólnionych macierzy odwrotnych.

## 2. Koncepcja metody kierunków dopuszczalnych w optymalizacji ilorazowej

Wyznaczanie optymalnych rozwiązań nieliniowych zadań optymalizacyjnych może być dokonywane poprzez wykorzystywanie do tego celu wielu konkurencyjnych metod wypracowanych przez teorię optymalizacji nieliniowej. Podstawowe znaczenie w tym zakresie ma tzw. metoda kierunków dopuszczalnych, która może być wykorzystana do rozwiązywania sformułowanych w poprzednim punkcie szczególnych zadań optymalizacji ilorazowej, spełniających wszystkie sformułowane wyżej założenia dodatkowe. Motywem przewodnim postępowania optymalizacyjnego jest ogólna idea metody kierunków dopuszczalnych (por. np. [16]) polegająca na zastosowaniu iteracyjnej procedury generowania kolejnych rozwiązań dopuszczalnych rozpatrywanego zadania optymalizacyjnego. Wymaga się przy tym, aby generowane rozwiązania były coraz lepsze w sensie kryterium optymalizacyjnego. Generowanie kolejnych rozwiązań dopuszczalnych w rozpatrywanej metodzie optymalizacyjnej odbywa się przy tym poprzez przemieszczanie się z wcześniej ustalonych lub wyznaczonych rozwiązań dopuszczalnych:

$$X^k \in D \text{ dla } k = 0, 1, 2, \dots$$

do kolejnych rozwiązań dopuszczalnych  $X^{k+1} \in D$  w odpowiednio wyznaczonych kierunkach nazywanych kierunkami użytecznymi dla minimalizacji funkcji

$$f(X) = \frac{C_1 X + \alpha}{C_2 X + \beta}, \text{ nazywanymi alternatywnie kierunkami stosowanymi dla}$$

minimalizacji albo też kierunkami dopuszczalnymi i stosowanymi dla minimalizacji funkcji kryterium

$$f(X) = \frac{C_1 X + \alpha}{C_2 X + \beta} \text{ na zbiorze rozwiązań dopuszczalnych}$$

$D$  oraz dla rozwiązania  $X^k \in D$ . W konsekwencji stwierdzamy, że kierunkiem użytecznym dla minimalizacji funkcji

$$f(X) = \frac{C_1 X + \alpha}{C_2 X + \beta} \text{ będzie}$$

dowolny wektor  $v \in R^n$ , spełniający następujący warunek:

$$\bigvee_{0 < \Delta \in R} \bigwedge_{\delta < \Delta} [X + \delta v \in D \wedge f(X + \delta v) < f(X)]$$

który po uwzględnieniu konkretnej postaci analitycznej ilorazowej funkcji kryterium przyjmuje postać:

$$\bigvee_{0 < \Delta \in R} \bigwedge_{\delta < \Delta} [X + \delta v \in D \wedge \frac{C_1(X + \delta v^T) + \alpha}{C_2(X + \delta v^T) + \beta} < \frac{C_1X + \alpha}{C_2X + \beta}]$$

Z ogólnych idei z zakresu teorii optymalizacji wynika, że dla zadań optymalizacji ilorazowej rozpatrywanego typu spełniającego przyjęte wyżej warunki dodatkowo wektor  $v \in R^n$  będzie kierunkiem użytecznym dla minimalizacji funkcji  $f(X) = \frac{C_1X + \alpha}{C_2X + \beta}$  na zbiorze rozwiązań dopuszczalnych  $D$  oraz dla rozwiązania  $X^k \in D$  wtedy, gdy:

$$\left\langle \frac{(C_2X^k + \alpha)C_1 - (C_1X^k + \alpha)C_2}{(C_2X^k + \beta)^2}, v \right\rangle < 0 \wedge \bigvee_{0 < \Delta \in R} \bigwedge_{\delta < \Delta} X^k + \delta v \in D$$

gdzie:

$\langle \bullet, \bullet \rangle$  – symbol iloczynu skalarnego dwóch wektorów,

$\frac{(C_2X^k + \alpha)C_1 - (C_1X^k + \alpha)C_2}{(C_2X^k + \beta)^2}$  – gradient funkcji w punkcie  $X^k \in D$ .

Wobec powyższych faktów można stwierdzić, że dla dowolnych rozwiązań dopuszczalnych  $X^k \in D \wedge X \in D$  rozpatrywanego zadania optymalizacji ilorazowej wektor:

$$v_k(X) = X - X^k$$

będzie kierunkiem użytecznym dla minimalizacji kwadratowej funkcji kryterium

$f(X) = \frac{C_1 X + \alpha}{C_2 X + \beta}$  na niepustym i ograniczonym zbiorze rozwiązań dopuszczalnych  $D$  oraz dla rozwiązania dopuszczalnego  $X^k \in D$ , wtedy i tylko wtedy,

gdy będzie spełniony warunek:

$$\left\langle \frac{(C_2 X^k + \alpha)C_1 - (C_1 X^k + \alpha)C_2}{(C_2 X^k + \beta)^2}, v_k(X) \right\rangle < 0$$

którego ostateczna postać jest następująca:

$$\left\langle \frac{(C_2 X^k + \alpha)C_1 - (C_1 X^k + \alpha)C_2}{(C_2 X^k + \beta)^2}, X \right\rangle \leq \left\langle \frac{(C_2 X^k + \alpha)C_1 - (C_1 X^k + \alpha)C_2}{(C_2 X^k + \beta)^2}, X^k \right\rangle$$

Powyższa nierówność będzie spełniona w szczególności dla wektora  $X \in R^n$  będącego optymalnym rozwiązaniem następującego zadania optymalizacji liniowej postaci kanonicznej:

$$\min \left\{ \left\langle \frac{(C_2 X^k + \alpha)C_1 - (C_1 X^k + \alpha)C_2}{(C_2 X^k + \beta)^2}, X \right\rangle; X \in D \right\}$$

Dodatkowo, wektor spełniający powyższą formułę można przedstawić alternatywnie w postaci następującej formuły równoważnej:

$$\tilde{X}^k = \arg \min \left\{ \left\langle \frac{(C_2 X^k + \alpha)C_1 - (C_1 X^k + \alpha)C_2}{(C_2 X^k + \beta)^2}, X \right\rangle; X \in D \right\}$$

Ponadto  $X^k \in D \wedge \tilde{X}^k \in D$  oraz zbiór rozwiązań dopuszczalnych  $D$  jako zbiór rozwiązań odpowiedniego układu równań i nierówności liniowych jest zbiorem wypukłym. W związku z tym można stwierdzić, że również wszystkie punkty leżące na odcinku łączącym punkty  $X^k$  oraz  $\tilde{X}^k$  należą do zbioru rozwiązań dopuszczalnych rozpatrywanego zadania optymalizacyjnego, a więc:

$$\bigwedge_{0 \leq \rho \leq 1} X^k + \rho(\tilde{X}^k - X^k) = X^k + \rho v_k(\tilde{X}^k) \in D$$

Jeżeli ponadto liczba rzeczywista  $0 \leq \rho_k \leq 1$  będzie optymalnym przesunięciem rozwiązania dopuszczalnego  $X^k \in D$  w kierunku wektora  $v_k(\tilde{X}^k)$  na odcinku łączącym punkty  $X^k$  oraz  $\tilde{X}^k$ , dla minimalizacji wypukłej funkcji kryterium  $f(X) = \frac{C_1 X + \alpha}{C_2 X + \beta}$  na niepustym i ograniczonym zbiorze rozwiązań dopuszczalnych  $D$ , co oznacza, że:

$$\rho_k = \arg \min_{0 \leq \rho \leq 1} \left\{ \frac{C_1 [X^k + \rho(\tilde{X}^k - X^k)] + \alpha}{C_2 [X^k + \rho(\tilde{X}^k - X^k)] + \beta} \right\}$$

dodatkowo stwierdzamy, że:

$$X^{k+1} = X^k + \rho_k(\tilde{X}^k - X^k)$$

i ostatecznie otrzymujemy następującą nierówność:

$$\frac{C_1 X^{k+1} + \alpha}{C_2 X^{k+1} + \beta} \leq \frac{C_1 X^k + \alpha}{C_2 X^k + \beta}$$

Na podstawie powyższych wywodów wnioskujemy, że jeżeli początkowym, nazywanym również startowym, rozwiązaniem scharakteryzowanego tu postępowania iteracyjnego będzie następujący wektor:

$$X^k = X^0 \in D$$

natomiast dla  $k = k + 1$  (dla  $k = 0, 1, 2, \dots$ ), można otrzymać następujący ciąg rozwiązań dopuszczalnych rozpatrywanego zadania optymalizacji ilorazowej:

$$\{X^k\}_{k=0,1,2,\dots}$$

przy czym będzie spełniony następujący ciąg nierówności nieliniowych:

$$\dots \leq \frac{C_1 X^{k+1} + \alpha}{C_2 X^{k+1} + \beta} \leq \frac{C_1 X^k + \alpha}{C_2 X^k + \beta} \leq \dots \leq \frac{C_1 X^1 + \alpha}{C_2 X^1 + \beta} \leq \frac{C_1 X^0 + \alpha}{C_2 X^0 + \beta}$$

Można dodatkowo wykazać, że dla określonego jednoznacznie w przedstawionym wyżej sposób ciągu rozwiązań dopuszczalnych  $\{X^k\}_{k=0,1,2,\dots}$  dla rozpatrywanego wypukłego zadania optymalizacji kwadratowej z liniowym układem warunków ograniczających zachodzi finalnie:

$$\bigvee_{k_0 \in N} X^{k_0} = \arg \min \left\{ \frac{C_1 X + \alpha}{C_2 X + \beta}; X \in D \right\}$$

co oznacza, że przy spełnieniu wszystkich przyjętych założeń dotyczących rozpatrywanego nieliniowego procesu optymalizacyjnego ciąg rozwiązań dopuszczalnych  $\{X^k\}_{k=0,1,2,\dots}$ , określony zgodnie z przedstawioną wcześniej procedurą iteracyjną, jest zbieżny w skończonej ilości kroków do poszukiwanego rozwiązania optymalnego rozpatrywanego nieliniowego zadania optymalizacyjnego lub:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X^k = \arg \min \left\{ \frac{C_1 X + \alpha}{C_2 X + \beta}; X \in D \right\}$$

co oznacza, że przy spełnieniu wszystkich przyjętych założeń dotyczących rozpatrywanego nieliniowego procesu optymalizacyjnego ciąg rozwiązań dopuszczalnych  $\{X^k\}_{k=0,1,2,\dots}$ , generowany zgodnie z przedstawioną wcześniej procedurą iteracyjną, jest zbieżny w nieskończonej ilości kroków do poszukiwanego rozwiązania optymalnego nieliniowego zadania optymalizacji ilorazowej rozpatrywanej postaci.

### 3. Linearyzacja zadań optymalizacji ilorazowej

Zaprezentowane wyżej szczegółowe rozważania dotyczące koncepcji rozpatrywanej metody kierunków dopuszczalnych w optymalizacji ilorazowej umożliwiają obecnie sformułowanie konkretnej propozycji autorskiej wersji standardowego algorytmu tzw. metody Franka i Wolfe'a do wyznaczania optymalnych rozwiązań dla rozpatrywanej klasy nieliniowych zadań optymalizacyjnych w postaci kanonicznej z liniowym układem warunków ograniczających

z dodatkowym założeniem, że funkcja kryterium  $f(X) = \frac{C_1 X + \alpha}{C_2 X + \beta}$  będzie na zbiorze rozwiązań dopuszczalnych  $D$ , klasy różniczkowalności  $C^1$ , czyli że funkcja ta ma na zbiorze rozwiązań dopuszczalnych ciągle wszystkie pochodne cząstkowe rzędu pierwszego.

### Krok wstępny

Wyznaczyć dowolne rozwiązanie dopuszczalne rozpatrywanego nieliniowego zadania optymalizacji ilorazowej, czyli punkt  $X^0 \in D$ , który w dalszych procedurach będzie traktowany jako początkowe rozwiązanie startowe.

### Krok 0

Dowolną efektywną metodą optymalizacji liniowej wyznaczyć wektor spełniający następujący warunek:

$$\tilde{X}^0 = \arg \min \left\{ \left\langle \frac{(C_2 X^0 + \alpha)C_1 - (C_1 X^0 + \alpha)C_2}{(C_2 X^0 + \beta)^2}, X \right\rangle; X \in D \right\}$$

a następnie wektor w postaci:

$$X^1 = X^0 + \rho_0(\tilde{X}^0 - X^0)$$

gdzie:

$$\rho_0 = \arg \min_{0 \leq \rho \leq 1} \left\{ \frac{C_1 [X^0 + \rho(\tilde{X}^0 - X^0)] + \alpha}{C_2 [X^0 + \rho(\tilde{X}^0 - X^0)] + \beta} \right\}$$

Kontynuując, w proponowanej procedurze optymalizacyjnej rekomenduje się następujące uogólnienie dla dowolnego  $k$ -tego kroku:

### Krok $k$ dla ( $k \geq 1$ )

Wyznaczyć następujący wektor:

$$\tilde{X}^k = \arg \min \left\{ \left\langle \frac{(C_2 X^k + \alpha)C_1 - (C_1 X^k + \alpha)C_2}{(C_2 X^k + \beta)^2}, X \right\rangle; X \in D \right\}$$

a następnie wektor w postaci:

$$X^{k+1} = X^k + \rho_k (\tilde{X}^k - X^k)$$

gdzie:

$$\rho_k = \arg \min_{0 \leq \rho \leq 1} \left\{ \frac{C_1 [X^k + \rho_k (\tilde{X}^k - X^k)] + \alpha}{C_2 [X^k + \rho_k (\tilde{X}^k - X^k)] + \beta} \right\}$$

Opierając się na zaprezentowanych wyżej faktach z zakresu teorii metod kierunków dopuszczalnych w optymalizacji ilorazowej, w następnej kolejności wnioskujemy konsekwentnie, że jeżeli dla konkretnego rozpatrywanego nieliniowego zadania optymalizacyjnego sformułowany wyżej algorytm metody Franka i Wolfe'a będzie skończony, to postępowanie algorytmiczne polegające na iteracyjnym generowaniu odpowiednich rozwiązań dopuszczalnych powinno być kontynuowane do wystąpienia następującej równości dla pewnej liczby naturalnej  $p$ :

$$X^p = X^{p-1}$$

Ponadto, na podstawie znanych własności algorytmu wnioskujemy, że w tym przypadku będzie dodatkowo spełniona następująca formuła:

$$\bigwedge_{q > p} X^q = X^{p-1}$$

co w rezultacie, zgodnie z odpowiednią własnością procedur metody kierunków dopuszczalnych w optymalizacji nieliniowej, oznacza, że następujący wektor będzie optymalnym rozwiązaniem rozpatrywanego zadania nieliniowej optymalizacji ilorazowej:

$$X^* = X^p = \arg \min \left\{ \frac{C_1 X + \alpha}{C_2 X + \beta}; X \in D \right\}$$

W możliwym przypadku alternatywnym, czyli gdy odpowiednie postępowanie algorytmiczne jest nieskończone, niezbędne będzie dodatkowe ustalenie kryterium zakończenia obliczeń i wyboru przybliżonego, suboptymalnego roz-

wiązania rozpatrywanego zadania optymalizacyjnego. Typową możliwością w tym zakresie jest przyjęcie postulatu zakończenia iteracyjnego procesu obliczeniowego wtedy, gdy dla pewnej liczby naturalnej  $N_0$  i z góry zadanej liczby rzeczywistej  $\varepsilon > 0$ , w procedurze stosowania zmodyfikowanej wersji metody Franka i Wolfe'a zajdzie następująca nierówność:

$$\|X^{N_0} - X^{N_0-1}\| < \varepsilon$$

Finalnie proponuje się w takim przypadku przyjęcie w charakterze suboptymalnego rozwiązania przybliżonego rozpatrywanego zadania optymalizacyjnego wektora określonego następująco:

$$X^{N_0} = X^* = \arg \min \left\{ \frac{C_1 X + \alpha}{C_2 X + \beta} : X \in D \right\}$$

Przedstawione rozważania prowadzą w konsekwencji do wniosku, że w każdym kroku proponowanego postępowania algorytmicznego, aby wyznaczyć kolejny wektor będący lepszym przybliżeniem poszukiwanego rozwiązania optymalnego wyjściowego ilorazowego zadania optymalizacji nieliniowej rozpatrywanej postaci standardowej, należy rozwiązać odpowiednie pomocnicze zadanie optymalizacyjne z następującego ciągu zadań optymalizacji liniowej:

$$\{Z_k\} = \left\{ \min \left\{ \frac{(C_2 X^k + \alpha)C_1 - (C_1 X^k + \alpha)C_2}{(C_2 X^k + \beta)^2}, X \right\} : X \in D \right\},$$

$$\text{dla } k = 0, 1, 2, \dots$$

Należy dodatkowo zauważyć, że charakterystycznym zjawiskiem towarzyszącym w proponowanej procedurze iteracyjnej jest fakt, że wszystkie pomocnicze zadania optymalizacji liniowej z ciągu  $\{Z_k\}$  mają ten sam zbiór rozwiązań dopuszczalnych i różnią się wyłącznie postacią analityczną liniowej funkcji kryterium. Ta charakterystyczna okoliczność będzie wykorzystana w dalszych rozważaniach, gdzie zostanie przedstawiona autorska propozycja wykorzystania i zastosowania tzw. metody uogólnionych macierzy odwrotnych w optymalizacji liniowej do efektywnej realizacji wybranych procedur wyznaczania optymalnych rozwiązań ilorazowych zadań optymalizacji nieliniowej z liniowym układem warunków ograniczających.

#### 4. Metoda wyznaczania optymalnych rozwiązań zadań optymalizacji ilorazowej z procedurą uogólnionych macierzy odwrotnych

Wyznaczanie optymalnych rozwiązań dla rozpatrywanej klasy nieliniowych zadań optymalizacyjnych może się odbywać ze wspomaganie tzw. metody uogólnionych macierzy odwrotnych w optymalizacji liniowej. W celu zrealizowania tej koncepcji zostanie obecnie zaproponowana autorska propozycja wykorzystania i zastosowania scharakteryzowanej wyżej tzw. metody uogólnionych macierzy odwrotnych w optymalizacji liniowej do efektywnej realizacji wybranych procedur wyznaczania optymalnych rozwiązań ilorazowych zadań optymalizacji nieliniowej z liniowym układem warunków ograniczających.

Przesłanki teoretyczne szczegółowych rozważań w tym zakresie będą wykorzystywały fakt, że na podstawie wcześniej przeprowadzonych badań zastosowanie procedury metody kierunków dopuszczalnych i modyfikacji algorytmu metody Franka i Wolfe'a (por. np. [18]) do iteracyjnego procesu poszukiwania rozwiązań optymalnych rozpatrywanej klasy wypukłych nieliniowych zadań optymalizacyjnych w postaci kanonicznej z liniowym układem warunków ograniczających daje następujące wyniki w kolejnych krokach:

$$\hat{X}^{k-1} = \arg \min \left\{ \frac{(C_2 X^{k-1} + \alpha)C_1 - (C_1 X^{k-1} + \alpha)C_2}{(C_2 X^{k-1} + \beta)^2}, X \right\}; X \in D \}$$

dla  $k = 1, 2, 3, \dots$

lub, co równoważne:

$$\hat{X}^{k-1} = \arg \min \left\{ \frac{(C_2 X^{k-1} + \alpha)C_1 - (C_1 X^{k-1} + \alpha)C_2}{(C_2 X^{k-1} + \beta)^2}, X \right\}; AX = b \wedge X \geq \Theta \}$$

dla  $k = 1, 2, 3, \dots$

czyli:

$$\hat{X}^{k-1} = \hat{X}^{k-1}(\bar{z}^k, U_0^{k-1}) \quad \text{dla } k = 1, 2, 3, \dots$$

i ostatecznie:

$$\begin{aligned}\hat{X}^{k-1} = & A^+ b + \frac{M^T}{\|M\|^2} \left[ \bar{z}^{k-1} - \frac{(C_2 X^{k-1} + \alpha)C_1 - (C_1 X^{k-1} + \alpha)C_2}{(C_2 X^{k-1} + \beta)^2} A^+ b \right] + \\ & + (E - A^+ A - \frac{M^T M}{\|M\|^2}) U_0^{k-1}\end{aligned}$$

dla  $k = 1, 2, 3, \dots$

gdzie:

$$M = \frac{(C_2 X^{k-1} + \alpha)C_1 - (C_1 X^{k-1} + \alpha)C_2}{(C_2 X^{k-1} + \beta)^2} (E - A^+ A)$$

oraz:

$$\bar{z}^{k-1} = \{ z^{k-1} \in R; \bigvee_{U^{k-1} \in R^n} X^{k-1}(z^{k-1}, U^{k-1}) \geq \Theta \}$$

Wynika stąd, że  $z^{k-1} \in R$  jest najmniejszą możliwą liczbą rzeczywistą spełniającą następującą formułę:

$$\bigvee_{U^{k-1} \in R^n} \left\{ \begin{aligned} X^{k-1} = & A^+ b + \frac{M^T}{\|M\|^2} \left[ z^{k-1} - \frac{(C_2 X^{k-1} + \alpha)C_1 - (C_1 X^{k-1} + \alpha)C_2}{(C_2 X^{k-1} + \beta)^2} A^+ b \right] + \\ & + (E - A^+ A - \frac{M^T M}{\|M\|^2}) U^{k-1} \geq \Theta \end{aligned} \right\}$$

gdzie:

$U^{k-1}$  – dowolny wektor z  $R^n$ , dla którego r minimum określone powyższym wzorem zostanie osiągnięte.

Następnie, zgodnie ideą i zasadami postępowania w iteracyjnej realizacji koncepcji kierunków dopuszczalnych w optymalizacji nieliniowej, kolejnym otrzymanym rozwiązaniem dopuszczalnym będzie:

$$X^k = X^{k-1} + \rho_{k-1}(\hat{X}^{k-1} - X^{k-1})$$

dla:

$$\rho_{k-1} = \arg \min_{0 \leq \rho \leq 1} \left\{ \frac{C_1 [X^{k-1} + \rho_k(\hat{X}^{k-1} - X^{k-1})] + \alpha}{C_2 [X^{k-1} + \rho_k(\hat{X}^{k-1} - X^{k-1})] + \beta} \right\}$$

Podsumowując ten wątek rozważań, na podstawie wyżej pokazanych rezultatów oraz wcześniejszych ustaleń dotyczących otrzymanego ciągu:  $\{\hat{X}^{k-1}\}_{k=0,1,2,\dots}$

kolejnych przybliżeń poszukiwanego rozwiązania optymalnego rozpatrywanego nieliniowego zadania optymalizacyjnego, a w szczególności ustaleń dotyczących zbieżności i kryteriów zakończenia postępowania iteracyjnego metody kierunków dopuszczalnych oraz algorytmu metody Franka i Wolfe'a, można obecnie stwierdzić, że jeżeli zbiór rozwiązań dopuszczalnych  $D$  rozpatrywanego zadania optymalizacji ilorazowej będzie niepusty i ograniczony, funkcja kryterium

$$f(X) = \frac{C_1 X + \alpha}{C_2 X + \beta}$$

tego zadania będzie jednomodalna, różniczkowalna oraz

mająca ciągle wszystkie pochodne cząstkowe rzędu pierwszego na zbiorze rozwiązań dopuszczalnych  $D$ , to:

$$\bigvee_{k_0 \in N} X^* = \arg \min \left\{ \frac{C_1 X + \alpha}{C_2 X + \beta}; X \in D \right\} = \hat{X}^{k_0} = \hat{X}^{k_0}(\bar{z}^{k_0}, U_0^{k_0})$$

czyli:

$$\bigvee_{k_0 \in N} \left\{ \begin{aligned} X^* &= \arg \min \left\{ \frac{C_1 X + \alpha}{C_2 X + \beta}; X \in D \right\} = \\ &= A^+ b + \frac{M^T}{\|M\|^2} (\bar{z}^{k_0} - \frac{(C_2 X^{k_0} + \alpha)C_1 - (C_1 X^{k_0} + \alpha)C_2}{(C_2 X^{k_0} + \beta)^2} A^+ b) + \\ &\quad + (E - A^+ A - \frac{M^T M}{\|M\|^2}) U_0^{k_0} \end{aligned} \right.$$

gdzie:

$$M = \frac{(C_2 X^{k_0} + \alpha)C_1 - (C_1 X^{k_0} + \alpha)C_2}{(C_2 X^{k_0} + \beta)^2} (E - A^+ A)$$

lub:

$$X^* = \arg \min \left\{ \frac{C_1 X + \alpha}{C_2 X + \beta}; X \in D \right\} = \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{X}^k(\bar{z}^k, U_0^k)$$

czyli:

$$\begin{aligned} X^* &= \arg \min \left\{ \frac{C_1 X + \alpha}{C_2 X + \beta}; X \in D \right\} = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ A^+ b + \frac{M^T}{\|M\|^2} (\bar{z}^{k_0} - \frac{(C_2 X^k + \alpha)C_1 - (C_1 X^k + \alpha)C_2}{(C_2 X^k + \beta)^2} A^+ b) + \right. \\ &\quad \left. + (E - A^+ A - \frac{M^T M}{\|M\|^2}) U \right] \end{aligned}$$

gdzie:

$$M = \frac{(C_2 X^k + \alpha)C_1 - (C_1 X^k + \alpha)C_2}{(C_2 X^k + \beta)^2} (E - A^+ A)$$

Prawdziwość powyższych faktów, bezspornie uzasadniona we wcześniejszych częściach niniejszego opracowania, dowodzi poprawności zaprezentowanej autorskiej propozycji iteracyjnego algorytmu metody Franka i Wolfe'a z procedurą metody uogólnionych macierzy odwrotnych w optymalizacji liniowej do wyznaczania optymalnych rozwiązań wypukłych zadań optymalizacji ilorazowej z liniowym układem warunków ograniczających spełniających przyjęte w powyższych rozważaniach wszystkie założenia dodatkowe. Proponowana metoda wyznaczania optymalnych rozwiązań zadań programowania matematycznego rozpatrywanej klasy może więc dodatkowo wspomagać procesy podejmowania optymalnych decyzji w określonym zakresie.

## Zakończenie

Przedstawione opracowanie zawiera zwięzłą prezentację autorskiej propozycji wykorzystania ogólnej idei tzw. metody uogólnionych macierzy odwrotnych w optymalizacji liniowej do poszukiwania optymalnych rozwiązań zadań optymalizacji ilorazowej. W przedstawionych i rekomendowanych procedurach postuluje się ponadto ideę algorytmu linearyzacji rozpatrywanych ilorazowych zadań optymalizacyjnych oparte na klasycznej koncepcji metody Franka i Wolfe'a w programowaniu nieliniowym. Synteza proponowanych sposobów postępowania umożliwia dodatkowo uzyskiwanie dopuszczalnych i optymalnych tzw. rozwiązań uogólnionych rozpatrywanych zadań optymalizacji ilorazowej, co daje dodatkowo możliwości, w tym interpretacyjne, w przypadkach sprzeczności układu warunków ograniczających analizowanej klasy zadań optymalizacyjnych. Ta okoliczność, w intencji autora, dodatkowo wzmacnia ideę praktycznej użyteczności proponowanych iteracyjnych procedur optymalizacyjnych.

## Literatura

1. Martos B.: *Programowanie nieliniowe. Teoria i metody*. PWN, Warszawa 1983.
2. Mika J.: *O pewnej wersji metody macierzy pseudoodwrotnych w programowaniu liniowym*. „Przegląd Statystyczny” 1982, nr 1.
3. Mika J.: *Ob odnom metode wyczislenia obobszczennykh reszeni zadacz lineijnogo programmirowania i jego primienieniach w planirowani*. Kurzfassungen der Beitrage, Mathematik und Kybernetik in der Ökonomie VII, Halle-Wittenberg 1982.
4. Mika J.: *On determining optimal generalized solution of different types of linear and nonlinear programming problems by means of pseudoinverse matrix method*. Kurzfassungen der Beitrage, Mathematik und Kybernetik in der Ökonomie VIII, Magdeburg 1985.
5. Mika J.: *O wynikach eksperymentów obliczeniowych z zastosowaniem algorytmu metody macierzy pseudoodwrotnych w programowaniu liniowym*. Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, nr 413, Wrocław 1989.
6. Mika J.: *Uogólnione rozwiązania i korekcie sprzecznych modeli optymalizacyjnych we wspomaganiu procesów podejmowania decyzji ekonomicznych*. AE, Katowice 1990.
7. Mika J.: *Optymalne uogólnione rozwiązania zadań programowania matematycznego z liniowym układem warunków ograniczających w procesach wspomagania podejmowania decyzji*. Prace Naukowe Politechniki Śląskiej w Gliwicach, Organizacja i Zarządzanie, z. 2, Gliwice 2000.
8. Mika J.: *Rozwiązania uogólnione w procesach decyzyjnych*. AE, Katowice 1994.

9. Mika J.: *On the Solutions of Generalized Optimization Problems with the Linear Restrictive Constrains*. „Journal of Economics and Management” 2004, Vol. 1.
10. Mika J.: *Uogólnione rozwiązania optymalne w procesach wspomagania podejmowania decyzji*. Dom Ekonomisty, Biuletyn Naukowo-Informacyjny, Polskie Towarzystwo Ekonomiczne w Katowicach, nr 1/32/2004, 2005.
11. Nykowski I.: *Programowanie liniowe*. PWE, Warszawa 1980.
12. Radzikowski W.: *Badania operacyjne w zarządzaniu przedsiębiorstwem*. Toruńska Szkoła Zarządzania, Toruń 1997.
13. Wagner H.M.: *Badania operacyjne. Zastosowania w zarządzaniu*. PWE, Warszawa 1980.
14. Wit R.: *Metody programowania nieliniowego*. WNT, Warszawa 1986.
15. Zangwill W.I.: *Programowanie nieliniowe*. WNT, Warszawa 1974.

## ON THE LINEARISATION AND THE GENERALIZED SOLUTIONS OF THE QUOTIENT OPTIMIZATION PROBLEMS

### Summary

In the paper we have proposed the author's generalizations of the selected, classical, theoretical methods to be used to the aid of the treat of the optimal decisions of the economy and management with the use of some ideas of applying the methods of the generalized inverse matrices in the linear optimization.

**Monika Miśkiewicz**

# **O ZASTOSOWANIACH TWIERDZENIA TAKENSA O ZANURZANIU DO ANALIZY NIELINIOWYCH SYSTEMÓW DYNAMICZNYCH**

## **Wstęp**

Twierdzenie Takensa o zanurzaniu odgrywa bardzo ważną rolę w teorii nieliniowych systemów dynamicznych, gdyż pozwala odkryć geometryczne własności atraktora oraz zrekonstruować, czyli odtworzyć na podstawie jednowymiarowego szeregu czasowego obserwacji, przestrzeń stanów. Rekonstrukcja umożliwia odtworzenie wielu istotnych własności pierwotnego układu. W opracowaniu zostanie omówione twierdzenie Takensa oraz jego zastosowania do analizy ekonomicznych szeregów czasowych. Badanie dynamiki takich systemów zazwyczaj zaczyna się od testowania determinizmu. Do typowych miar stopnia determinizmu należą: szacowanie wykładników Lapunowa, obliczanie wymiaru korelacyjnego oraz stosowanie opartego na tym wymiarze testu BDS. Zostanie tu zaprezentowana miara *DETM*. Analizy szeregów czasowych zostaną przeprowadzone na podstawie rzeczywistych danych natury ekonomicznej. Pod uwagę wzięto szeregi czasowe utworzone z indeksu giełdowego WIG oraz notowań wybranych kursów walut.

## **1. Twierdzenie Takensa o zanurzaniu**

Rozważmy system dynamiczny  $(X, f)$ , który można zapisać w postaci równania rekurencyjnego:

$$x_{t+1} = f(x_t), \quad t = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

gdzie:

$$f: X \rightarrow X, \quad X \subset R^m,$$

$X$  – przestrzeń stanów,

$x_t, x_{t+1} \in X$  – stan systemu odpowiednio w chwilach  $t$  i  $t+1$ .

**TWIERDZENIE F. Takensa o zanurzaniu [9]:** Niech  $M$  będzie zwartą,  $m$ -wymiarową rozmaitością różniczkową. Dla par  $(f, h)$ ,  $f \in \text{Diff}^2(M, M)$ ,  $h \in C^2(M, R)$  jest własnością generyczną, że odwzorowanie  $\phi_{(f, h)}: M \rightarrow R^{2m+1}$  określone wzorem:

$$\phi_{(f, h)} = [h(x), h(f(x)), \dots, h(f^{2m}(x))] \quad (2)$$

jest zanurzeniem, tj. dyfeomorfizmem klasy  $C^1$  odwzorującym  $M$  na  $\phi_{(f, h)}(M)$ .

Z powyższego twierdzenia wynika, że dynamika systemu  $(X, f)$  generowanego przez nieznaną odwzorowanie  $f$  może być odtworzona za pomocą ciągu  $d$ -historii. Są to ciągi w postaci:

$$x_i^d = (x_i, x_{i-\tau}, x_{i-2\tau}, \dots, x_{i-(d-1)\tau}), \quad (3)$$

gdzie:

$$i = (d-1)\tau + 1, \dots, N,$$

$x_t$  – obserwacje oryginalnego szeregu,  $t = 1, \dots, N$ ,

$d$  – wymiar rekonstruowanej przestrzeni (zwany również wymiarem zanurzenia),  
 $\tau$  – opóźnienie.

W szczególności jeśli  $f \in \text{Diff}^2(M, M)$ ,  $h \in C^2(M, R)$  oraz  $d \geq 2m+1$ , to odwzorowanie określone wzorem:

$$\phi_{(f, h)} = [h(x_i), h(f(x_i)), \dots, h(f^{d-1}(x_i))], \quad (4)$$

tnz.  $\phi_{(f, h)}(x_i) = x_i^d = (x_i, x_{i+\tau}, \dots, x_{i+(d-1)\tau})$ , jest zanurzeniem.

Z powyższego twierdzenia wynika, że dla prawie każdej funkcji skalarnej  $h$  dostarczającej ciągu obserwacji można uzyskać informacje na temat dynamiki

systemu pierwotnego generującego szereg obserwacji tylko na podstawie zachowania się i własności układów wektorów opóźnionych czasowo, utworzonych z wykorzystaniem szeregu obserwacji.

W idealnej sytuacji, gdybyśmy potrafili zmierzyć wartości jednej zmiennej pierwotnego układu, wektory zanurzenia  $x_i^d = (x_i, x_{i-\tau}, x_{i-2\tau}, \dots, x_{i-(d-1)\tau})$  dokładnie odtwarzałyby dynamikę pierwotnego systemu dynamicznego, pod warunkiem, że wymiar zanurzenia  $d$  będzie dostatecznie duży, funkcja pomiarowa  $f$  będzie dwukrotnie różniczkowalna oraz będziemy dysponować dostatecznie dużym i gęsto próbkowanym zbiorem obserwacji. W praktyce oczywiście te warunki nie są w pełni możliwe do spełnienia, ale badacze przyjmują, że jeśli są chociaż częściowo spełnione, to procedura zanurzania jest w stanie odtworzyć przybliżoną geometrię atraktora oraz dynamikę procesu reprezentowanego przez wektory zanurzenia. Uniemożliwia to oczywiście osiągnięcie doskonałej rekonstrukcji, ale zostało wielokrotnie sprawdzone poprzez różne testy statystyczne, że pozwala na wystarczająco dobre odtworzenie dynamiki systemu [6].

Twierdzenie Takensa gwarantuje jakość rekonstrukcji układu dynamicznego tylko w matematycznym sensie. W zastosowaniach praktycznych nie jesteśmy w stanie wiernie odtworzyć pierwotnego układu dynamicznego, ale wiedza o tym, że teoretycznie istnieje taka transformacja, jest bardzo istotna. Daje to matematyczne podstawy i uzasadnienie dla stosowania wielu algorytmów, które wykorzystują dane w postaci szeregów czasowych do opisu nieliniowości, złożoności, istnienia chaosu w wielu układach dynamicznych. Jednakże wszystkie te zastosowania mają sens, gdy dysponujemy odpowiednią ilością dokładnych danych.

## 2. Rekonstrukcja przestrzeni stanów

Rekonstrukcja przestrzeni stanów polega na odtworzeniu przestrzeni stanów jedynie na podstawie jednowymiarowego szeregu obserwacji. W 1981 roku F. Takens zaproponował metodę opóźnień, w której wykorzystuje się  $d$ -historie.  $d$ -historie powstają w wyniku przesunięcia oryginalnego szeregu czasowego o stałe opóźnienie  $\tau$ , natomiast elementami zrekonstruowanej  $d$ -wymiarowej przestrzeni stanów są  $d$ -wymiarowe punkty dane wzorem (3).

Takens udowodnił, że dla  $d \geq 2m + 1$ , gdzie  $m$  jest wymiarem atraktora, a  $d$ -wymiarowym zanurzenia, zrekonstruowana przestrzeń stanów będzie topologicznie równoważna z „oryginalną” przestrzenią. Wyboru parametru  $d$  dokonuje się zazwyczaj metodą prób i błędów. Tradycyjnym podejściem jest obliczanie wymiaru korelacyjnego. Natomiast czas opóźnień  $\tau$  można wyznaczyć za pomocą całki korelacyjnej.

Całka korelacyjna wyraża się wzorem:

$$C(d, N, r, t) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=1}^n \sum_{i=j+1}^n I(r - \|x_i^d - x_j^d\|), \quad r > 0, \quad (5)$$

gdzie:

$$I(a) = \begin{cases} 0, & a < 0 \\ 1, & a \geq 0 \end{cases},$$

$x_i^d = (x_i, x_{i-\tau}, \dots, x_{i-(d-1)\tau})$  – punkt  $d$ -wymiarowej przestrzeni stanów,

$n = N - \tau(d-1)$  – liczba wektorów  $d$ -wymiarowej przestrzeni stanów,

$N$  – liczba danych,

$\tau$  – opóźnienie,

$\| \cdot \|$  – dowolna norma w przestrzeni  $d$ -wymiarowej.

Całka korelacyjna jest interpretowana jako prawdopodobieństwo, że dwa losowo wybrane punkty przestrzeni wektorowej są oddalone od siebie o mniej niż  $r$ .

Dla ustalenia czasu opóźnień  $\tau$  wykorzystamy metodę C-C opartą na statystyce:

$$S(d, N, r, t) = C(d, N, r, t) - C^d(1, N, r, t). \quad (6)$$

W tym celu dzielimy szereg czasowy  $x_t$ ,  $t = 1, 2, \dots, N$  na  $t$  rozłącznych szeregów. Dla  $t = 1$  będziemy mieli tylko jeden oryginalny szereg. Dla  $t = k$  będziemy mieli  $k$  rozłącznych szeregów w postaci:

$$\{x_1, x_{k+1}, x_{2k+1}, \dots, x_{N-k+1}\}, \{x_2, x_{k+2}, x_{2k+2}, \dots, x_{N-k+2}\}, \dots, \\ \{x_k, x_{2k}, x_{3k}, \dots, x_N\}. \quad (7)$$

Wówczas statystyka  $S(d, N, r, t)$  jest dana wzorem:

$$S(d, N, r, t) = \frac{1}{t} \sum_{s=1}^t [C_s(d, N, r, t) - C_s^d(1, N, r, t)]. \quad (8)$$

Dla stałych parametrów  $d$  i  $t$  oraz dla każdego  $r$  statystyka  $S(d, N, r, t)$  będzie równa zero, gdy dane są *i.i.d.* (independent, identically distributed) i  $N \rightarrow \infty$ . W przypadku danych rzeczywistych  $N$  jest skończone i wtedy w wielu przypadkach  $S(d, N, r, t) \neq 0$ . Czas opóźnień  $\tau$  jest związany z pierwszym minimum lokalnym równania:

$$\Delta S(d, t) = \max\{S(d, r_j, t)\} - \min\{S(d, r_j, t)\}, \quad (9)$$

obliczanym dla różnych wartości  $r_j$ .

Wymiar zanurzenia, drugi z parametrów niezbędnych do rekonstrukcji, wyznaczono za pomocą metody fałszywego sąsiada. Niech  $x_K = (x_k, x_{k-\tau}, \dots, x_{k-(d-1)\tau})$  będzie najbliższym sąsiadem punktu  $x_T = (x_t, x_{t-\tau}, \dots, x_{t-(d-1)\tau})$  w  $d$ -wymiarowej przestrzeni oraz niech  $R_d(x_T, x_K) = \|x_T - x_K\|$  będzie odległością euklidesową między tymi punktami w przestrzeni  $d$ -wymiarowej. Następnie wyznacza się odległość w przestrzeni o wymiarze  $d+1$ :

$$R_{d+1}^2(x_T, x_K) = R_d^2(x_T, x_K) + [x_{t+\tau} - x_{k+\tau}]^2. \quad (10)$$

Jeżeli  $R_{d+1}(x_T, x_K)$  istotnie przekracza  $R_d(x_T, x_K)$ , wówczas punkty  $x_T$  i  $x_K$  nie są najbliższymi sąsiadami, tylko tzw. fałszywymi sąsiadami. Dla ustalenia wymiaru zanurzenia wykorzystuje się dwa kryteria:

$$\sqrt{\frac{R_{d+1}^2(x_T, x_K) - R_d^2(x_T, x_K)}{R_d^2(x_T, x_K)}} > R_T \text{ oraz } \frac{R_{d+1}(x_T, x_K)}{\sigma} > A_T, \quad (11)$$

gdzie  $R_T$ ,  $A_T$  to pewne ograniczenia (zazwyczaj przyjmuje się  $R_T = 15$ ,  $A_T = 2$  [1]). Jeżeli spełnione są powyższe kryteria, to punkty  $x_T$  i  $x_K$  są fałszywymi sąsiadami.

### 3. Miara determinizmu DETM [6]

Z twierdzenia Takensa o zanurzaniu wynika, że jeśli szereg ma charakter deterministyczny, to dla odpowiednich wartości wymiaru zanurzenia  $d$  oraz opóźnienia czasowego  $\tau$  istnieje taka funkcja  $g: R^d \rightarrow R^d$ , że:

$$x_{T+\tau} = g(x_T), \quad (12)$$

gdzie  $x_T = (x_t, x_{t-\tau}, \dots, x_{t-(d-1)\tau})$  to wektor w zrekonstruowanej przestrzeni stanów.

Bardzo często funkcję  $g$  określa się jako funkcję topologicznie sprzężoną z pierwotną funkcją  $f$ , co m.in. oznacza, że  $g$  zachowuje własność ciągłości trajektorii w przestrzeni stanów. Zatem dla każdej pary punktów  $(x_t, x_{t'})$  zrekonstruowanej przestrzeni stanów powinny istnieć dowolnie małe wielkości  $\alpha, \beta > 0$  takie, że:

$$\|x_t - x_{t'}\| < \alpha \Rightarrow \|g(x_t) - g(x_{t'})\| < \beta, \quad (13)$$

gdzie  $\|\cdot\|$  to norma euklidesowa mierząca odległość między wektorami. Stąd wynika, że obrazy bliskich punktów układu powinny się znajdować blisko siebie w przestrzeni stanów, co oznacza ciągłość przestrzeni. Ciągłość odwzorowania jest cechą procesów deterministycznych i może być wykorzystana do odróżniania procesów losowych od chaotycznych.

Miara determinizmu *DETM* pozwala ustalić, w jakim stopniu zrekonstruowana przestrzeń stanów zachowuje własność ciągłości procesu. Przyjmuje się, że proces zachowuje własność topologicznej ciągłości, gdy jest spełniona implikacja (13).

Rozważmy zrekonstruowaną przestrzeń stanów, której elementami są punkty w postaci  $x_T = (x_t, x_{t-\tau}, \dots, x_{t-(d-1)\tau})$ , gdzie  $d$  oznacza wymiar zanurzenia, natomiast  $\tau$  – opóźnienie czasowe. Niech  $x_K$  oznacza najbliższego sąsiada punktu  $x_T$ , a  $x_{K+\tau}$  będzie najbliższym sąsiadem jego obrazu  $x_{T+\tau}$ . Niech  $d_T = \|x_T - x_K\|$  oraz  $d_{T+1} = \|x_{T+1} - x_{K+1}\|$  oznaczają minimalne odległości między dowolnym punktem  $x_t$  i innym punktem przestrzeni stanów. Wówczas można ustalić dowolnie małe wartości  $\alpha, \beta > 0$ , dla których jest spełniony warunek:

$$d_T < \alpha \Rightarrow d_{T+1} < \beta. \quad (14)$$

W obliczeniach zazwyczaj przyjmuje się wartości parametrów  $\alpha = \beta = \frac{1}{10}\sigma$ , gdzie  $\sigma$  oznacza odchylenie standardowe odległości między punktami w zrekonstruowanej przestrzeni stanów.

Miara determinizmu procesu może być wyrażona wzorem:

$$DETM = \frac{\overline{\Lambda}}{(N - d + 1)d}, \quad (15)$$

gdzie:

$$\Lambda = \{(x_T, x_K) : d_T < \alpha \Rightarrow d_{T+1} < \beta\},$$

$\overline{\Lambda}$  – moc zbioru  $\Lambda$ ,

$N$  – liczba obserwacji szeregu,

$d$  – wymiar zanurzenia.

Wartość współczynnika  $DETM$  oblicza się dla różnych wartości wymiaru zanurzenia. Dla szeregu czasowego o charakterze deterministycznym  $DETM$  powinien być istotnie większy od 0, przy zwiększonym wymiarze  $d$ . Dla procesów ściśle chaotycznych można ustalić dokładną zależność pomiędzy wartością  $DETM$  a wymiarem zanurzenia. Dla dowolnych procesów deterministycznych niestety jest to niemożliwe.

## 4. Badania empiryczne

W opracowaniu pod uwagę wzięto szeregi czasowe utworzone przez indeks giełdowy WIG oraz notowania kursów walut: euro EUR, dolar amerykański USD, jen japoński JPY, funt brytyjski GBP oraz frank szwajcarski CHF w okresie od 1.01.2005 roku do 30.04.2007 roku. W badaniach wykorzystano dzienne stopy zwrotu dane wzorem:

$$x_t = \ln P_t - \ln P_{t-1}.$$

W tabeli 1 umieszczono wymiary zanurzenia otrzymane za pomocą metody fałszywego sąsiada oraz opóźnienia czasowe dla wybranych szeregów czasowych otrzymane za pomocą metody całki korelacyjnej C-C.

Tabela 1

Wymiar zanurzenia oraz opóźnienie czasowe dla wybranych szeregów czasowych

| Szereg | Wymiar zanurzenia | Opóźnienie czasowe |
|--------|-------------------|--------------------|
| CHF    | 7                 | 3                  |
| GBP    | 3                 | 3                  |
| EUR    | 2                 | 2                  |
| JPY    | 5                 | 2                  |
| USD    | 6                 | 3                  |
| WIG    | 7                 | 4                  |

Analizując dane przedstawione w tabeli 1, można wnioskować, że zrekonstruowane przestrzenie stanów dla kolejnych szeregów czasowych będą opisane wzorami:

CHF

$$x_i^7 = (x_i, x_{i-3}, x_{i-6}, x_{i-9}, x_{i-12}, x_{i-15}, x_{i-18}), i = 19, \dots, 588,$$

GBP

$$x_i^3 = (x_i, x_{i-3}, x_{i-6}), i = 7, \dots, 588,$$

EUR

$$x_i^2 = (x_i, x_{i-2}), i = 3, \dots, 588,$$

JPY

$$x_i^5 = (x_i, x_{i-2}, x_{i-4}, x_{i-6}, x_{i-8}), i = 9, \dots, 588,$$

USD

$$x_i^6 = (x_i, x_{i-3}, x_{i-6}, x_{i-9}, x_{i-12}, x_{i-15}), i = 16, \dots, 588,$$

WIG

$$x_i^7 = (x_i, x_{i-4}, x_{i-8}, x_{i-12}, x_{i-16}, x_{i-20}, x_{i-24}), i = 25, \dots, 585.$$

W tabeli 2 przedstawiono wartości miary  $DETM$  otrzymane dla badanych szeregów czasowych przy stopniowym zwiększaniu wymiaru zanurzenia. W obliczeniach przyjęto wartości parametrów  $\alpha = \beta = 0,5\sigma$ , gdzie  $\sigma$  oznacza odchylenie standardowe.

Tabela 2

Współczynnik *DETM* dla wybranych szeregów czasowych

| Szereg | Wymiar zanurzenia |        |        |        |        |        |        |        |
|--------|-------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|        | 2                 | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      |
| CHF    | 0,0317            | 0,0556 | 0,1041 | 0,0929 | 0,0853 | 0,1049 | 0,0783 | 0,0812 |
| EUR    | 0,0261            | 0,0677 | 0,0343 | 0,0918 | 0,0682 | 0,0839 | 0,0512 | 0,0697 |
| GBP    | 0,0238            | 0,0449 | 0,1214 | 0,0976 | 0,0816 | 0,0876 | 0,0968 | 0,0791 |
| JPY    | 0,0934            | 0,0754 | 0,1001 | 0,0917 | 0,0874 | 0,0912 | 0,0765 | 0,0532 |
| USD    | 0,0743            | 0,1034 | 0,0915 | 0,0801 | 0,0668 | 0,0712 | 0,0698 | 0,0447 |
| WIG    | 0,0529            | 0,0638 | 0,0598 | 0,0649 | 0,0597 | 0,0623 | 0,0701 | 0,0625 |

Tabela 2 pokazuje, że współczynniki *DETM* dla logarytmicznych stóp zwrotu badanych szeregów w prawie wszystkich przypadkach nie przekraczają wartości 0,1. Może to oznaczać, że nie są one generowane przez niskowymiarowe układy chaotyczne. Jednak wyniki te nie są takie jednoznaczne. Wartości *DETM* są niewysokie, ale są znacznie wyższe niż dla procesów losowych, a w kilku przypadkach przewyższają wartość 0,1. Zatem nie można jednoznacznie odrzucić hipotezy o deterministycznym charakterze tych procesów.

## Podsumowanie

W opracowaniu zastosowano twierdzenie Takensa do zrekonstruowania przestrzeni stanów na podstawie jednowymiarowych szeregów czasowych utworzonych z wybranych kursów walut (CHF, EUR, GBP, JPY, USD) oraz indeksu giełdowego WIG. Jego celem było zbadanie, czy w wybranych szeregach występują zależności deterministyczne. Otrzymane wyniki nie wskazują jednak na jednoznaczne odrzucenie hipotezy o deterministycznym charakterze badanych szeregów. Powyższą tezę można weryfikować za pomocą innych metod pozwalających testować determinizm szeregu czasowego, np. za pomocą wykładników Lapunowa, wymiaru korelacyjnego oraz stosowania opartego na tym wymiarze testu BDS, testu mieszania danych lub analizy przeskalowanego zakresu (R/S).

## Literatura

1. Abarbanel H.D.: *Analysis of Observed Chaotic Data*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1996.
2. Kennel M.B., Brown R., Abarbanel H.D.: *Detecting Embedding Dimension for Phase Space Reconstruction Using a Geometrical Construction*. „Physical Review A” 1992, 45.
3. Kim H.S., Eykholt R., Salas J.D.: *Nonlinear Dynamics. Delay Time and Embedding Windows*. „Physica D” 1999, 127.
4. Liebert W., Schuster H.G.: *Proper Choice of the Time Delay for the Analysis of Chaotic Time Series*. „Phys. Rev. Lett. A” 1989, 142.
5. Nowiński M.: *Praktyczne problemy nieliniowej analizy ekonomicznych szeregów czasowych*. Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej, Wrocław 2005.
6. Nowiński M.: *Nieliniowa dynamika szeregów czasowych*. AE, Wrocław 2007.
7. Sprott J.C.: *Chaos and Time-Series Analysis*. Oxford 2003.
8. Takens F.: *Detecting Strange Attractors in Turbulence*. Lecture Notes in Mathematics. Red. D.A. Rand, L.S. Young. Springer-Verlag, Berlin 1981.
9. Zawadzki H.: *Chaotyczne systemy dynamiczne. Elementy teorii i wybrane zagadnienia ekonomiczne*. „Studia Ekonomiczne” 1996.

## THE APPLICATIONS OF THE TAKENS THEOREM TO NONLINEAR DYNAMIC SYSTEMS' ANALYSIS

### Summary

This paper describes the Takens theorem and its applications to the time series analysis. The Takens theorem allows to prepare a phase space reconstruction on the basis of a single observations series. This paper also describes a measure of degree of determinism in the dynamic systems using a one-dimensional time series. The empirical research conducted on the basis of the real economic data.

**Ewa Pośpiech**

# **PODPISY CYFROWE – SCHEMAT PODPISU ELGAMALA**

## **Wstęp**

Z uwagi na wzrost zastosowań Internetu coraz większe znaczenie mają podpisy cyfrowe. Ich rola w dzisiejszym świecie jest istotna ze względu na możliwości zastosowania do różnego typu operacji dokonywanych wirtualnie. Rozwój i coraz to nowe możliwości wykorzystywania technik komputerowych powodują, iż podpisy cyfrowe są i będą kluczowym narzędziem stosowanym przez firmy oraz instytucje, jak również przez prywatnych użytkowników.

Wśród praktycznych zastosowań podpisów cyfrowych można przede wszystkim wyszczególnić podpisywanie dokumentów przesyłanych drogą elektroniczną. Można w ten sposób wymieniać dokumenty z partnerami biznesowymi, przysyłać potwierdzone dokumenty do urzędów, uwierzytelniać transakcje w systemie bankowości elektronicznej czy uwierzytelniać faktury elektroniczne [11].

Kluczowym zagadnieniem dotyczącym składania podpisów cyfrowych jest ich bezpieczeństwo. W tej kwestii zasadniczą rolę odgrywa współczesna kryptografia. Dzięki zaawansowanym pojęciom i strukturom matematycznym oraz narzędziom informatycznym współczesna kryptografia rozwija się i wychodzi naprzeciw praktycznym zastosowaniom.

Wobec stale rosnącego znaczenia podpisów cyfrowych zasadne wydaje się zaprezentowanie zagadnień przybliżających tę tematykę.

Celem opracowania jest przedstawienie schematu podpisu ElGamala – jednego z najistotniejszych algorytmów kryptografii asymetrycznej, który bazuje na elementarnej teorii liczb, a którego bezpieczeństwo opiera się na trudności rozwiązywania problemu logarytmu dyskretnego.

## 1. Podpis cyfrowy

Podpis cyfrowy jest stosowany do podpisywania dokumentów elektronicznych. To dodatkowa informacja dodana do wiadomości w celu zweryfikowania źródła jej pochodzenia. Jest elementem charakterystycznym dla konkretnego użytkownika. Podpis cyfrowy jest stosowany do określenia autorstwa przesyłanych dokumentów lub wykonanej transakcji przeprowadzonej drogą elektroniczną. Musi jednak sprostać określonym wymaganiom:

- musi istnieć możliwość zweryfikowania ważności podpisu nadawcy przez odbiorcę,
- podpis powinien być nie do podrobienia,
- w przypadku zaistnienia sporu między nadawcą a odbiorcą, gdy nadawca wypiera się autorstwa danej wiadomości, powinna istnieć możliwość jego rozstrzygnięcia [4, s. 28].

Złożenie podpisu cyfrowego pod dokumentem (dyspozycją) ma zagwarantować: autentyczność (brak wątpliwości co do autorstwa dokumentu), niezaprzeczalność (pewność, że podpis złożyła osoba będąca autorem dokumentu), integralność (pewność, że po złożeniu podpisu przez autora, wiadomość nie była modyfikowana) [7].

Według polskiej normy PN-I-02000, podpis cyfrowy to: „Przekształcenie kryptograficzne danych umożliwiające odbiorcy danych sprawdzenie autentyczności i integralności danych oraz zapewniające nadawcy ochronę przed sfalszowaniem danych przez odbiorcę” [10]. Praktycznie rzecz ujmując, podpis cyfrowy to dodatkowa informacja dołączona do dokumentu (wiadomości, transakcji), która jest pewną transformacją przesyłanych danych.

Narzędziami stosowanymi przy tworzeniu i składaniu podpisów cyfrowych są algorytmy kryptografii asymetrycznej. Kryptografia asymetryczna to rodzaj kryptografii, w którym używa się zestawu dwu lub więcej powiązanych ze sobą kluczy [8]. Przy wykorzystywaniu kryptografii asymetrycznej do podpisów cyfrowych są wymagane dwa klucze – prywatny i publiczny (klucz prywatny powinien być nie do odtworzenia na podstawie klucza publicznego). Klucz prywatny jest stosowany do podpisywania wiadomości, a zadaniem klucza publicznego jest weryfikacja, sprawdzenie autentyczności podpisu.

## 2. Podpis ElGamala – schemat i pojęcia teoretyczne

ElGamal to jeden z najważniejszych algorytmów kryptografii asymetrycznej, który jest m.in. wykorzystywany do podpisów cyfrowych. Algorytmy sto-

sowane w kryptografii asymetrycznej opierają się na działaniach, które łatwo można przeprowadzić w jedną stronę, natomiast wykonanie działania odwrotnego jest bardzo trudne. W przypadku schematu ElGamala łatwym działaniem jest potęgowanie modulo<sup>\*</sup>  $p$ , zaś trudnym – znajdowanie wartości logarytmów dyskretnych w grupie multiplikatywnej<sup>\*\*</sup>  $Z_p$  reszt modulo  $p$ , gdzie  $p$  jest liczbą pierwszą – nie jest znana efektywna metoda wyznaczająca logarytmy dyskretne, ale nie istnieje dowód na to, że takiej metody nie ma.

W celu przedstawienia schematu podpisu ElGamala niezbędne jest przytoczenie zasadniczych pojęć i twierdzeń wykorzystywanych w opisie tego algorytmu. Kluczowym pojęciem jest określenie logarytmu dyskretnego.

**Logarytmem dyskretnym liczby  $A$  przy podstawie  $g$  ( $a = \log_g A$ )** nazywamy wykładnik  $a$  kongruencji:

$$A \equiv g^a \pmod{p}, \quad (1)$$

gdzie  $p$  to liczba pierwsza, natomiast  $g$  – pierwiastek pierwotny modulo  $p$ . Dla każdej liczby całkowitej  $A \in \{1, 2, \dots, p-1\}$  istnieje taki wykładnik  $a \in \{0, 1, \dots, p-2\}$ , który spełnia kongruencję (1).

Poniżej przytoczono określenia objaśniające pojęcie logarytmu dyskretnego.

Niech  $n$  będzie liczbą naturalną oraz  $a$  liczbą całkowitą taką, że  $\text{NWD}(a, n) = 1$ . Jeśli rząd elementu  $a$  modulo  $n$  wynosi  $\phi(n)$ , to  $a$  nazywamy **pierwiastkiem pierwotnym modulo  $n$** .

Niech  $n$  będzie liczbą naturalną oraz  $a$  liczbą całkowitą taką, że  $\text{NWD}(a, n) = 1$ . **Rzędem liczby  $a$  modulo  $n$**  nazywamy najmniejszą liczbę naturalną  $r$  taką, że  $a^r \equiv 1 \pmod{n}$ . Oznaczamy go jako  $r = \text{rząd}_n a$ .

Niech  $n$  będzie liczbą naturalną. **Funkcją Eulera  $\phi(n)$**  nazywamy liczbę elementów naturalnych  $k$  takich, że  $k \leq n$  oraz względnie pierwszych z  $n$  (czyli  $\text{NWD}(k, n) = 1$ ).

\* Jeśli  $p$  jest dodatnią liczbą całkowitą oraz  $a, b$  są liczbami całkowitymi, wówczas mówi się, że  $a$  jest przystające do  $b$  modulo  $p$ , co zapisuje się następująco:

$$a \equiv b \pmod{p}, \quad (*)$$

jeśli  $a$  i  $b$  dają te same reszty przy dzieleniu przez  $p$ . Wyrażenie  $(*)$  nazywa się kongruencją. Dla dowolnego  $p \geq 2$  każda liczba całkowita  $a$  jest równoważna dokładnie jednej z liczb  $0, 1, 2, \dots, p-1$ , będącej resztą z dzielenia  $a$  przez  $p$ . Liczbę tę nazywa się resztą z liczby  $a$  modulo  $p$ , a zbiór reszt modulo  $p$  jest oznaczany jako  $Z_p = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$  (lub  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ).

\*\* Grupą multiplikatywną reszt modulo  $p$  nazywamy grupę odwracalnych klas reszt modulo  $p$  i oznaczamy symbolem  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ . Klasę reszt  $a + p\mathbb{Z}$  (lub  $[a]_p$ ), gdzie  $\text{NWD}(a, p) = 1$ , nazywamy klasą odwracalną modulo  $p$ .

Ponadto zachodzą następujące twierdzenia:

Jeśli  $p$  jest liczbą pierwszą, to liczba elementów  $k$  takich, że  $k \leq p$  oraz względnie pierwszych z  $p$  wynosi  $p - 1$ , czyli  $\varphi(p) = p - 1$ .

Jeśli  $g$  jest pierwiastkiem pierwotnym modulo  $p$ , to  $g^l \equiv g^k \pmod{p}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $l \equiv k \pmod{\varphi(p)}$ .

Schemat oparty na kryptosystemie ElGamala bazuje na przytoczonych wyżej określeniach i twierdzeniach. Podpis składa się etapami [6, s. 355-356]. Etap pierwszy to wygenerowanie klucza:

1. Wybiera się dużą liczbę pierwszą<sup>\*</sup>  $p$  i dwie losowe liczby całkowite:  $g$  takie, że  $2 \leq g \leq p - 2$  oraz  $x$  takie, że  $1 \leq x \leq p - 2$ . Możliwy jest taki dobór liczby  $g$ , by była ona pierwiastkiem pierwotnym modulo  $p$ . Ponadto liczba  $g$  nie powinna być dzielnikiem liczby  $p - 1$ .
2. Oblicza się wartość  $y$  z równości:

$$y = g^x \text{ MOD } p, \quad (2)$$

gdzie MOD  $p$  jest nazwą funkcji dającą resztę z dzielenia argumentu przez  $p$ .

Po dokonaniu obliczeń otrzymuje się trójkę liczb  $(y, g, p)$  stanowiącą klucz publiczny. Kluczem prywatnym jest utajniona wartość  $x$ .

Drugi etap procedury składania podpisu to generowanie podpisu:

1. Wybiera się losowo liczbę całkowitą  $k \in \{1, 2, \dots, p - 2\}$ , względnie pierwszą z liczbą  $p - 1$ . Istotne jest, aby liczba  $k$  dla każdego kolejnego podpisu była inna, inaczej istnieje możliwość obliczenia tajnego klucza nadawcy. Wybrana liczba  $k$  zostaje utajniona.
2. Podpisem pod wiadomością  $w$  jest para liczb  $(a, b)$ , których wartości są znajdowane według następujących wzorów:

$$a = g^k \text{ MOD } p, \quad (3)$$

$$b = k^{-1} (h(w) - xa) \text{ MOD } (p - 1), \quad (4)$$

gdzie:

$k^{-1}$  – element odwrotny do  $k$  modulo  $p - 1$ ,

$w$  – wiadomość, pod którą składa się podpis,

$h$  – funkcja haszująca.

---

<sup>\*</sup> Przy obecnie istniejących algorytmach obliczania logarytmów dyskretnych liczba  $p$  powinna się składać co najmniej z 768 bitów [1, s. 191].

**Funkcje haszujące** (funkcje ściągające, funkcje skrótu) to przekształcenia w postaci:

$$h: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

gdzie:

$\Sigma^*$  – zbiór wszystkich skończonych ciągów symboli ze zbioru  $\Sigma$  (łącznie z ciągiem pustym)\*,

$\Sigma^n$  – zbiór wszystkich  $n$ -elementowych ciągów symboli ze zbioru  $\Sigma$ .

Funkcje haszujące przekształcają więc ciągi symboli dowolnej długości w ciągi  $n$ -elementowe. W praktyce oznacza to przyporządkowanie każdej liczbie (liczbowej postaci wiadomości) pewnej wartości określanej jako hasz. Funkcja  $h$  musi być funkcją jednokierunkową, tzn. łatwo można obliczyć wartość haszu dla danego argumentu, ale znalezienie argumentu funkcji  $h$  na podstawie wartości haszu jest obliczeniowo niewykonalne\*\*; czyli znając hasz, prawie niemożliwe jest odtworzenie odpowiadającej mu wiadomości wyjściowej (dowody na istnienie funkcji jednokierunkowej nie istnieją). Stosowanie funkcji haszujących w podpisach cyfrowych dołączanych do wiadomości lub transakcji umożliwia wykrycie ewentualnych zmian, które po złożeniu podpisu mogły być dokonane\*\*\*.

Ostatnim etapem schematu składania podpisu cyfrowego jest jego weryfikacja:

1. Odbiorca podpisanej wiadomości, używając klucza publicznego  $(y, g, p)$ , sprawdza, czy jest spełniona nierówność:  $1 \leq a \leq p - 1$ . Jeśli warunek nie jest spełniony, podpis jest odrzucany.
2. Jeśli spełniona jest powyższa nierówność, odbiorca sprawdza, czy jest spełniona kongruencja w postaci:

$$y^a a^b \equiv g^{h(w)} \pmod{p}. \quad (5)$$

Jeżeli tak jest, otrzymana wiadomość z podpisem jest potwierdzona, jeśli zaś powyższa kongruencja nie jest prawdziwa, podpis jest odrzucany.

\* Zbiór  $\Sigma$  to tzw. alfabet – niepusty skończony zbiór. W praktyce używa się najczęściej: zwykłego alfabetu złożonego z liter, alfabetu w postaci  $\{0, 1\}$ , zbioru znaków ASCII itp. [1, s. 57].

\*\* Oznacza to, że dla  $h(x) = y$  znalezienie  $x$  na podstawie  $y$  przez jakiegokolwiek algorytm będzie wymagało zbyt wiele czasu i pamięci i niemal zawsze zakończy się niepowodzeniem.

\*\*\* Dla dwóch różnych liczb  $z$  dużym prawdopodobieństwem (gdyż funkcje haszujące nigdy nie są różnowartościowe) odpowiadające im wartości funkcji haszujących będą różne [1, s. 173-174; 6, s. 289-290; 9].

Poprawność zaprezentowanej weryfikacji pokazują poniższe obliczenia. Przyjmując, że podpis  $(a, b)$  został wygenerowany jak wyżej oraz przekształcając lewą stronę wzoru (5) za pomocą odpowiednich kongruencji powstałych z wyrażeń (2) i (3), mamy:

$$y^a a^b \equiv g^{xa} g^{kb} \pmod{p},$$

a podstawiając następnie wzór (4) i wykorzystując przytaczane w tym punkcie twierdzenia, otrzymujemy:

$$y^a a^b \equiv g^{xa} g^{kk^{-1}(h(w)-xa)} \pmod{p},$$

co po ostatecznych obliczeniach daje kongruencję:

$$y^a a^b \equiv g^{xa} g^{-xa} g^{h(w)} \equiv g^{h(w)} \pmod{p}.$$

Z kolei jeśli kongruencja (5) jest spełniona przez parę  $(a, b)$  oraz  $k$  jest logarytmem dyskretnym liczby  $a$  przy podstawie  $g$ , zachodzi:

$$g^{xa+kb} \equiv g^{h(w)} \pmod{p},$$

a ponieważ  $g$  jest pierwiastkiem pierwotnym modulo  $p$ , z cytowanych wyżej twierdzeń mamy:

$$xa + kb \equiv h(w) \pmod{(p-1)},$$

a zatem sposób weryfikacji podpisu za pomocą wzoru (5) jest poprawny<sup>\*</sup>.

Chcąc wygenerować podpis, niektóre obliczenia można wykonać wcześniej, a uzyskane wartości przechowywać w bezpiecznym miejscu. Elementem, który może być wyznaczony wcześniej, jest element odwrotny do  $k$  modulo  $p-1$ , a także pierwsza współrzędna podpisu, czyli element  $a$  (którego obliczenie wymaga potęgowania modulo  $p$ ). Pozostałe obliczenia związane ze składaniem podpisu muszą być wykonywane na bieżąco, gdyż zależą od treści wiadomości, która ma być podpisana.

---

<sup>\*</sup> Dla względnie pierwszych liczb  $k$  i  $p-1$  jedynym sposobem wygenerowania podpisu jest dokonanie tego według wzorów (3)-(4).

### 3. Podpis ElGamala – przykład

Założmy, że binarna postać wiadomości (operacji, transakcji) jest następującym ciągiem cyfr (wartość umowna)  $w = 1011010110$ . Składamy pod tą wiadomością podpis tworzony według opisanego schematu.

Wybieramy liczbę pierwszą  $p$ . Następnie wyznaczamy liczby  $g$  oraz  $x$ , przy czym liczbę  $g$  można tak dobrać, by była ona pierwiastkiem pierwotnym modulo  $p$ . Dla dużych wartości  $p$  wyznaczanie liczb będących pierwiastkami pierwotnymi modulo  $p$  jest trudne, jeżeli natomiast liczba  $p$  ma charakterystyczną postać:  $p = 2q + 1$ , gdzie  $q$  to liczba pierwsza, można skorzystać z następującego twierdzenia:

Niech  $n, p \in \mathbb{N}$ . Jeśli  $g^n \equiv 1 \pmod{p}$  i  $g^{n^d} \equiv 1 \pmod{p}$  dla każdego dzielnika pierwszego  $d$  liczby  $n$ , to  $n$  jest rzędem elementu  $g$ . A zatem dla liczby  $p$ , dobranej jak wyżej, sprawdzamy, czy element  $g$  spełnia następujące kongruencje:

$$g^2 \equiv 1 \pmod{p} \text{ oraz } g^q \equiv 1 \pmod{p}.$$

Jeśli obie kongruencje nie są spełnione, liczba  $g$  jest pierwiastkiem pierwotnym modulo  $p$ .

Do wyznaczenia wartości  $b$  będą potrzebne dodatkowe elementy: wartość  $k^{-1}$  modulo  $p - 1$  liczona z kongruencji:

$$k^{-1} \cdot k \equiv 1 \pmod{p - 1} \quad (6)$$

w zbiorze  $Z_{p-1}$  oraz wartość funkcji haszującej\* (odpornej na kolizje\*\*) dla wiadomości  $w$  – zostanie wykorzystana funkcja  $h: \{0, 1\}^* \rightarrow \{1, 2, \dots, p - 2\}$  w postaci:

$$h(w) = g^w \text{ MOD } (p - 1). \quad (7)$$

\* W praktyce stosuje się bardziej złożone i efektywne funkcje skrótu, takie jak np.: MD5, SHA-1, SHA-2, RIPEMD-160 [9].

\*\* Kolizją funkcji  $h$  nazywamy parę elementów  $(w, w')$ , dla których  $w \neq w'$  oraz  $h(w) = h(w')$ , natomiast funkcję  $h$  nazywamy odporną na kolizję, jeśli zadanie znalezienia dowolnej kolizji  $(w, w')$  jest obliczeniowo niewykonalne (wymaga zbyt wiele czasu i pamięci i prawie zawsze jest niemożliwe).

Dla przejrzystości, obliczeń dokonano dla bardzo małej liczby pierwszej  $p$ ; odpowiednie wartości zostały zamieszczone w tabeli 1.

Tabela 1

Przykład podpisu za pomocą schematu ElGamala

| Opis                                | Wybrane/obliczone wartości                                                                                                                     |
|-------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Wybrana wartość $p$                 | $p = 7$                                                                                                                                        |
| Wybrana wartość $g$                 | $g = 5$<br>( $g$ jest pierwiastkiem pierwotnym modulo 7, ponieważ kongruencje: $5^2 \equiv 1 \pmod{7}$ · $5^3 \equiv 1 \pmod{7}$ nie zachodzą) |
| Tajny klucz $x$                     | $x = 4$                                                                                                                                        |
| Wartość $y$ ze wzoru (2)            | $y = 5^4 \text{ MOD } 7 = 2$                                                                                                                   |
| Klucz publiczny                     | $(2, 5, 7)$                                                                                                                                    |
| Wybrana wartość $k$                 | $k = 5$                                                                                                                                        |
| Wartość $a$ ze wzoru (3)            | $a = 5^5 \text{ MOD } 7 = 3$                                                                                                                   |
| Wartość $k^{-1}$ ze wzoru (6)       | $k^{-1} \cdot 5 \equiv 1 \pmod{6} \Rightarrow k^{-1} = 5$                                                                                      |
| Hasz wiadomości $h(w)$ ze wzoru (7) | $h(1011010110) = 5^{1011010110} \text{ MOD } 6 = 1$                                                                                            |
| Wartość $b$ ze wzoru (4)            | $b = 5 \cdot (1 - 4 \cdot 3) \text{ MOD } 6 = 5$                                                                                               |
| Uzyskany podpis $(a, b)$            | $(3, 5)$                                                                                                                                       |

Odbiorca, który otrzymuje wiadomość, może dokonać weryfikacji podpisu. Znając klucz publiczny oraz postać funkcji haszującej, na podstawie wzoru (5) dokonuje obliczeń:

$$2^3 \cdot 3^5 \equiv 5^1 \pmod{7},$$

czyli:

$$1944 \equiv 5 \pmod{7},$$

co jest prawdą. Zatem otrzymana wiadomość pochodzi od osoby, która ją nadała.

## Podsumowanie

Dzięki podpisom cyfrowym istnieje możliwość weryfikacji tożsamości autorów przesyłanych wiadomości lub dokonywanych transakcji. Ponadto, dzięki temu, iż podpis cyfrowy jest związany z dokumentem, pod którym został złożony, jest niemal niemożliwy do podrobienia. Podpisy cyfrowe, do tworzenia których wykorzystuje się przedstawione zagadnienia, dają więc gwarancję bezpieczeństwa operacji przeprowadzanych w sieci.

Ze względu na coraz większą powszechność operacji dokonywanych drogą elektroniczną, rola podpisów cyfrowych jest coraz bardziej znacząca. Opisany w niniejszym opracowaniu schemat podpisu ElGamala ukazuje, w jaki sposób narzędzia matematyczne, jakie daje teoria liczb, mogą być wykorzystane w praktyce.

Rozwój techniki komputerowej otwiera nowe możliwości zastosowań aparatu matematycznego. Teorie, które przez długi czas były uważane za bezużyteczne, znajdują praktyczne zastosowanie. Stąd też istotne jest przybliżanie zagadnień, dla których znalazło się miejsce w nowych obszarach zastosowań.

## Literatura

1. Buchmann A.J.: *Wprowadzenie do kryptografii*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2006.
2. Narkiewicz W.: *Teoria liczb*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2003.
3. Pośpiech E.: *Zastosowania algorytmu kodującego RSA w bankowości elektronicznej*. „Studia Ekonomiczne” 2008, nr 50.
4. Robling-Denning D.E.: *Kryptografia i ochrona danych*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1992.
5. Ross K.A., Wright C.R.B.: *Matematyka dyskretna*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2003.
6. Song Y. Yan: *Teoria liczb w informatyce*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2006.
7. [http://pl.wikipedia.org/wiki/Podpis\\_cyfrowy](http://pl.wikipedia.org/wiki/Podpis_cyfrowy).
8. [http://pl.wikipedia.org/wiki/Kryptografia\\_asymetryczna](http://pl.wikipedia.org/wiki/Kryptografia_asymetryczna)
9. [http://pl.wikipedia.org/wiki/Funkcja\\_haszująca](http://pl.wikipedia.org/wiki/Funkcja_haszująca)
10. <http://www.ebanki.info>
11. <http://www.podpis.nordea.pl>
12. <http://www.epodpis.pl>

## DIGITAL SIGNATURES – ELGAMAL SIGNATURE SCHEME

### Summary

For the sake of many applications of the Internet, digital signatures become more and more important. It is an additional information attached to the message. A signature provides authenticity of a message – the message may be anything, from a common e-mail to an important contract. One of the most important things connected with such activities as sending messages is safety of these actions. In this case, advanced mathematical and computer tools, such as modern cryptography, are of crucial importance.

The purpose of the article is to present ElGamal signature scheme, the main definitions and theorems and illustrate it with an example. It is an algorithm based on asymmetric cryptography – it uses a pair of cryptographic keys – a public key (which may be distributed) and a private key (which is secret). A message is signed with a sender's private key and is verified by anyone who knows the public key. The ElGamal signature scheme is a digital signature scheme which is based on the difficulty of computing discrete logarithms.

**Zygmunt Przybycin**

# **ZASTOSOWANIE LOGIKI ROZMYTEJ W FINANSACH – ZARZĄDZANIE RYZYKIEM METODĄ PORTFELOWĄ**

## **Wstęp**

Rynek kapitałowy jest miejscem transakcji kupna i sprzedaży instrumentów finansowych, dokonywana jest więc alokacja kapitału w nadziei osiągnięcia określonego celu. Celem tym może być nadzwyczajny zysk – mówimy wówczas o inwestycji kapitałowej. W opracowaniu inwestycję kapitałową będziemy rozumieć w sensie definicji Hirschleifera: „Inwestycja jest w istocie bieżącym wyrzeczeniem dla przyszłych korzyści. Ale terażniejszość jest względnie dobrze znana, natomiast przyszłość to zawsze tajemnica. Przeto inwestycja jest wyrzeczeniem się pewnego na rzecz niepewnego”.

W przyjętej definicji występują wszystkie istotne cechy procesu inwestowania:

- element psychologiczny – wyrzeczenie się pewnego na rzecz niepewnego,
- element czasu – cel inwestowania osiągalny w przyszłości,
- element niepewności – terażniejszość jest dobrze znana, przyszłość jest zawsze tajemnicą,
- czynnik ludzki – człowiek, kierując się wiedzą, intuicją, a także emocjami, podejmuje decyzję.

Nadzieja, a nie pewność osiągnięcia celu wynika z faktu, że zjawiska i procesy na rynku kapitałowym są złożone, zależą od czasu, otoczenia, jak również od uczestników rynku. Teoria finansów formułuje zasady i prawa funkcjonowania rynku kapitałowego, które często są weryfikowane empirycznie. Badania empiryczne, w tym statystyczne, mają również znaczenie poznawcze – niejed-

nokrotnie prowadzą do wykrywania mechanizmów rynkowych, badania ich stabilności w czasie i w tym znaczeniu mają wartość eksploracyjną.

Uwzględniając powyższe, możemy przyjąć następującą hipotezę: Teraźniejszość rynku kapitałowego jest dobrze określona, jego funkcjonowanie w przyszłości jest trudne, a czasami wręcz niemożliwe do określenia. Konsekwencją przyjętej hipotezy jest niepewność osiągnięcia celu inwestycji kapitałowej.

W 1921 roku F.H. Knight zaproponował podział niepewności na niepewność niemierzalną oraz niepewność mierzalną – ryzyko. Z niepewnością mierzalną (ryzykiem) mamy do czynienia tylko wówczas, gdy mechanizmy rynkowe oraz czynniki kształtujące rynek są mierzalne w sensie probabilistyki. Oznacza to stabilność mechanizmów rynkowych oraz znajomość rozkładów prawdopodobieństwa przyszłych stanów rynku. Znane są zatem czynniki niepewności, a co najważniejsze są one mierzalne. W tym miejscu należy zaznaczyć, że założenie o kwantyfikacji czynników niepewności w rzeczywistości jest rzadko spełnione. Zdarzają się natomiast sytuacje, w których czynniki niepewności są określone nieostro. W przypadku gdy są znane czynniki niepewności, ale są mierzalne w sensie rozmytym, będziemy wyróżniać niepewność rozmytą – ryzyko rozmyte. Wydaje się zatem oczywiste, że do zarządzania rozmytym ryzykiem powinny mieć zastosowanie modele decyzyjne uwzględniające logikę rozmytą.

## 1. Wybrane elementy logiki rozmytej

### 1.1. Zbiory rozmyte

Podstawowym pojęciem logiki rozmytej jest zbiór rozmyty, rozumiany jako obiekt zawierający element pewnej przestrzeni rozważań, przy czym każdy z tych elementów może w pełni należeć do zbioru rozmytego, wcale do niego nie należeć albo należeć w pewnym stopniu. Przykładem zbioru rozmytego jest obiekt, jaki tworzą instrumenty finansowe (akcje) przynoszące wysoką stopę zysku. Własnością, która określa tutaj zbiór rozmyty, jest wysoka stopa zysku. Element finansowy należy do rozważanego zbioru w stopniu, który odpowiada pewnej skali ocen. Jeżeli skala ocen rozciąga się od zera do jeden, to instrument finansowy, który ma zdecydowanie niską stopę zwrotu, ma ocenę zero, zdecydowanie wysoką stopę zwrotu – ocenę jeden, natomiast instrument posiadający średnią stopę zwrotu – ocenę z przedziału  $(0,1)$ . Ostatecznie omawiany zbiór rozmyty tworzą te wszystkie instrumenty finansowe, które są rozważane przez

inwestora. Zatem do określenia zbioru rozmytego konieczne jest zdefiniowanie przestrzeni rozważań oraz funkcji określonej na tej przestrzeni o wartościach z przedziału  $\langle 0,1 \rangle$  określającej stopień przynależności elementu przestrzeni do zbioru rozmytego.

Formalnie zbiór rozmyty definiujemy następująco:

$$A = \{ \{x, \mu_A(x)\} : x \in X, \mu_A(x) \in \langle 0,1 \rangle \} \quad (1)$$

gdzie:

$X$  – przestrzeń rozważań,

$\mu_A : X \rightarrow \langle 0,1 \rangle$  – funkcja przynależności.

Funkcja przynależności wprowadza uporządkowanie obiektów przestrzeni  $X$  ze względu na pewną własność skojarzoną z danym zbiorem rozmytym. Na ogół funkcja ta odzwierciedla wiedzę obiektywną oraz subiektywną o elementach rozważanej przestrzeni. Należy wyraźnie zaznaczyć, że rezultaty, w tym praktyczne, uzyskane na podstawie modeli rozmytych w decydującym stopniu zależą od adekwatnego wyznaczenia funkcji przynależności. W literaturze wiele miejsca poświęcono metodom wyznaczania funkcji przynależności (por. [5]); o tych metodach nie będzie mowy w niniejszym opracowaniu.

Dalej wprowadzimy pojęcia charakteryzujące zbiory rozmyte, ograniczając się do tych, które znajdą zastosowanie w tym opracowaniu:

- mnożnikiem zbioru rozmytego (support) nazywamy zbiór ostry złożony z tych elementów przestrzeni, które należą do rozmytego zbioru w stopniu niezerowym: tak więc  $\text{sup}(A) = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}$ ,
- wysokością zbioru rozmytego (height) nazywamy supremum funkcji przynależności:  $\text{hgt}(A) = \sup \mu_A(x)$ .

Zbiór rozmyty, którego wysokość jest równa jedności, będziemy nazywać zbiorem normalnym.

Ważną własnością zbiorów rozmytych jest wypukłość oraz wklęsłość – własności te dotyczą jedynie zbiorów rozmytych określonych na przestrzeni rzeczywistej określonej nad ciałem  $R$ .

- Zbiór rozmyty  $A$  określony na przestrzeni  $R$  nazywamy wypukłym, jeżeli dla dowolnych  $x_1, x_2 \in R$  i dowolnej liczby  $\alpha \in \langle 0,1 \rangle$  jest spełniona nierówność:

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}$$

- Zbiór rozmyty  $A$  określony na przestrzeni  $R$  nazywamy wklęsłym, jeżeli dla dowolnych  $x_1, x_2 \in R$  i dowolnej liczby  $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$  jest spełniona nierówność:

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \max\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}$$

Funkcję przynależności zbioru wypukłego będziemy nazywać wypukłą, a funkcję przynależności zbioru wklęsłego – funkcją wklęsłą. Należy wyraźnie podkreślić, że wprowadzone pojęcia wypukłości i wklęsłości funkcji przynależności istotnie różnią się od tak samo nazwanych własności funkcji analitycznych.

## 1.2. Liczby rozmyte

Poprzec zbiory rozmyte definiuje się liczby rozmyte: Liczbą rozmytą nazywamy zbiór rozmyty określony na przestrzeni liczb rzeczywistych ( $X = R$ ) normalny, wypukły o funkcji przynależności przedziałami ciągłej.

Dalej ograniczamy się tylko do liczb rozmytych typu L-R: Liczbą rozmytą L-R nazywamy zbiór rozmyty określony na przestrzeni liczb rzeczywistych, którego funkcja przynależności przyjmuje postać:

$$\mu_z(x) = \begin{cases} L(x) & \text{dla } s^L - s^\alpha < x < s^L \\ 1 & \text{dla } s^L \leq x \leq s^U \\ R(x) & \text{dla } s^U < x < s^U + s^\beta \\ 0 & \text{dla } x \text{ pozostałych} \end{cases} \quad (2)$$

przy czym:

$$L(x) = L\left(\frac{x - (s^L - s^\alpha)}{s^\alpha}\right), \quad R(x) = R\left(\frac{s^U + s^\beta - x}{s^\beta}\right)$$

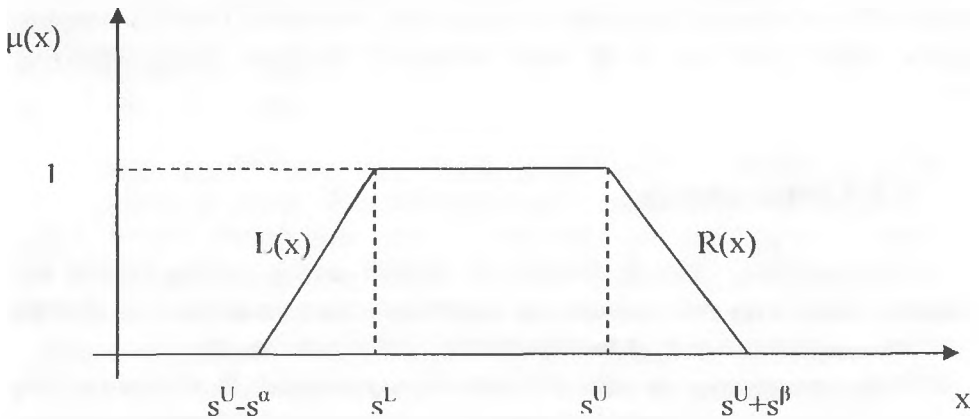
$L(0) = 0$ ,  $L(1) = 1$ ,  $L(\cdot)$  jest funkcją niemalejącą,

$R(0) = 0$ ,  $R(1) = 1$ ,  $R(\cdot)$  jest funkcją nierosnącą.

Dalej liczbę rozmytą L-R będziemy oznaczać symbolem:

$$\tilde{s} = (s^L, s^U, s^\alpha, s^\beta)$$

gdzie  $s^L, s^U, s^\alpha, s^\beta$  są liczbami rzeczywistymi. Liczbę rozmytą L-R ilustruje rysunek 1.



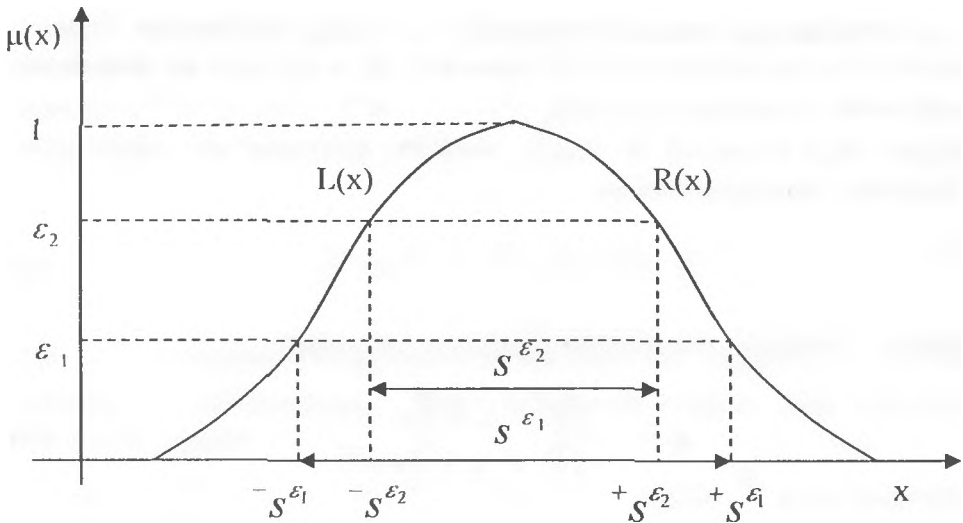
Rys. 1. Liczba rozmyta L-R

Jeżeli np. przyjmiemy  $s^L = 7,5$ ;  $s^U = 8,5$ ;  $s^\alpha = s^\beta = 0,5$ , wówczas liczbę rozmytą  $\tilde{s} = (7,5; 8,5; 0,5; 0,5)$  interpretujemy jako liczbę około 8. W szczególności jeżeli  $s^L = s^U$  i  $s^\alpha = s^\beta = 0$ , wówczas liczba rozmyta  $\tilde{s}$  jest liczbą ostrą – liczbą rzeczywistą.

Działania arytmetyczne na liczbach rozmytych L-R sprowadzimy do działań na przedziałach liczbowych; w tym celu wprowadzimy pojęcie przekroju zbioru rozmytego:  $\varepsilon$ -przekrojem zbioru rozmytego  $\tilde{s}$  nazywamy zbiór ostry określony następująco:

$$s^\varepsilon = \{x \in X : \mu_{\tilde{s}}(x) \geq \varepsilon\} = \langle {}^-s^\varepsilon, {}^+s^\varepsilon \rangle, \varepsilon \in \langle 0, 1 \rangle \quad (3)$$

gdzie  ${}^-s^\varepsilon = \min\{x : \mu_{\tilde{s}}(x) \geq \varepsilon\}$ ,  ${}^+s^\varepsilon = \max\{x : \mu_{\tilde{s}}(x) \geq \varepsilon\}$ . Zauważmy, że jeżeli  $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ , to  $s^{\varepsilon_2} \subset s^{\varepsilon_1}$ .



Rys. 2. Zbiór rozmyty i jego dwa przekroje

Używając operacji  $\varepsilon$ -przekroju, można dokonać dekompozycji funkcji przynależności zbioru rozmytego zgodnie ze wzorem:

$$\mu_s(x) = \sup[\varepsilon \wedge J_{s^\varepsilon}(x)] \quad (4)$$

gdzie:

$x \in R$ ,  $\varepsilon \in <0,1>$ ,

$J_{s^\varepsilon}(x)$  – funkcja charakterystyczna zbioru  $s^\varepsilon$ ,

$\wedge$  – algebraiczna operacja minimum.

Zasada dekompozycji wyraża funkcję przynależności zbioru rozmytego poprzez funkcje charakterystyczne zbiorów ostrych. Z kolei jeśli oznaczymy przez

$\varepsilon[-s^\varepsilon, +s^\varepsilon]$  zbiór rozmyty o funkcji przynależności  $\varepsilon \cdot J_{s^\varepsilon}(\cdot)$ , wówczas zbiór rozmyty  $\tilde{s}$  można zapisać następująco:

$$\tilde{s} = \bigcup_{\varepsilon} \varepsilon[-s^\varepsilon, +s^\varepsilon] \quad \varepsilon \in <0,1> \quad (5)$$

Równość (5) – zasada reprezentacji jest rekonstrukcją zbioru rozmytego z prostokątnych zbiorów rozmytych  $\varepsilon[-s^\varepsilon, +s^\varepsilon]$ .

Uwzględniając zasadę dekompozycji oraz zasadę reprezentacji, działania algebraiczne na liczbach rozmytych sprowadza się do działania na przedziałach liczbowych. W szczególności jeżeli  $s^E = [{}^-s^E, {}^+s^E]$  i  $r^E = [{}^-r^E, {}^+r^E]$  są przekrojami liczb rozmytych  $\tilde{s}$  oraz  $\tilde{r}$ , wówczas dodawanie oraz odejmowanie przekrojów określamy wzorem:

$$s^E \pm r^E = [{}^-s^E \pm {}^-r^E, {}^+s^E \pm {}^+r^E] \quad (6)$$

natomiast mnożenie oraz dzielenie określamy następująco:

$$k \cdot s^E = \begin{cases} [k^- s^E, k^+ s^E] & k \geq 0 \\ [k^+ s^E, k^- s^E] & k < 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$s^E \cdot r^E = [{}^-s^E \cdot {}^-r^E, {}^+s^E \cdot {}^+r^E] \quad (8)$$

$$s^E : r^E = [{}^-s^E : {}^+r^E, {}^+s^E : {}^-r^E] \quad (9)$$

We wzorach (8)-(9) granice przekrojów są liczbami dodatnimi. Analogicznie określamy mnożenie oraz dzielenie przy różnych znakach granic przekrojów.

### 1.3. Programowanie liniowe

Zadanie programowania matematycznego, w którym zarówno funkcja celu, jak i warunki brzegowe przyjmują postać liniową, jest nazywane programem liniowym (PL). Klasyczna wersja programu liniowego zakłada dokładną znajomość współczynników funkcji celu oraz warunków brzegowych – wówczas funkcja celu, jak również warunki brzegowe są określone ostro.

W przypadku gdy współczynniki funkcji celu bądź warunków brzegowych są określane nieostro (są liczbami rozmytymi), mówimy o rozmytym programie liniowym (RPL). Celem formalnego zapisu RPL przyjmijmy następujące oznaczenia:

$X$  – zbiór dopuszczalnych decyzji,

$$C' = \sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i \text{ – funkcja celu,}$$

$$Z_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot x_i \quad j = 1 \dots m \text{ – warunki brzegowe.}$$

Przy przyjętych oznaczeniach RPL zapisujemy w postaci: wyznaczyć  $x \in X$  takie, że:

$$C = \sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i \lesseqgtr C_o \quad (10)$$

$$Z_j = \sum a_{ij} \cdot x_i \gtrless b_j, x_i \geq 0 \quad (11)$$

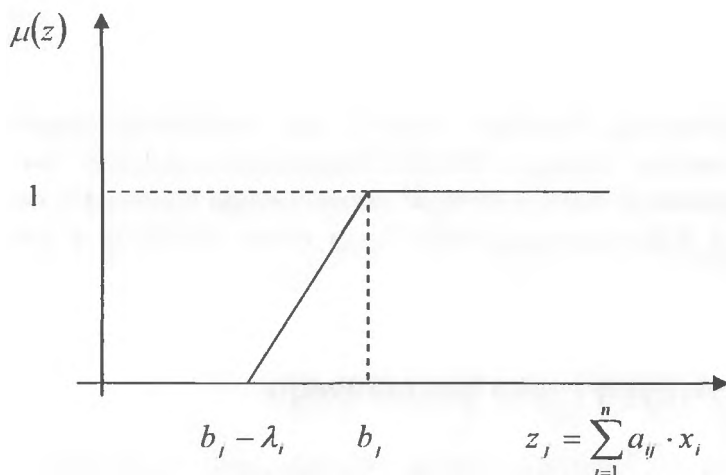
gdzie  $C_o$  to akceptowalny poziom założonego celu; współczynniki  $a_{ij}$ ,  $c_i$ ,  $b_j$  niekoniecznie są liczbami ostrymi. Wężyk ( $\sim$ ) oznacza rozmytą wersję symbolu, nad którym występuje.

Zadanie RPL (10)-(11) można sprowadzić do zadania PL przy następujących założeniach:

... funkcja przynależności rozmytego ograniczenia  $z_j$  przyjmuje postać:

$$\mu(z_j) = \begin{cases} 0 & \text{dla } z_j \leq b_j - \lambda_j, \\ 1 & \text{dla } z_j \geq b_j, \\ L_{(z_j)} & \text{dla } z_j \in (b_j - \lambda_j, b_j), j = 1, \dots, m \end{cases} \quad (12)$$

gdzie  $L_{(z_j)}$  jest rosnącą funkcją liniową.



Rys. 3 Funkcja przynależności warunku brzegowego  $z_j$

funkcja przynależności rozmytego celu  $C$  ma postać:

$$\mu(C) \begin{cases} 1 \text{ dla } C \leq C_o \\ 0 \text{ dla } C \geq C_o + \lambda \\ R(C) \text{ dla } C \in (C_o, C_o + \lambda) \end{cases} \quad (13)$$

gdzie  $R(\cdot)$  jest malejącą funkcją liniową, a  $\lambda_1, \lambda$  oznaczają poziom tolerancji.

Niech  $\alpha$  oznacza minimalny poziom akceptacji warunków brzegowych oraz celu, tj. liczbę z przedziału  $\langle 0, 1 \rangle$  taką, że  $\mu(z_j) \geq \alpha, \mu(C) \geq \alpha$ . Wobec (12) i (13) otrzymujemy:

$$z_j \geq b_j - \lambda_{j\alpha} + \lambda_{j\alpha} \Rightarrow \mu(z_j) \geq \alpha$$

$$C \leq C_o + \lambda - \lambda_\alpha \Rightarrow \mu(C) \geq \alpha$$

Wówczas dla zadanych poziomów tolerancji, uwzględniając  $\alpha$  przekroje dla warunków brzegowych oraz funkcji celu, otrzymujemy następujący program liniowy: znaleźć maksymalne  $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$  takie, że:

$$z_j - \lambda_{j\alpha} \geq b_j - \alpha, j=1, \dots, m \quad (14)$$

$$C + \lambda_\alpha \leq C_o + \lambda \quad (15)$$

Zadanie programowania liniowego (14)-(15) jest równoważne zadaniu rozmytego programowania liniowego (10)-(11). Przedstawione podejście Zimmermanna [8] transformacji zadania RPL do równoważnego zadania PL jest jednym z możliwych. Inną propozycję transformacji można znaleźć np. w pracy Guo i Huang [2].

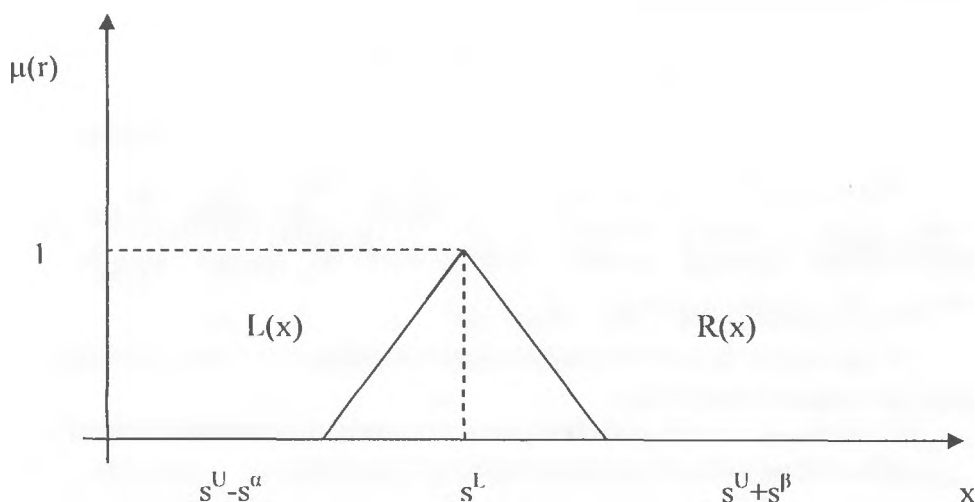
## 2. Portfel inwestycyjny rynku kapitałowego

Podstawy teoretyczne konstrukcji portfela inwestycyjnego zostały sformułowane przez H. Markowitza. Najogólniej rzecz biorąc, teoria Markowitza umożliwia wyznaczenie tzw. portfela efektywnego, czyli takiego, który maksy-

malizuje dochód przy zakładanym ryzyku bądź minimalizuje ryzyko przy zadanym dochodzie. Niezwykle ważnym założeniem w tej teorii jest znajomość rozkładów stóp zwrotu składników portfela (rozkład normalny), co w konsekwencji pozwala na wyznaczenie dochodu portfela (średnia stopa zwrotu) oraz ryzyka (odchylenie standardowe). Ponieważ dochód z portfela oraz ryzyko są jedynymi parametrami wchodzącymi do kryterium wyboru, przyjmuje się, że w okresie trwania inwestycji są one stabilne w czasie i ostro określone. Liczne sukcesy inwestycji kapitałowych potwierdzają słuszność założenia o stabilności wymienionych parametrów; ma to miejsce, gdy rynek jest stabilny. Jednak w przypadku rynku niestabilnego, słabo określonego, założenie stabilności jest dyskusyjne, dyskusyjna jest również efektywność portfela. Gdy rynek jest niestabilny, słabo określony, można – uwzględniając wiedzę teoretyczną, historyczną oraz opinie ekspertów – wyznaczyć parametry składników portfela nieostro. Dochód z portfela, ryzyko, wyraża się wówczas w kategoriach rozmytych.

W celu konstrukcji portfela w kategoriach rozmytych przyjmijmy następujące oznaczenia i założenia:

1. Stopa zwrotu  $i$ -tego składnika portfela jest trójkątną liczbą rozmytą typu  $L - R : \tilde{r}_i = (r_i^p, r_i^m, r_i^o)$ , gdzie  $r_i^p, r_i^m, r_i^o$  oznaczają odpowiednio: pesymistyczną, najbardziej możliwą, optymistyczną wartość stopy zwrotu  $i$ -tego składnika.



Rys. 4. Trójkątna liczba rozmyta L-R

2.  $x_i$  oznacza udział  $i$ -tego składnika w portfelu, przy czym:

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 \text{ i } x_i \geq 0 \quad (16)$$

Wobec powyższego stopa zwrotu z portfela  $n$ -składnikowego jest liczbą rozmytą i wyraża się wzorem:

$$\tilde{r}_p = \sum_{i=1}^n x_i \tilde{r}_i \quad (17)$$

Zakładając, że stopa zwrotu z portfela jest rozmytą liczbą trójkątną typu  $L - R$ , mamy:

$$\tilde{r}_p = (r_p^p, r_p^m, r_p^o) \quad (18)$$

Ponadto ryzyko portfela określimy następująco:

$$s_p = r_p^m - r_p^p \quad (19)$$

natomiast skośność portfela wzorem:

$$a_s = \frac{(r_p^o - r_p^m) - (r_p^m - r_p^p)}{(r_p^o - r_p^m) + (r_p^m - r_p^p)} \quad (20)$$

Można wówczas sformułować kryteria dla portfela efektywnego. Uznając stopę zwrotu z portfela określoną wzorem (17) za miarę dochodowości, natomiast różnicę określoną wzorem (18) za miarę ryzyka portfela, sformułowano kryteria dla konstrukcji portfela efektywnego.

W niniejszym opracowaniu ograniczono się jedynie do trzech, zdaniem autora, zasadniczych kryteriów:

1. Minimalizacja ryzyka przy zadanym dochodzie. W tym kryterium inwestor wybiera miary dochodu i ryzyka określone odpowiednio wzorami (17) i (19), a następnie wybiera portfel o minimalnym ryzyku spośród portfeli, których dochód nie jest mniejszy od założonego poziomu.
2. Maksymalizacja dochodu przy zadanym ryzyku. W tym kryterium inwestor wybiera miary dochodu i ryzyka określone odpowiednio wzorami (17) i (19),

a następnie spośród portfeli, których ryzyko nie przekracza zadanego poziomu, wybiera ten, który ma maksymalny dochód.

3. Kryterium uwzględniające więcej niż dwa parametry. Przyjmując za parametry dochód, ryzyko i skośność, określone odpowiednio wzorami (17), (19) i (20), inwestor konstruuje portfel, który:
  - dla danego poziomu ryzyka i skośności ma maksymalny dochód,
  - dla danego poziomu dochodu i skośności ma minimalne ryzyko.

Zauważmy, że konstrukcja portfela efektywnego w sensie sformułowanych kryteriów sprowadza się do rozwiązania odpowiedniego rozmytego zadania programowania liniowego.

## Zakończenie

W opracowaniu przedstawiono koncepcję konstrukcji efektywnego portfela inwestycyjnego w przypadku nieostrych informacji o stanie rynku kapitałowego. Należy podkreślić, iż efektywność zarządzania ryzykiem metodą portfelową jest zdeterminowana poprawnym określeniem parametrów portfela. W przypadku gdy parametry portfela są wyrażone w kategoriach rozmytych, o efektywności metody decyduje właściwy dobór funkcji przynależności. Funkcję tę szacuje się z uwzględnieniem szerokiej wiedzy, w tym wiedzy eksperckiej, co według przekonania autora jest kluczem do budowy modeli wystarczająco dokładnie opisujących rzeczywistość.

## Literatura

1. Begg D.: *Makroekonomia*. PWE, Warszawa 2003.
2. Guo L., Huong Z.: *A Possibility Linear Programming Method for Asset Allocation*. „J. Actuarial Pact” 1996, 2.
3. Jajuga K., Jajuga T.: *Inwestycje*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2001.
4. Kacprzyk J.: *Zbiory rozmyte w analizie systemowej*. PWN, Warszawa 1986.
5. Łachwa A.: *Rozmyty świat zbiorów, liczb, relacji, faktów, regul i decyzji*. AOW.EXIT, Warszawa 2001.
6. Przybycin Z.: *Fuzzy Forecastes of Financial Series*. ZN. Uniwersytet Techniczny, Ostrava 2006.
7. Shapiro A.F.: *Fuzzy Logic in Insurance*. „Insur. Math. Econ.” 2004.
8. Zimmermann H.J.: *Fuzzy Programming and Linear Programming with Several Objective Functions*. „Fuzzy. Sets. Syst.” 1978, 1.

## **USE OF FUZZY LOGIC IN FINANCE – RISK MANAGEMENT THROUGH PORTFOLIO METHOD**

### **Summary**

The article presents the concept of creating a fuzzy investment portfolio. The selection criteria and the methodology of designating the effective portfolio have been formulated.

Joanna Trzęsiok

# **BADANIE ODPORNOŚCI WYBRANYCH NIEPARAMETRYCZNYCH MODELI REGRESJI**

## **Wprowadzenie**

Nieparametryczne metody regresji stanowią szeroką grupę zróżnicowanych i dynamicznie rozwijających się metod. Mają one często lepsze własności statystyczne niż np. klasyczna metoda najmniejszych kwadratów. Przeprowadzone badania porównawcze pokazują, że modele uzyskane za pomocą nieparametrycznych metod regresji charakteryzują się relatywnie dużą dokładnością predykcji (zob. [4]). Stawiana jest również hipoteza, iż modele te są bardziej odporne na występowanie w zbiorze uczącym szumu oraz wartości oddalonych.

W niniejszym opracowaniu zostanie zaprezentowana analiza wrażliwości nieparametrycznych metod regresji na występowanie w zbiorze danych wartości oddalonych oraz wartości zaburzonych wpływem zmiennych losowych.

Badanie odporności modeli regresji zostanie przeprowadzone dla dwóch wybranych nieparametrycznych metod:

- wielowymiarowej metody krzywych sklejanых POLYMARS,
- metody rzutowania PPR.

Uzyskane wyniki będą również porównane z błędami predykcji dla klasycznego modelu regresji liniowej.

# 1. Wielowymiarowa metoda krzywych sklejanych POLYMARS

Twórcą popularnej, wielowymiarowej metody MARS (ang. multivariate adaptive regression splines) jest J. Friedman (zob. [2]). Została ona jednak zmodyfikowana w 1997 roku przez Kooperberga, Bose'a i Stone'a. Jej modyfikację nazywamy metodą POLYMARS (ang. multivariate adaptive polynomial spline regression) (zob. [3]).

Metoda POLYMARS, jako metoda nieparametryczna, nie wymaga znajomości rozkładów badanych zmiennych ani analitycznych postaci związków między nimi. Ważną jej zaletą jest to, że pozwala ona na wprowadzanie do modelu zarówno zmiennych metrycznych, jak i niemetrycznych.

Niech  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)$  będzie  $N$  wymiarowym wektorem zmiennych objaśniających, zaś  $Y$  zmienną zależną. Przez  $x_{ij}$  oznaczmy  $i$ -tą realizację zmiennej  $X_j$  (dla  $j = 1, \dots, N$  oraz  $i = 1, \dots, n$ ).

Nieparametryczna metoda POLYMARS opiera się na funkcjach sklejanych pierwszego rzędu w postaci:

$$(X_j - \xi_j)_+ = \begin{cases} X_j - \xi_j, & \text{dla } X_j \geq \xi_j, \\ 0, & \text{dla } X_j < \xi_j, \end{cases} \quad (1)$$

gdzie punkt  $\xi_j$  jest węzłem, czyli punktem podziału dziedziny zmiennej  $X_j$  (dla  $j = 1, \dots, N$ ), w którym funkcje typu (1) zostają „sklejone”.

Model regresyjny w tej metodzie można przedstawić w postaci addytywnej:

$$f(\mathbf{X}) = \alpha_0 + \sum_{m=1}^M \alpha_m h_m(\mathbf{X}), \quad (2)$$

gdzie funkcje  $h_m$ , przedstawione we wzorze (2), są iloczynami tensorowymi funkcji sklejanych (1):

$$h_m(\mathbf{X}) = u_m \prod_{l=1}^{L_m} (X_{v(m,l)} - \xi_{v(m,l)})_+, \quad (3)$$

gdzie  $u_m \in \{-1, 1\}$ ,  $L_m \in \{1, 2\}$  oznacza liczbę czynników (funkcji sklepanych pierwszego rzędu) tworzących  $m$ -ty składnik modelu,  $v(m, l) \in \{1, \dots, N\}$  wskazuje numer zmiennej tworzącej  $l$ -ty czynnik  $m$ -tego składnika modelu.

W omawianej metodzie algorytm budowy modelu regresyjnego składa się z dwóch głównych etapów: dołączania zmiennych do modelu oraz ich eliminacji. Procedury te zostały szczegółowo omówione w pracy [5].

## 2. Metoda rzutowania PPR

Metoda rzutowania PPR (ang. projection pursuit regression) została zastosowana po raz pierwszy w zagadnieniu regresji przez J. Friedmana i W. Stuetzle'a (zob. [1]). Jej celem jest transformacja danych z przestrzeni wielowymiarowej w przestrzeń o niższym wymiarze, w której łatwiej jest badaczowi zaobserwować pewne własności analizowanego zbioru obserwacji. Transformacja ta odbywa się poprzez rzutowanie wektora zmiennych objaśniających  $\mathbf{X}$  w kierunkach  $\alpha_k$ . Otrzymujemy w ten sposób nowe zmienne:

$$Z_k = \alpha_k^T \cdot \mathbf{X}, \text{ dla } k = 1, \dots, K, \quad (4)$$

gdzie  $\alpha_k \in \mathbf{R}^n$  są unormowanymi wektorami, nazywanymi kierunkami rzutowania.

Model zbudowany za pomocą metody rzutowania PPR ma postać addytywną:

$$Y = f(\mathbf{X}) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^K \beta_k g_k(\alpha_k^T \cdot \mathbf{X}). \quad (5)$$

Funkcje składowe modelu –  $g_k$  (dla  $k = 1, \dots, K$ ) są funkcjami jednej zmiennej, natomiast  $\beta_k$  to parametry modelu.

Estymatory parametrów  $\beta_k$ , jak również kierunków rzutowania  $\alpha_k$ , otrzymujemy w kolejnych krokach algorytmu (zob. [6]) poprzez minimalizację błędu empirycznego:

$$R_{emp}(\alpha, \beta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - f(\mathbf{x}_i))^2, \quad (6)$$

gdzie  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K)$  oraz  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_K)$ .

### 3. Przykład ilustrujący działanie metod POLYMARS i PPR

Dla zilustrowania działania przedstawionych nieparametrycznych metod regresji zostaną zbudowane, za pomocą programu statystycznego **R**, dwa modele regresji na rzeczywistym zbiorze danych **Clothing**, dołączonym do biblioteki **Ecdat** programu **R**.

Dane w zbiorze **Clothing** opisują wartość sprzedaży konfekcji męskiej w sklepach w Holandii. Zbiór ten zawiera 400 obserwacji charakteryzowanych przez 12 zmiennych objaśniających, do których należą m.in.:

**nown** – liczba osób zarządzających sklepem,

**nfull** – liczba zatrudnionych pracowników pełnoetatowych,

**npart** – liczba zatrudnionych pracowników w niższym wymiarze niż 1/1,

**hoursw** – całkowita liczba godzin pracy,

**hourspw** – liczba godzin pracy przypadająca na jednego pracownika.

**invl** – inwestycje w nieruchomości,

**start** – liczba lat istnienia sklepu.

Zmienną zależną **tsales** jest roczny dochód sklepu w guldenach holenderskich.

#### 3.1. Zastosowanie metody POLYMARS

Za pomocą funkcji **polymars** z pakietu **pol spline** został zbudowany model regresyjny.

Tabela 1

Kolejne kroki procedury **polymars**

| Etap | 0/1 | Size | RSS      | GCV       |
|------|-----|------|----------|-----------|
| 1    | 2   | 3    | 4        | 5         |
| 1    | 1   | 1    | 1,36e+14 | 3,447e+11 |
| 2    | 1   | 2    | 6,75e+13 | 1,74e+11  |
| 3    | 1   | 3    | 5,58e+13 | 1,46e+11  |
| 4    | 1   | 4    | 3,55e+13 | 9,438e+10 |
| 5    | 1   | 5    | 2,48e+13 | 6,684e+10 |
| 6    | 1   | 6    | 2,15e+13 | 5,892e+10 |

cd. tabeli 1

| 1  | 2 | 3  | 4        | 5                |
|----|---|----|----------|------------------|
| 7  | 1 | 7  | 1,56e+13 | 4,334e+10        |
| 8  | 1 | 8  | 1,35e+13 | 3,824e+10        |
| 9  | 1 | 9  | 1,24e+13 | 3,565e+10        |
| 10 | 1 | 10 | 1,10e+13 | 3,204e+10        |
| 11 | 1 | 11 | 1,04e+13 | 3,101e+10        |
| 12 | 1 | 12 | 9,13e+12 | 2,756e+10        |
| 13 | 1 | 13 | 8,72e+12 | 2,677e+10        |
| 14 | 1 | 14 | 8,43e+12 | 2,631e+10        |
| 15 | 1 | 15 | 7,77e+12 | 2,465e+10        |
| 16 | 1 | 16 | 7,52e+12 | 2,427e+10        |
| 17 | 1 | 17 | 7,31e+12 | 2,402e+10        |
| 18 | 1 | 18 | 7,13e+12 | 2,382e+10        |
| 19 | 1 | 19 | 7,00e+12 | 2,381e+10        |
| 20 | 1 | 20 | 6,90e+12 | 2,387e+10        |
| 21 | 0 | 19 | 6,93e+12 | 2,356e+10        |
| 22 | 0 | 18 | 7,01e+12 | 2,343e+10        |
| 23 | 0 | 17 | 7,13e+12 | <b>2,342e+10</b> |
| 24 | 0 | 16 | 7,33e+12 | 2,367e+10        |
| 25 | 0 | 15 | 7,59e+12 | 2,408e+10        |
| 26 | 0 | 14 | 7,83e+12 | 2,444e+10        |
| 27 | 0 | 13 | 8,32e+12 | 2,554e+10        |
| 28 | 0 | 12 | 8,90e+12 | 2,687e+10        |
| 29 | 0 | 11 | 9,04e+12 | 2,686e+10        |
| 30 | 0 | 10 | 9,69e+12 | 2,833e+10        |
| 31 | 0 | 9  | 1,07e+13 | 3,066e+10        |
| 32 | 0 | 8  | 1,09e+13 | 3,081e+10        |
| 33 | 0 | 7  | 1,39e+13 | 3,857e+10        |
| 34 | 0 | 6  | 1,81e+13 | 4,962e+10        |
| 35 | 0 | 5  | 2,17e+13 | 5,868e+10        |
| 36 | 0 | 4  | 2,60e+13 | 6,898e+10        |
| 37 | 0 | 3  | 3,88e+13 | 1,015e+11        |
| 38 | 0 | 2  | 9,72e+13 | 2,503e+11        |
| 39 | 0 | 1  | 1,36e+14 | 3,447e+11        |

Tabela 2

Parametry modelu zbudowanego metodą POLYMARS dla zbioru danych Clothing

|    | pred1 | knot1   | pred2 | knot2 | coefs     |
|----|-------|---------|-------|-------|-----------|
| 1  | 0     | NA      | 0     | NA    | -4.48e+05 |
| 2  | 7     | NA      | 0     | NA    | -3.85e+03 |
| 3  | 1     | NA      | 0     | NA    | 1.50e+02  |
| 4  | 11    | NA      | 0     | NA    | 4.60e+03  |
| 5  | 11    | 340     | 0     | NA    | -4.17e+03 |
| 6  | 4     | NA      | 0     | NA    | -1.37e+05 |
| 7  | 1     | 5833.84 | 0     | NA    | -7.16e+01 |
| 8  | 11    | 136     | 0     | NA    | -3.18e+03 |
| 9  | 7     | 88      | 0     | NA    | 5.18e+03  |
| 10 | 4     | NA      | 11    | NA    | 1.18e+03  |
| 11 | 1     | NA      | 4     | NA    | -2.03e-01 |
| 12 | 7     | 270     | 0     | NA    | -2.39e+03 |
| 13 | 4     | 2       | 0     | NA    | -4.25e+05 |
| 14 | 1     | NA      | 4     | 2     | 4.26e+01  |
| 15 | 6     | NA      | 0     | NA    | 6.92e+04  |
| 16 | 11    | 450     | 0     | NA    | -2.37e+03 |
| 17 | 1     | 10223   | 0     | NA    | -3.26e+01 |

Wiersze tabeli 1 zawierają kolejne kroki procedury tworzącej model regresyjny. W drugiej kolumnie tej tabeli występują wartości 0 lub 1, które wskazują, z jakim etapem użytkownik ma do czynienia. Wartość 1 informuje, że w procedurze dopasowania do modelu została dodana nowa funkcja bazowa, natomiast 0 oznacza usunięcie funkcji bazowej z modelu. Kolumna RSS zawiera sumy kwadratów reszt liczone w kolejnych krokach procedury. W kolumnie GCV zostały przedstawione kolejne wartości uogólnionego kryterium sprawdzania krzyżowego. W omawianym przykładzie najmniejsza wartość GCV to  $2,342e+10$  dla modelu zawierającego 17 funkcji bazowych, więc model ten zostaje wybrany jako najlepszy.

Wiersze tabeli 2 odpowiadają kolejnym funkcjom bazowym modelu  $\hat{f}_{17}$ . Ponieważ w metodzie polymars iloczyny tensorowe mogą zawierać co najwyżej dwie funkcje sklejące, w każdym wierszu omawianej tabeli potencjalnie mogą występować dwie zmienne objaśniające: pred1 oraz pred2. W kolum-

nach knot1 oraz knot2 przedstawiono wartości węzłów, natomiast coefs określa wartości współczynników odpowiednich funkcji bazowych. Na podstawie tej tabeli można odczytać postać końcowego modelu.

Za pomocą funkcji sample zbiór Clothing został losowo podzielony na pięć części, które zostały wykorzystane do obliczenia współczynnika determinacji metodą sprawdzania krzyżowego:

$R^2 = 0,909.$

3.2. Zastosowanie metody PPR

Dla tego samego zbioru danych został również zbudowany model regresji nieparametrycznej za pomocą funkcji ppr z biblioteki stats. Po wywołaniu tej funkcji na całym zbiorze Clothing uzyskano: wektory kierunków rzutowania  $\alpha_k$  (tabela 3) oraz oszacowania współczynników  $\beta_k$  dla kolejnych funkcji grzbietowych:

$\beta_1 = 820900,1; \beta_2 = 543882,4; \beta_3 = 234501,1.$

Tabela 3

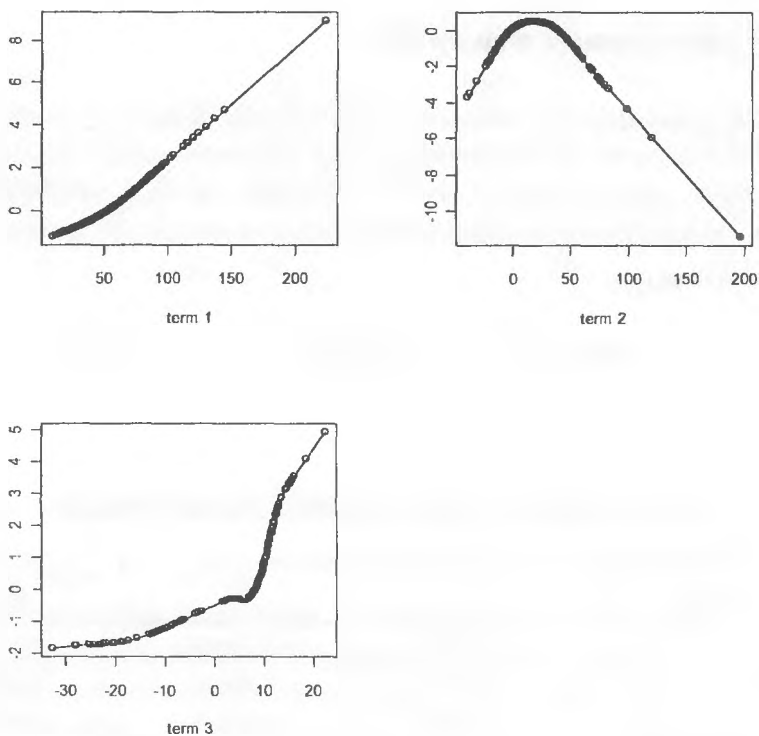
Wektory kierunków rzutowania dla modelu uzyskanego metodą PPR

| Zmienne | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ |
|---------|------------|------------|------------|
| sales   | 4,67e-03   | -2,31e-03  | 1,91e-04   |
| margin  | -5,95e-01  | 4,22e-01   | 7,28e-01   |
| nown    | -2,48e-01  | 3,65e-01   | 1,29e-01   |
| nfull   | 4,47e-01   | 2,29e-01   | -3,32e-02  |
| npart   | 3,77e-01   | 5,37e-01   | -1,33e-01  |
| naux    | -2,88e-02  | 5,10e-01   | -5,36e-02  |
| hoursw  | 4,12e-02   | -3,73e-02  | -1,62e-02  |
| hourspw | -2,36e-01  | 1,31e-01   | 8,82e-02   |
| inv1    | 4,17e-06   | -7,95e-06  | -3,70e-06  |
| inv2    | 8,40e-07   | 1,19e-05   | 3,72e-06   |
| ssize   | 1,63e-01   | 1,68e-01   | 2,91e-02   |
| start   | 3,98e-01   | -2,03e-01  | -6,50e-01  |

Analogicznie do poprzedniego przykładu, zbiór Clothing został losowo podzielony na pięć części, które zostały wykorzystane do obliczenia współczynnika determinacji metodą sprawdzania krzyżowego:

$$R^2 = 0,961.$$

Ponadto posługując się funkcją plot, przedstawiono na wykresach funkcje składowe dla modelu regresyjnego zbudowanego na całym zbiorze Clothing.



Rys. 1. Ilustracja zależności między każdą z trzech składowych, wyznaczonych w końcowym modelu metody rzutowania, a zmienną zależną

#### 4. Badanie odporności modeli regresyjnych na występowanie szumu w zbiorze uczącym

Hipoteza badawcza głosząca, iż przedstawione nieparametryczne metody regresji są odporne na występowanie w zbiorze uczącym szumu, została zwery-

fikowana za pomocą symulacji komputerowych na zbiorach danych: *Friedman 1*, *Friedman 2* i *Friedman 3*. Są to sztuczne zbiory danych, wygenerowane komputerowo za pomocą funkcji dostępnych w pakiecie *mlbench* programu statystycznego *R*, zgodnie z koncepcją Friedmana opisaną w artykule [2]. Zbiory te są standardowo wykorzystywane do porównywania własności różnych funkcji regresji. Tabela 4 przedstawia ich wybrane charakterystyki. Składnik losowy  $e$  jest szumem gaussowskim o rozkładzie  $N(0, sd)$ , gdzie  $sd$  jest parametrem zadawanym przez użytkownika.

Tabela 4

Charakterystyki sztucznych zbiorów danych wykorzystanych w analizie

| Zbiór danych      | Liczebność | Liczba zmiennych | Postać funkcji generującej zmienną zależną $y$                                  |
|-------------------|------------|------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Friedman 1</i> | 500        | 10*              | $f(\mathbf{x}) = 10 \sin(\pi x_1 x_2) + 20(x_3 - 0,5)^2 + 10x_4 + 5x_5 + e$     |
| <i>Friedman 2</i> | 500        | 4                | $f(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1^2 + \left(x_2 x_3 - \frac{1}{x_2 x_4}\right)^2} + e$ |
| <i>Friedman 3</i> | 500        | 4                | $f(\mathbf{x}) = \arctg \frac{x_2 x_3 - \frac{1}{x_2 x_4}}{x_1} + e$            |

Tak jak już wspomniano, w pierwszej grupie eksperymentów testowano odporność wybranych metod nieparametrycznych na występowanie w zbiorze uczącym szumu, czyli wartości zaburzonych wpływem zmiennych losowych. Procedurę badawczą można przedstawić w następujących krokach:

1. Zbiór danych składał się z części uczącej oraz testowej:

- a) część ucząca zawierała 500 elementów i został do niej dodany szum na poziomie od 5% do 40% zmienności mierzonej wariancją; poziom szumu był regulowany przez dobieranie odpowiednich wartości odchylenia standardowego  $sd$  składnika losowego w funkcji generującej dane,

- b) zbiór testowy, w każdym z przypadków, składał się z 200 elementów i nie był zaburzony szumem.
2. Na każdym zbiorze uczącym został zbudowany model regresyjny z wykorzystaniem wybranej nieparametrycznej metody regresji:
  - a) w metodzie rzutowania PPR przyjęto model złożony z pięciu funkcji składowych; modele uzyskano wykorzystując procedurę `ppr` z biblioteki `stats` zawartej w programie **R**,
  - b) przy budowie modeli regresyjnych metodą POLYMARS przyjęto wartości parametrów standardowo zaimplementowane w pakiecie statystycznym **R**; modele otrzymano za pomocą procedury `polymars` z biblioteki `polyspline`.
3. Dla każdego zbudowanego modelu regresyjnego obliczono na zbiorze testowym współczynnik determinacji:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}. \quad (7)$$

4. Dla porównania otrzymanych wyników, na tych samych zbiorach uczących zaburzonych szumem zbudowano również klasyczne modele regresji liniowej.

Wyniki analizy przedstawiono w tabelach 5-7.

Tabela 5

Wartości współczynnika determinacji dla modeli otrzymanych metodą POLYMARS na zbiorach testowych przy różnych poziomach szumu

| Zbiór danych      | Poziom szumu |       |       |       |       |
|-------------------|--------------|-------|-------|-------|-------|
|                   | 5%           | 10%   | 20%   | 30%   | 40%   |
| <i>Friedman 1</i> | 0.849        | 0.982 | 0.834 | 0.882 | 0.755 |
| <i>Friedman 2</i> | 0.999        | 0.999 | 0.997 | 0.996 | 0.998 |
| <i>Friedman 3</i> | 0.921        | 0.880 | 0.912 | 0.925 | 0.863 |

Tabela 6

Wartości współczynnika determinacji dla modeli otrzymanych metodą rzutowania PPR na zbiorach testowych przy różnych poziomach szumu

| Zbiór danych      | Poziom szumu |       |       |       |       |
|-------------------|--------------|-------|-------|-------|-------|
|                   | 5%           | 10%   | 20%   | 30%   | 40%   |
| <i>Friedman 1</i> | 0,979        | 0.839 | 0.744 | 0.519 | 0.560 |
| <i>Friedman 2</i> | 0.994        | 0.983 | 0.970 | 0.975 | 0.921 |
| <i>Friedman 3</i> | 0.950        | 0.711 | 0.833 | 0.814 | 0.849 |

Tabela 7

Wartości współczynnika determinacji dla modeli otrzymanych metodą liniową na zbiorach testowych przy różnych poziomach szumu

| Zbiór danych      | Poziom szumu |       |       |       |       |
|-------------------|--------------|-------|-------|-------|-------|
|                   | 5%           | 10%   | 20%   | 30%   | 40%   |
| <i>Friedman 1</i> | 0.739        | 0.739 | 0.753 | 0.758 | 0.740 |
| <i>Friedman 2</i> | 0.875        | 0.876 | 0.868 | 0.877 | 0.876 |
| <i>Friedman 3</i> | 0.562        | 0.568 | 0.572 | 0.562 | 0.561 |

Wyniki przeprowadzonych analiz pokazują, iż rozpatrywane modele nieparametryczne charakteryzują się wysokimi wartościami współczynników determinacji odliczonych na zbiorach testowych. Na podstawie wyników przedstawionych w tabelach 5 i 6 można zauważyć, że w większości przypadków zaburzenia zbiorów uczących, nawet szumem na poziomie 40%, pozwalają na otrzymanie modeli o niskich błędach predykcji.

## 5. Badanie odporności modeli regresyjnych na występowanie wartości oddalonych w zbiorze uczącym

W drugiej grupie eksperymentów testowano odporność omawianych metod nieparametrycznych na występowanie w zbiorze uczącym wartości oddalonych.

1. Zbiór danych składał się z części uczącej (500 elementów) oraz testowej (200 obserwacji):
  - a) z każdego ze zbiorów uczących zostało wylosowanych 2% obserwacji, które zamieniono na wygenerowane komputerowo wartości oddalone,
  - b) zgodnie z ustaleniami zawartymi w funkcjach pakietu statystycznego R przyjęto, iż z wartościami oddalonymi  $y_i$  mamy do czynienia, gdy:

$$y_i \notin \langle Q_1 - 3Q, Q_3 + 3Q \rangle,$$

gdzie  $Q_1$  to kwartył pierwszy,  $Q_3$  – kwartył trzeci, zaś  $Q$  – odchylenie ćwiartkowe.

2. Tak jak w poprzedniej analizie, na każdym zbiorze uczącym został zbudowany model regresyjny z wykorzystaniem wybranych nieparametrycznych metod regresji oraz klasycznej metody liniowej.
3. Dla każdego zbudowanego modelu regresyjnego obliczono na zbiorze testowym współczynnik determinacji  $R^2$ .

Wyniki analizy przedstawiono w tabeli 8.

Tabela 8

Wartości współczynnika determinacji obliczonego na zbiorach testowych w przypadku występowania wartości oddalonych dla różnych modeli regresji

| Zbiór danych      | Metoda   |       |         |
|-------------------|----------|-------|---------|
|                   | POLYMARS | PPR   | liniowa |
| <i>Friedman 1</i> | 0,823    | 0,729 | 0,704   |
| <i>Friedman 2</i> | 0,989    | 0,958 | 0,856   |
| <i>Friedman 3</i> | 0,932    | 0,876 | 0,555   |

Analizując wyniki przedstawione w tabeli 8, można zauważyć, że dla modeli nieparametrycznych, zbudowanych z wykorzystaniem zbiorów uczących, w których występują wartości oddalone, otrzymano relatywnie wysokie wartości współczynnika determinacji. Przy czym najwyższe wartości zaobserwowano dla modeli zbudowanych metodą POLYMARS.

## Podsumowanie

Wyniki przeprowadzonych analiz pokazują, iż modele zbudowane zarówno za pomocą metody rzutowania PPR, jak i metody POLYMARS charakteryzują się wysokimi wartościami współczynników determinacji odliczonych na zbiorach testowych. Na podstawie wyników przedstawionych w tabelach 5 i 6 można zauważyć, że nawet w przypadku zaburzenia obserwacji szumem na poziomie 40% otrzymujemy modele o wysokich wartościach współczynnika determinacji. Wydaje się również, że z zaburzeniem zbioru uczącego szumem lepiej radzi sobie metoda POLYMARS. Klasyczna metoda liniowa daje modele charakteryzujące się najniższymi wartościami  $R^2$ .

Do analogicznych wniosków można dojść analizując wyniki w przypadku modeli zbudowanych z wykorzystaniem zbiorów uczących, w których występują wartości oddalone. Tutaj również najwyższe wartości współczynnika determinacji otrzymano dla modeli zbudowanych metodą POLYMARS. Wysokie są również wartości  $R^2$  dla modeli regresyjnych opartych na metodzie rzutowania PPR, natomiast najgorsze wyniki otrzymano dla klasycznej metody liniowej.

Wyniki przeprowadzonej analizy pokazują, iż modele zbudowane za pomocą metod: rzutowania PPR i POLYMARS, są odporne na zaburzenia zbioru danych szumem gaussowskim oraz wartościami oddalonymi.

## Literatura

1. Friedman J., Stuetzle W.: *Projection Pursuit Regression*. „Journal of the American Statistical Association” 1981, No. 76, s. 817-823.
2. Friedman J.H.: *Multivariate Adaptive Regression Splines*. „Annals of Statistics” 1991, No. 19, s. 1-141.
3. Kooperberg C., Bose S., Stone C.J.: *Polychotomous Regression*. „Journal of the American Statistical Association” 1997, No. 92, s. 117-127.
4. Meyer D., Leisch F., Hornik K.: *Benchmarking Support Vector Machines*. Report No. 78, Vienna University of Economics and Business Administration, 2002, <http://www.wu.wien.ac.at/am/Download/report78.pdf>
5. Trzęsiok J.: *Wybrane nieparametryczne metody regresji i ich zastosowania*. „Taksonomia 11. Klasyfikacja i analiza danych – teoria i zastosowania”. Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, nr 1022, s. 107-115.
6. Trzęsiok J.: *Metoda rzutowania w budowie modelu regresyjnego*. W: *Postępy ekonometrii*. Red. A.S. Barczak. AE, Katowice 2004, s. 121-130.

## **ROBUSTNESS OF SOME NONPARAMETRIC REGRESSION MODELS**

### **Summary**

The main goal of the paper was to show that some nonparametric regression models such as POLYMARS and PPR were resistant to noise and outliers. The analysis was performed on benchmark data sets. The results confirmed the hypothesis of robustness of POLYMARS and PPR.

Michał Trzęsiok

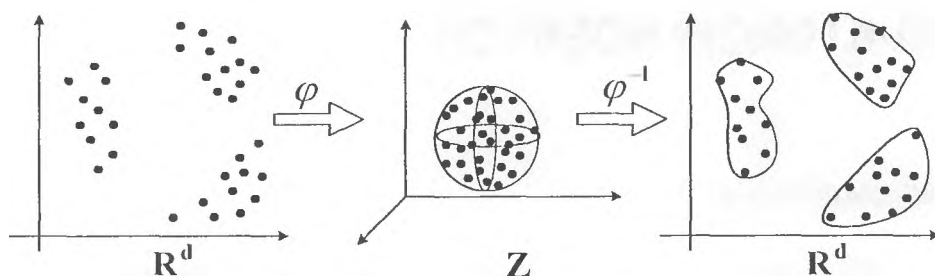
# ANALIZA WYBRANYCH FORMALNYCH WŁASNOŚCI TAKSONOMICZNEJ METODY WEKTORÓW NOŚNYCH

## Wprowadzenie

Metoda wektorów nośnych (ang. SVM – Support Vector Machines) to metoda wielowymiarowej analizy statystycznej, która pierwotnie została zaproponowana przez Vapnika [6] jako metoda dyskryminacyjna, tj. do zadań klasyfikacji w przypadku, gdy dany jest pewien zbiór obserwacji pogrupowanych – tzw. zbiór uczący. Może ona zostać przeformułowana tak, aby realizowała także zadania regresji oraz identyfikowała obserwacje oddalone. W 2001 roku Ben-Hur, Horn, Siegelman i Vapnik przedstawili kolejny sposób przeformułowania problemu, tak by metodę SVM można było zastosować do zadań klasyfikacji bezwzorcowej, czyli taksonomii.

Identyfikowanie obserwacji oddalonych metodą wektorów nośnych opiera się na koncepcji wyznaczania uogólnionego wielowymiarowego kwantyla rozkładu generującego dane z analizowanego zbioru. Przez uogólniony kwantyl rozkładu będziemy rozumieć taki obszar  $C \subset \mathbb{R}^d$  wielowymiarowej przestrzeni danych, który spełnia warunek, że niemal wszystkie obserwacje wygenerowane z rozkładu należą do  $C$ , z drugiej strony niemal wszystkie obiekty nie pochodzące z rozkładu generującego dane należą do dopełnienia zbioru  $C$ . Wykorzystując funkcje jądrowe – standardową technikę stosowaną w metodzie wektorów nośnych – przenosimy poszukiwanie rozwiązania problemu w przestrzeń o wiele większym wymiarze i w tej nowej przestrzeni cech wyznaczamy optymalną hiperkulę (o najmniejszym możliwym promieniu) zawierającą obrazy obserwacji ze zbioru poddanego analizie (tzw. kulę Czebyszewa). Tej hiperkuli odpowiada (jako przeciwobraz) pewien zbiór w pierwotnej przestrzeni danych – jest nim

poszukiwany uogólniony kwantyl. Brzeg tego uogólnionego kwantyla jest przeciwobrazem wyznaczonej hipersfery. Przyjmując dostatecznie dużą wartość parametru funkcji jądrowej Gaussa, można spowodować, że przeciwobraz wyznaczonej hiperkuli nie jest zbiorem spójnym, lecz składa się z kilku komponentów. Ta obserwacja podsuwa w sposób naturalny koncepcję taksonomicznej metody wektorów nośnych. Wystarczy bowiem zinterpretować otrzymane przy wyznaczaniu uogólnionego kwantyla spójne jego komponenty jako skupienia [1]. Ilustrację idei taksonomicznej metody wektorów nośnych przedstawia rysunek 1.



Rys. 1. Ilustracja idei taksonomicznej metody wektorów nośnych: dane są przekształcane za pomocą nieliniowej transformacji w przestrzeń o większym wymiarze, gdzie jest wyznaczana optymalna hipersfera zawierająca ich obrazy. Hipersfera poprzez transformację odwrotną wyznacza w przestrzeni danych rozłączne kontury, które mogą być interpretowane jako brzegi skupień

Skonstruowana w ten sposób metoda taksonomiczna pozwala na poszukiwanie skupień w analizowanym zbiorze danych bez nakładania a priori założeń dotyczących liczby skupień (jak np. w metodzie k-średnich) oraz ich kształtu.

Przy wyznaczaniu uogólnionego kwantyla rozkładu wszystkie obserwacje traktuje się tak, jakby reprezentowały tylko jedną klasę (klasę obiektów pochodzących z jednego wielowymiarowego rozkładu). Oznacza to, że metoda wektorów nośnych wykorzystana do wyznaczenia uogólnionego kwantyla rozkładu daje opis konturów ograniczających zidentyfikowane skupienia, lecz nie rozróżnia poszczególnych skupień między sobą. Jedyny element wymagający uzupełnienia, aby metodę SVM można było zastosować jako metodę taksonomiczną, to wskazanie, w jaki sposób algorytm może rozpoznawać, w którym skupieniu znajduje się dany obiekt. Ten ostatni krok taksonomicznej metody wektorów nośnych jest realizowany na podstawie obserwacji, że gdy dane są dwa punkty należące do dwóch różnych skupień, to odcinek łączący te punkty zawiera też punkty „pośrednie” nie należące do uogólnionego kwantyla.

Taksonomiczna metoda wektorów nośnych jest bardzo elastyczną metodą w tym sensie, że w wyniku jej działania można otrzymać skupienia o bardzo nieregularnych kształtach bez przyjmowania ograniczających założeń dotyczących zarówno liczby klas, jak i ich kształtu.

## 1. Taksonomiczna metoda wektorów nośnych

Szczegółowy opis algorytmu taksonomicznej metody wektorów nośnych można znaleźć w [1]. Pierwszy etap metody SVC jest bardzo podobny do dyskryminacyjnej metody SVM, która jest opisana w polskiej literaturze m.in. w [5]. Z tego powodu w tym punkcie opracowania zostały przedstawione jedynie: główna idea metody oraz najważniejsze elementy formalnego, analitycznego zapisu zadania optymalizacyjnego, którego rozwiązanie jest najważniejszą częścią algorytmu metody wektorów nośnych. Bardziej szczegółowo omówiono drugi etap metody SVC związany z identyfikowaniem przynależności obiektów do skupień.

Niech dany będzie zbiór uczący  $D = \{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^N\}$ , gdzie  $\mathbf{x}^i \in \mathbf{R}^d$ , dla  $i = 1, \dots, N$ . Taksonomiczna metoda wektorów nośnych, podobnie jak jej dyskryminacyjny odpowiednik, w pierwszym kroku transformuje dane z przestrzeni pierwotnej w przestrzeń o znacznie większym wymiarze za pomocą nieliniowego przekształcenia  $\varphi: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{Z}$ . W nowej przestrzeni cech jest wyznaczana hiperkula o najmniejszym możliwym promieniu, zawierająca obrazy wszystkich obserwacji ze zbioru  $D$  (kula Czebyszewa). Zadanie wyznaczenia takiej kuli oznacza poszukiwanie jej środka oznaczonego przez  $\mathbf{a}$  (centrum Czebyszewa) oraz promienia  $R$  (promienia Czebyszewa), co można zapisać [4] w sposób analityczny jako zadanie optymalizacyjne w postaci:

$$\min_{R \in \mathbf{R}, \mathbf{a} \in \mathbf{Z}, \xi_i \geq 0} R^2 + \frac{1}{\nu N} \sum_{i=1}^N \xi_i, \quad (1)$$

z warunkami ograniczającymi:

$$\bigwedge_{i \in \{1, \dots, N\}} \|\varphi(\mathbf{x}^i) - \mathbf{a}\|^2 \leq R^2 + \xi_i, \quad \xi_i \geq 0, \quad (2)$$

gdzie  $\nu \in [0, 1]$  jest parametrem mechanizmu regularyzacji, za pomocą którego użytkownik określa górną granicę frakcji obiektów ze zbioru  $D$ , które mogą zo-

stać sklasyfikowane jako obserwacje nietypowe (ich obraz w przestrzeni cech może się znajdować poza wyznaczaną hiperkulą – dla tych obserwacji zachodzi  $\xi_i > 0$ ).

Rozwiązanie powyższego zadania optymalizacyjnego można wyznaczyć metodą mnożników Lagrange’a. Po przekształceniu funkcji Lagrange’a do postaci dualnej zadanie (1)-(2) można zapisać następująco:

$$\min_a \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \alpha_j K(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^j) - \sum_{i=1}^N \alpha_i K(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^i), \quad (3)$$

$$\text{dla } 0 \leq \alpha_i \leq \frac{1}{vN}, \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1,$$

gdzie przez  $\alpha_i$  oznaczono współczynniki Lagrange’a, zaś przez  $K(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}) \cdot \varphi(\mathbf{v})$  – funkcję jądrową definiującą iloczyn skalarny w nowej przestrzeni cech. Rozwiązanie zadania optymalizacyjnego (3) można przedstawić w postaci:

$$a = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi(\mathbf{x}^i), \quad (4)$$

$$R^2 = K(\mathbf{x}^s, \mathbf{x}^s) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \alpha_j K(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^j) - 2 \sum_{i=1}^N \alpha_i K(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^s),$$

gdzie  $\mathbf{x}^s$  jest dowolnym wektorem nośnym, czyli obserwacją, której w rozwiązaniu zadania (3) odpowiada niezerowy mnożnik Lagrange’a ( $\alpha_s > 0$ ). Wykorzystanie funkcji jądrowych jest charakterystyczną cechą metody wektorów nośnych. Pozwala ono na przeszukiwanie bardzo bogatej przestrzeni funkcji klasyfikujących, bez konieczności definiowania wprost nieliniowej transformacji  $\varphi$ .

Wyznaczony środek i promień kuli pozwalają na zdefiniowanie funkcji  $f$ , która zwraca wartość 1 dla obserwacji, których obraz w nowej przestrzeni cech znajduje się wewnątrz wyznaczonej hiperkuli, i wartość  $-1$  w przeciwnym wypadku. Funkcję  $f$  można zapisać w następującej postaci:

$$f(\mathbf{x}) = \text{sgn} \left( R^2 - \left( K(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \alpha_j K(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^j) - 2 \sum_{i=1}^N \alpha_i K(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}) \right) \right). \quad (5)$$

Zbiór punktów hipersfery, po przetransformowaniu z powrotem do przestrzeni pierwotnej, tworzy rozłączne kontury – obwódnie danych (zob. rysunek 1). Te kontury mogą być zinterpretowane jako brzegi skupień. Punktom hiperkuli z przestrzeni  $\mathbb{Z}$  odpowiadają jedynie punkty ograniczone konturami w przestrzeni pierwotnej.

Przedstawiony pierwszy etap metody wektorów nośnych daje opis konturów ograniczających zidentyfikowane skupienia w przestrzeni pierwotnej, lecz nie rozróżnia poszczególnych skupień między sobą. W etapie drugim zostanie wskazane, w jaki sposób algorytm może rozpoznawać, w którym skupieniu znajduje się dany obiekt.

Ustalana przez badacza wartość parametru  $\nu$  pozwala na efektywne stosowanie metody w przypadku, gdy skupienia nie są rozłączne, oraz w przypadku występowania w zbiorze obserwacji oddalonych, zaś parametr  $\gamma$  funkcji jądrowej Gaussa metody SVM jest silnie dodatnio skorelowany z liczbą uzyskanych skupień i w głównej mierze decyduje o ich kształcie.

Jak zostało już wspomniane powyżej, metoda wektorów nośnych wykorzystana do wyznaczenia uogólnionego kwantyla rozkładu daje opis konturów ograniczających zidentyfikowane skupienia, lecz nie rozróżnia poszczególnych skupień między sobą. Jedyny element wymagający uzupełnienia, aby przedstawioną powyżej metodę można było zastosować do analizy skupień, to wskazanie, w jaki sposób algorytm może rozpoznawać, w którym skupieniu znajduje się dany obiekt. W tym celu zauważmy, że gdy dane są dwa punkty należące do dwóch różnych skupień, to odcinek łączący te punkty zawiera też punkty „pośrednie” nienależące do uogólnionego kwantyla, czyli punkty, których obraz w przestrzeni  $\mathbb{Z}$  leży po „ujemnej” stronie hiperpłaszczyzny oddzielającej obrazy punktów ze zbioru uczącego od początku układu współrzędnych.

Oznaczmy przez  $\mathbf{x}'\mathbf{x}^k$  odcinek łączący punkty  $\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^k$ . Zdefiniujmy macierz połączeń  $A = [a_{ik}]_{N \times N}$ , która będzie zawierać informacje, czy dana para punktów  $\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^k$  należy do tego samego skupienia:

$$a_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } \bigvee_{\mathbf{x} \in \mathbf{x}'\mathbf{x}^k} f(\mathbf{x}) = -1, \\ 1, & \text{gdy } \bigwedge_{\mathbf{x} \in \mathbf{x}'\mathbf{x}^k} f(\mathbf{x}) = 1. \end{cases} \quad (6)$$

Należy tu jednak zaznaczyć, że wartość 1 w macierzy oznacza, że na pewno odpowiednie dwa punkty należą do tego samego skupienia, ale ze względu na

możliwość wyznaczenia skupień niewypukłych wartość 0 niekoniecznie oznacza, że punkty należą do różnych skupień. Dlatego macierz  $A$  należy najpierw zmodyfikować tak, aby ilustrowała relację równoważności, tj. relację zwrotną, symetryczną i przechodnią. Dopiero po takim uzupełnieniu można z niej odczytać strukturę skupień. Innymi słowy, skupienia są wyznaczone przez połączone fragmenty grafu generowanego przez macierz  $A$ .

Klasyfikowane punkty odcinka w algorytmie metody są próbkowane. W przedstawionym w następnym rozdziale przykładzie numerycznym sprawdzano każdorazowo 8 punktów rozmieszczonych na odcinku równomiernie.

Do rozstrzygnięcia pozostaje jeszcze kwestia przynależności do skupień tych obiektów, które podczas budowy modelu SVC, w związku z ustaloną wartością parametru  $\nu$ , zostały sklasyfikowane jako obserwacje oddalone (niepochodzące z rozkładu  $P$ ). Obserwacje te, jako że nie należą do obszaru uogólnionego kwantyla, nie zostaną przydzielone do żadnego skupienia. W niniejszym opracowaniu zastosowano jedną z możliwości uniknięcia wystąpienia wielu jednoelementowych skupień – o przynależności takiego obiektu do skupienia decydowała odległość od wszystkich innych skupień. Obserwacje nietypowe zostały sklasyfikowane jako element najbliższego skupienia.

Część empiryczną badania przeprowadzono z wykorzystaniem funkcji z biblioteki `e1071` programu statystycznego R, jak również stosując autorskie funkcje napisane w języku programu R.

## 2. Analiza formalnych własności taksonomicznej metody wektorów nośnych

### 2.1. Definicje własności formalnych metod taksonomicznych

Jest wiele metod taksonomicznych, nazywanych inaczej metodami klasyfikacji bezwzorcowej. Wydaje się jednak, że niemożliwe jest wskazanie metody, która rozpoznawałaby poprawnie strukturę klas niezależnie od rozważanego problemu (analizowanego zbioru). Nawet sam problem wskazania kryteriów oceny wyników grupowania metodami taksonomicznymi nie ma jednoznacznego rozwiązania i nie może mieć, gdyż z założenia celem metod klasyfikacji bezwzorcowej jest odkrycie nieznaney liczby i struktury skupień. Właśnie dlatego, że w przypadku metod taksonomii nie ma możliwości zweryfikowania jako-

ści modelu na podstawie błędu klasyfikacji, ważna przy wyborze odpowiedniej metody analizy jest znajomość formalnych własności metod. Wśród tych własności należy wymienić: niewrażliwość na permutacje, wypukłość otrzymywanych skupień, poprawność struktury według klas, powtarzanie punktów czy opuszczanie klas. Te formalne własności metod taksonomicznych są nazywane w literaturze warunkami dopuszczalności [2]. Przytoczymy za Fisherem i Van Nessem definicje wymienionych pojęć:

Definicja 1. Powiemy, że metoda ma własność niewrażliwości na permutacje, kiedy wyniki jej zastosowania nie zmieniają się, jeśli zastosujemy ją ponownie na zbiorze danych różniącym się jedynie kolejnością obserwacji.

Definicja 2. Powiemy, że metoda ma własność wypukłości, kiedy w wyniku jej zastosowania otrzymujemy skupienia, których otoczki wypukłe są parami rozłączne.

Definicja 3. Powiemy, że metoda ma własność poprawnej struktury według klas, kiedy w wyniku jej zastosowania otrzymujemy skupienia, dla których wszystkie odległości wewnątrzklasowe są mniejsze od wszystkich odległości zewnątrzklasowych.

Definicja 4. Powiemy, że metoda taksonomiczna, która ma swój odpowiednik w zbiorze metod dyskryminacji, ma własność powtarzania punktów, jeśli dla dowolnej obserwacji  $x$  ze zbioru danych  $D$  zachodzi warunek, że przynależność obiektu  $x$  do klasy otrzymana w wyniku zastosowania metody taksonomicznej jest taka sama, jak wskazanie przynależności do klasy dla tego punktu po zastosowaniu odpowiadającej metody dyskryminacyjnej na zbiorze uczącym  $D \setminus \{x\}$ , gdzie zmienna opisująca klasy obiektów została wyznaczona na podstawie wyników zastosowania metody taksonomicznej (innymi słowy – metoda dyskryminacji daje wskazanie przynależności do klasy zgodne, czyli powtarzające klasyfikację obiektu w metodzie taksonomicznej).

Definicja 5. Powiemy, że metoda taksonomiczna ma własność opuszczania klas, jeśli wyniki zastosowania metody taksonomicznej na całym zbiorze oraz na zbiorze, z którego usunięto jedno, dowolne, zidentyfikowane skupienie, są niemal takie same – różnią się jedynie liczbą skupień (o jeden), zaś kształty skupień pozostają takie same.

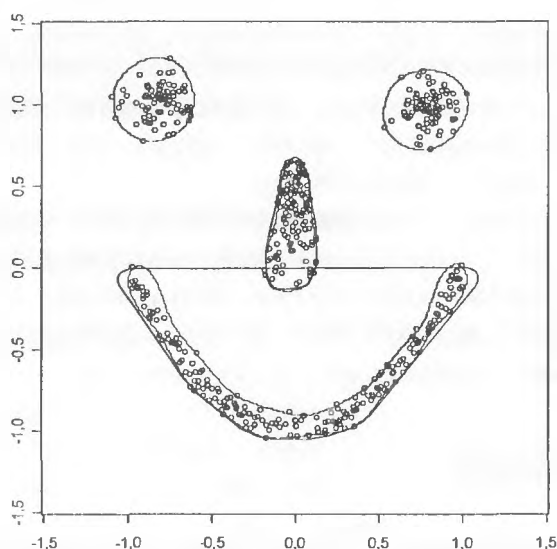
## 2.2. Wyniki analizy

Badania przeprowadzono na zbiorach danych sztucznych, *Smiley*, *Circle*, *Twonorm*, *Spirals*. Wygenerowanych za pomocą funkcji z biblioteki *mlbench* programu statystycznego R. Zbiory te zostały zaprojektowane do sprawdzania

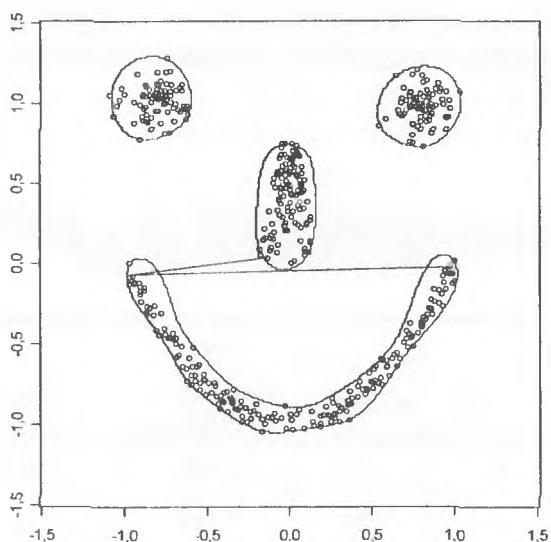
własności metod wielowymiarowej analizy statystycznej. Symulacje przeprowadzone na wymienionych zbiorach wskazują, że taksonomiczna metoda wektorów nośnych ma podstawową własność niewrażliwości na permutacje. Końcowy model otrzymany w wyniku zastosowania metody wektorów nośnych jest w pełni opisany za pomocą wybranej funkcji jądrowej oraz zidentyfikowanych wektorów nośnych. W przeprowadzanych analizach zawsze stosowano funkcję jądrową Gaussa, więc wystarczyło sprawdzać, czy zbiór wektorów nośnych zmienia się po permutowaniu obserwacji w zbiorze danych. Takich zmian nie odnotowano.

Nie znaleziono również kontrprzykładu na własność powtarzania punktów. Dyskryminacyjna metoda SVM zawsze „umieszczała” wyeliminowaną obserwację  $x$  z powrotem w tym samym skupieniu (klasie), z którego  $x$  zostało wzięte po zastosowaniu metody SVC.

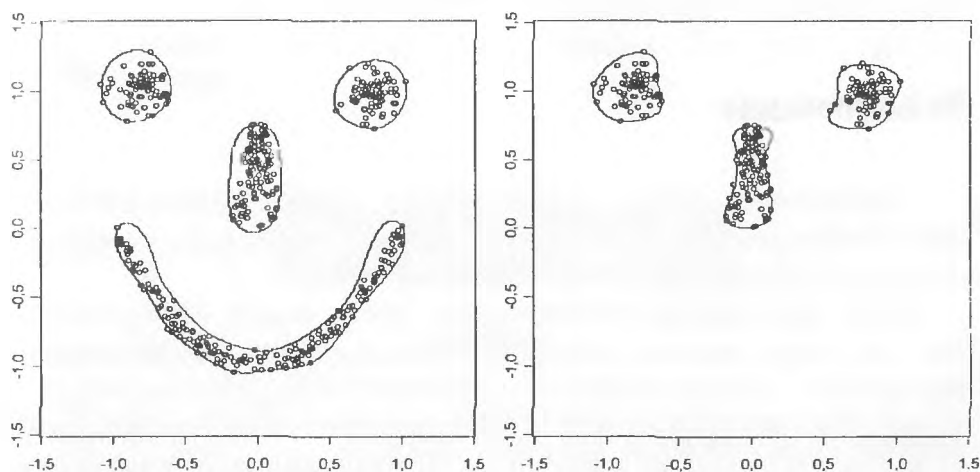
Taksonomiczna metoda wektorów nośnych nie spełnia trzech pozostałych własności formalnych. Ponieważ definicje tych własności sformułowano za pomocą kwantyfikatora ogólnego, wystarczy wskazać kontrprzykład, by wykazać prawdziwość poprzedniego zdania. W tym celu posłużono się zbiorem *Smiley*, który może być wykorzystany jako kontrprzykład wszystkich trzech własności formalnych. Rysunek 2 przedstawia ilustrację uzasadniającą, że metoda SVC nie spełnia warunku wypukłości, rysunek 3 ilustruje kontrprzykład na poprawność struktury według klas metody SVC, zaś rysunek 4 – kontrprzykład na własności opuszczania klas.



Rys. 2. Kontrprzykład na własność wypukłości metody SVC – przedstawione na rysunku otoczki wypukłe dwóch skupień nie są rozłączne



Rys. 3. Kontrprzykład na własność poprawnej struktury według klas w metodzie SVC – na rysunku dłuższy odcinek reprezentuje jedną z odległości wewnątrzklasowych, a krótszy – jedną z odległości zewnątrzklasowych



Rys. 4. Kontrprzykład na własność opuszczania klas – na prawym rysunku wyraźnie widać zmiany w kształtach skupień po usunięciu jednej z czterech zidentyfikowanych klas

Wyniki analizy formalnych własności taksonomicznej metody wektorów nośnych oraz wybranych innych metod taksonomicznych zostały zebrane i zestawione w tabeli 1.

Tabela 1

Formalne własności taksonomicznej metody wektorów nośnych (SVC)  
oraz wybranych innych metod taksonomii

| Metoda taksonomiczna    | Własność                    |           |                                  |                     |                  |
|-------------------------|-----------------------------|-----------|----------------------------------|---------------------|------------------|
|                         | niewrażliwość na permutacje | wypukłość | poprawność struktury według klas | powtarzanie punktów | opuszczanie klas |
| SVC                     | TAK                         | NIE       | NIE                              | TAK                 | NIE              |
| Pojedynczego połączenia | TAK                         | NIE       | TAK                              | TAK                 | TAK              |
| Kompletnego połączenia  | TAK                         | NIE       | TAK                              | NIE                 | TAK              |
| Średniej klasowej       | TAK                         | NIE       | TAK                              | NIE                 | TAK              |
| Warda                   | TAK                         | TAK       | TAK                              | NIE                 | TAK              |

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [3; 7] oraz obliczeń własnych dla SVC.

## Podsumowanie

Taksonomiczna metoda wektorów nośnych pozwala na wyznaczenie skupień o bardzo różnorodnych, nieliniowych kształtach, jednocześnie nie wymagając przyjmowania żadnych założeń dotyczących liczby klas.

Stojąc przed zadaniem przeprowadzenia analizy skupień, badacz musi dobrać odpowiednie narzędzie (metodę taksonomiczną) do rozwiązania postawionego problemu. Wobec wielości metod taksonomii i braku jednoznacznych kryteriów wyboru metody warto przy wyborze kierować się wiedzą o własnościach formalnych poszczególnych metod. W ten sposób w zależności od indywidualnych preferencji i oczekiwań badacza można dobrać metodę, która rozpoznaje skupienia wypukłe bądź nie, mające własność opuszczania klas bądź nie itd. W zależności przecież od problemu dana własność otrzymanych wyników klasyfikacji może być pożądana lub niechciana.

Taksonomiczna metoda wektorów nośnych nie spełnia trzech spośród rozważanych pięciu własności formalnych. Można by powiedzieć, że są to własności geometryczne wyznaczanych skupień, a brak ich spełnienia dodatkowo wzmacnia wnioski o tym, że metoda SVC jest bardzo elastyczna i umożliwia wyznaczanie skupień o bardzo różnorodnych nieliniowych kształtach. Wynika stąd, że wykorzystując metodę wektorów nośnych, możemy skutecznie rozpoznać liczbę i strukturę klas, nawet jeśli nie są one liniowo separowane.

## Literatura

1. Ben-Hur A., Horn D., Siegelman H.T., Vapnik V.: *Support Vector Clustering*. „Journal of Machine Learning Research” 2001, 2, s. 125-137.
2. Fisher L., Ness J.W. van: *Admissible Clustering Procedures*. „Biometrika” 1971, 58, s. 91-104.
3. Fisher L., Ness J.W. van: *Admissible Clustering Procedures*. „Biometrika” 1973, 60, s. 422-424.
4. Smola A., Schölkopf B.: *Learning with Kernels. Support Vector Machines. Regularization, Optimization, and Beyond*. MIT Press, Cambridge 2002.
5. Trzęsiok M.: *Analiza wybranych własności metody dyskryminacji wykorzystującej wektory nośne*. W: *Postępy ekonometrii*. Red. A.S. Barczak. AE, Katowice 2004.
6. Vapnik V.: *Statistical Learning Theory*. John Wiley & Sons, New York 1998.
7. Walesiak M.: *Metody klasyfikacji*. W: *Metody statystycznej analizy wielowymiarowej w badaniach marketingowych*. Red. E. Gatnar, M. Walesiak. AE, Wrocław 2004, s. 316-350.

## ON SOME SELECTED PROPERTIES OF SUPPORT VECTOR CLUSTERING

### Summary

There are many different methods of unsupervised learning. It is impossible to predict which method is the „best” in general. Given a specific problem the user can decide which method to apply considering some properties of clustering methods. These properties are known as admissibility conditions. The reasonably new Support Vector Clustering method is analysed in terms of the satisfying admissibility conditions. The results are compared within a group of different clustering methods.

**Katarzyna Zeug-Żebro**

# **METODY ODRÓŻNIANIA DETERMINISTYCZNYCH SZEREGÓW CZASOWYCH OD LOSOWYCH**

## **Wprowadzenie**

Wiele badań dotyczących analizy deterministycznych systemów dynamicznych pokazało, że trajektorie niektórych tych systemów wyglądają jak losowe szeregi czasowe. Ponieważ okazało się również, że nie tylko trajektorie deterministycznych systemów są podobne do trajektorii losowych szeregów czasowych, podjęto badania dotyczące sprawdzenia, czy system jest losowy czy deterministyczny.

Zasadniczym celem opracowania było omówienie kilku metod odróżniania szeregów generowanych przez deterministyczne, chaotyczne systemy dynamiczne od szeregów losowych, tj. wymiar korelacyjny, test mieszania, twierdzenie o resztach. Metody te posłużyły do analizy finansowych szeregów czasowych złożonych z cen akcji. Pod uwagę wzięto 15 spółek, których akcje są notowane na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie co najmniej od 17.05.1995 roku. Obliczenia przeprowadzono z użyciem programów napisanych przez autorkę w języku programowania Visual Basic oraz pakietu Microsoft Excel.

## **1. Metody odróżniania deterministycznych szeregów czasowych od losowych**

### **1.1. Wymiar korelacyjny**

Wymiar korelacyjny po raz pierwszy wprowadzony przez Grassbergera i Procaccia [3; 4] dostarcza wstępnych informacji na temat złożoności systemu

dynamicznego, tzn. wskazuje minimalną liczbę zmiennych opisujących system dynamiczny. Można go obliczyć w przypadku, gdy nie wiemy, jaki jest wymiar przestrzeni stanów i gdy znany jest tylko jednowymiarowy szereg informacji.

**Definicja.** Wymiar korelacyjny atraktora  $A$  systemu dynamicznego jest zdefiniowany jako granica:

$$D_c = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln C(d, r)}{\ln r},$$

gdzie  $C(d, r)$  jest całką korelacyjną określoną jako prawdopodobieństwo znalezienia pary wektorów, których odległość od siebie w zrekonstruowanej  $d$ -wymiarowej przestrzeni nie jest większa od  $r$ :

$$C(d, r) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=1}^n \sum_{i=j+1}^n I(r - r_{ij}), \quad r > 0,$$

$I(x)$  jest funkcją wskaźnikową (funkcja Heaviside'a) w postaci:

$$I(a) = \begin{cases} 0 & \text{dla } a < 0 \\ 1 & \text{dla } a \geq 0 \end{cases},$$

$n = N - d + 1$  jest liczbą wektorów w  $d$ -wymiarowej przestrzeni, a  $N$  jest liczbą danych:

$$r_{ij} = \sqrt{\sum_{k=0}^{m-1} (x_{i-k} - x_{j-k})^2}.$$

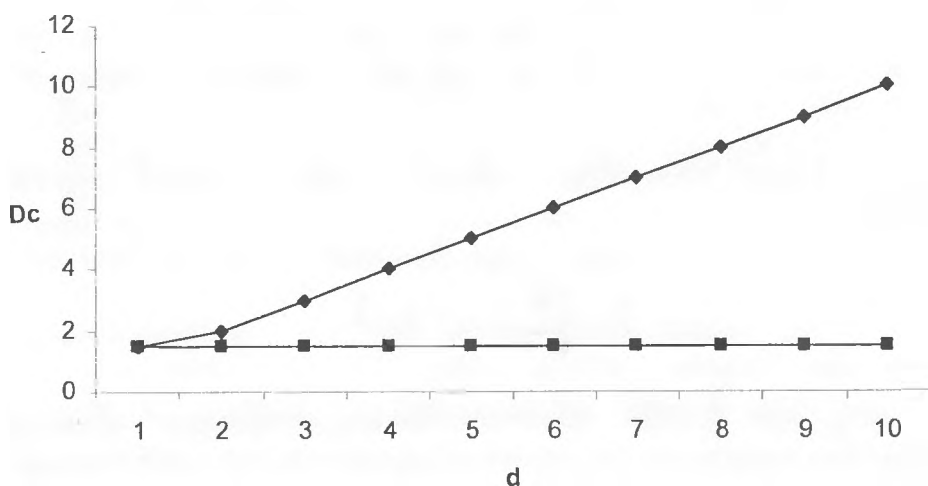
Istnieje wiele sposobów wyznaczania wymiaru korelacyjnego. Najczęściej stosuje się regresję liniową do przybliżania linią prostą wykresu zależności logarytmu sumy korelacyjnej  $\ln C(d, r)$  od logarytmu wielkości otoczenia  $\ln r$ . Daje to równanie w postaci:

$$\ln C(d, r) = D_c \ln r + b.$$

Powyższe równanie pozwala na oszacowanie wartości wymiaru korelacyjnego  $D_c$  jako współczynnika nachylenia prostej aproksymującej tę zależność.

Po raz pierwszy powyższa miara została zastosowana w celu odróżnienia systemów deterministycznych od losowych w 1986 roku przez W.A. Brocka [1]. Algorytm metody można przedstawić następująco:

1. W pierwszym kroku dla jednowymiarowego szeregu obserwacji  $\{x_i\}$  oblicza się całkę korelacyjną  $C_N(d, r)$ .
2. Następnie wyznacza się wielkość  $C(d, r)$  jako granicę całki  $C_N(d, r)$  przy  $N \rightarrow \infty$ .
3. Ostatecznie oblicza się wymiar korelacyjny  $D_c$ , który jest równy granicy ilorazu  $\frac{\ln C_N(d, r)}{\ln r}$  przy  $r \rightarrow \infty$ , dla różnych wartości wymiaru zanurzenia  $d$ .
4. W przypadku gdy system jest deterministyczny, wymiar korelacyjny  $D_c$  jest niezależny od wymiaru zanurzenia. Natomiast gdy system jest stochastyczny, występuje równość pomiędzy tymi wymiarami (rysunek 1).



Rys. 1. Zależność wymiaru korelacyjnego  $D_c$  od wymiaru zanurzenia  $d$  dla szeregu deterministycznego oraz stochastycznego

Miara ta jednak nie jest niezawodna i do najbardziej istotnych wad można zaliczyć następujące:

1. Dla niskiej liczby obserwacji  $N$  nie występuje zbieżność wymiaru korelacyjnego do rzeczywistego wymiaru atraktora. Warunek ten jest zagwarantowany tylko wtedy, gdy  $N \rightarrow \infty$ .
2. W przypadku występowania szumu prawie zawsze zachodzi równość  $D_c = d$ , zatem szacowanie wymiaru korelacyjnego jest bezsensowne.
3. Wyznaczanie wymiaru korelacyjnego na podstawie jednowymiarowego szeregu czasowego nie wskazuje nam, w jaki sposób należy odtworzyć dynamikę pierwotnego systemu (odrzuca się informacje o uporządkowaniu czasowym obserwacji).

Ponieważ tak wiele wątpliwości dostarcza procedura odróżnienia szeregów deterministycznych od losowych oparta na wyznaczaniu wymiaru zanurzenia, więc Brock udowodnił twierdzenie o resztach (Brock's residual theorem), które pozwala odrzucić tezę o deterministycznym czy losowym charakterze badanego systemu.

## 1.2. Twierdzenie o resztach

Kolejną metodę odróżniania deterministycznych szeregów czasowych od losowych zaproponował w 1986 roku W. Brock [1], udowadniając twierdzenie o resztach:

**Twierdzenie o resztach** [1]. Jeżeli do szeregu obserwacji  $\{x_t\}$  dopasujemy model autoregresji  $AR(q)$ :

$$x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \dots + \alpha_q x_{t-q} + u_t, \quad t = q + 1, \dots, \quad (1)$$

gdzie  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$  są oszacowanymi parametrami modelu, to wymiar korelacyjny szeregu reszt  $\{u_t\}$  będzie równy wymiarowi korelacyjnemu szeregu obserwacji.

Brock w swojej pracy pokazał, że wymiar korelacyjny reszt modelu dopasowanego do pewnego szeregu czasowego różni się znacznie od wymiaru korelacyjnego tego szeregu. Na tej podstawie sformułował wniosek, że jeżeli nie jest zachowana równość wynikająca z powyższego twierdzenia, należy odrzucić tezę o deterministycznym charakterze badanego ciągu informacji.

Metodę odróżniania deterministycznego szeregu czasowego od losowego opartą na twierdzeniu o resztach można przedstawić w postaci następującego algorytmu:

1. W pierwszym kroku do jednowymiarowego szeregu obserwacji  $\{x_t\}$  dopasowuje się model autoregresji AR(q).
2. Następnie dla wyznaczonych reszt modelu oraz dla pierwotnego szeregu czasowego oblicza się wymiar korelacyjny.
3. Jeżeli wymiar korelacyjny szeregu czasowego będzie równy wymiarowi korelacyjnemu szeregu reszt, badany ciąg obserwacji będzie deterministyczny.

### 1.3. Test mieszania

Po raz pierwszy algorytm zwany testem mieszania zastosowali w swoich pracach J. Scheinkman i B. LeBaron [6]. Algorytm ten przedstawia procedurę tworzenia losowych permutacji szeregu obserwacji i porównanie wymiaru korelacyjnego szeregu „potasowanego” z wymiarem szeregu oryginalnego.

W przypadku gdy badany szereg jest deterministyczny, jego „pomieszczenie” powoduje znaczny wzrost wymiaru korelacyjnego. Natomiast gdy szereg jest stochastyczny, takie „pomieszczenie” nie zmienia wartości tego wymiaru.

Stosując test mieszania dla szeregów czasowych, w których liczba elementów była mała (100-300), Frank i Stengos [2] nie otrzymali dobrych wyników i dlatego odrzucili możliwość wystąpienia determinizmu. Jednakże rok później J. Scheinkman i B. LeBaron [6] zastosowali z powodzeniem tę samą metodę w analizie szeregów czasowych utworzonych z codziennych i cotygodniowych stóp zysku portfela akcji (dane pochodziły z okresu od 1963 roku do 1987 roku).

## 2. Zastosowanie metod odróżniania deterministycznych szeregów czasowych od losowych do analizy szeregów czasowych utworzonych z cen wybranych spółek notowanych na GPW w Warszawie

Przeprowadzone badania empiryczne pozwoliły, za pomocą wyżej przedstawionych metod, zweryfikować hipotezę o deterministycznym, chaotycznym charakterze badanego szeregu czasowego.

W obliczeniach pod uwagę wzięto 15 spółek, których akcje były notowane na Gieldzie Papierów Wartościowych w Warszawie co najmniej od 17.05.1995 roku. Razem przeanalizowano 2700 obserwacji, którymi były dzienne logarytmiczne stopy zwrotu:

$$R_t = \ln P_t - \ln P_{t-1}.$$

Obliczając wymiar korelacyjny, przyjmowano różne wymiary zanurzenia ( $d = 2, \dots, 10$ ) oraz różne wartości  $r$  ( $0.25\sigma, 0.5\sigma, 0.75\sigma, \sigma$ ) [5], gdzie  $\sigma$  jest odchyleniem standardowym z próby. Otrzymane wyniki przedstawia tabela 1.

Tabela 1

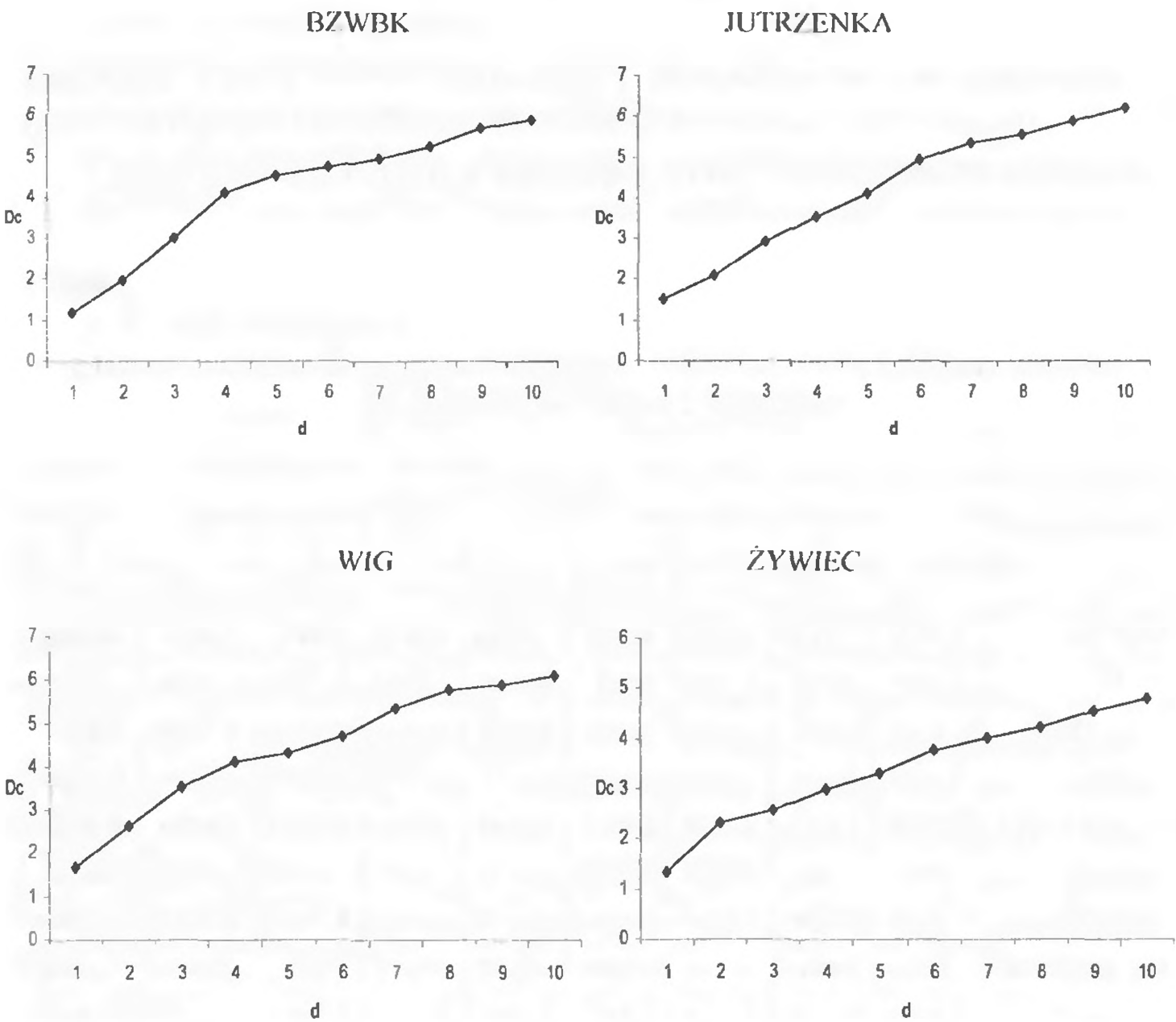
Zestawienie wartości wymiaru zanurzenia i wymiaru korelacyjnego dla szeregów czasowych utworzonych z notowań wybranych spółek

| Wymiar<br>zanurzenia | Wymiar korelacyjny |               |               |               |               |               |               |               |               |
|----------------------|--------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
|                      | 2                  | 3             | 4             | 5             | 6             | 7             | 8             | 9             | 10            |
| BPHPBK               | 2,3211             | 3,0122        | 3,9956        | 5,1233        | 6,4562        | 6,9912        | 8,2321        | 9,4539        | 10,0021       |
| <b>BZWBK</b>         | <b>2,1121</b>      | <b>2,9128</b> | <b>3,5403</b> | <b>4,1229</b> | <b>4,9456</b> | <b>5,3432</b> | <b>5,5432</b> | <b>5,8913</b> | <b>6,2345</b> |
| DEBICA               | 2,1495             | 2,9913        | 3,9127        | 5,8765        | 6,0012        | 6,8054        | 8,1227        | 9,7854        | 10,1977       |
| ELEKTRIM             | 2,4325             | 3,1121        | 4,0129        | 5,2345        | 6,2101        | 7,1231        | 8,2121        | 9,2324        | 9,8761        |
| INGBSK               | 2,0981             | 3,4532        | 4,2318        | 5,1349        | 6,4301        | 6,8976        | 8,2003        | 9,6754        | 10,3221       |
| <b>JUTRZENKA</b>     | <b>1,9879</b>      | <b>3,0012</b> | <b>4,1131</b> | <b>4,5421</b> | <b>4,7311</b> | <b>4,9612</b> | <b>5,2231</b> | <b>5,6742</b> | <b>5,8712</b> |
| KABLE                | 1,9981             | 3,1112        | 4,3232        | 5,1975        | 6,1211        | 7,2398        | 7,9954        | 8,7891        | 9,1234        |
| KREDYT               | 2,4343             | 3,1004        | 3,8761        | 5,1233        | 6,1234        | 6,9777        | 8,2911        | 9,4121        | 10,9872       |
| MILLENIUM            | 2,3211             | 2,9211        | 4,1012        | 4,9989        | 6,0023        | 7,0011        | 8,2003        | 9,3524        | 9,8881        |
| OPTIMUS              | 2,1006             | 3,2807        | 4,1342        | 5,3251        | 5,7892        | 7,3232        | 8,1231        | 9,2342        | 10,3452       |
| RAFAKO               | 1,8923             | 2,6789        | 4,0003        | 5,1231        | 6,2123        | 7,2349        | 8,2398        | 9,4312        | 10,0123       |
| SWARZĘDZ             | 2,0342             | 3,0042        | 4,5621        | 5,3219        | 6,3214        | 7,3209        | 8,0021        | 9,3456        | 10,3241       |
| VISTULA              | 2,0321             | 3,7845        | 4,8933        | 6,0012        | 6,7634        | 7,0965        | 8,9340        | 10,0334       | 11,0093       |
| <b>WIG</b>           | <b>1,76543</b>     | <b>3,5432</b> | <b>4,1232</b> | <b>4,3242</b> | <b>4,6784</b> | <b>5,3452</b> | <b>5,7832</b> | <b>5,9001</b> | <b>6,1002</b> |
| <b>ŻYWIEC</b>        | <b>2,3201</b>      | <b>2,5647</b> | <b>3,0021</b> | <b>3,3321</b> | <b>3,7865</b> | <b>4,0123</b> | <b>4,2341</b> | <b>4,5643</b> | <b>4,8001</b> |

Analizując otrzymane wyniki, zaobserwowano brak wyraźnej zbieżności wymiaru korelacyjnego do jakiejś liczby, co może być spowodowane:

- brakiem chaosu deterministycznego,
- zbyt małą liczbą obserwacji.

Jednakże dla niektórych spółek (BZWBK, Jutrzenka, WIG, Żywiec) wymiar zanurzenia jest wyraźnie mniejszy od wymiaru korelacyjnego. Może to świadczyć o tym, że nie są one czysto losowe i istnieje możliwość, że są deterministyczne.



Rys. 2. Zależność wymiaru korelacyjnego od wymiaru zanurzenia dla akcji BZWBK, Jutrzenka, WIG i Żywiec

W drugiej części badań empirycznych tworzone losowe permutacje szeregów czasowych i obliczano wymiar korelacyjny dla nowo powstałych szeregów. Jeśli szereg nie był częścią chaotycznego atraktora, wymiar korelacyjny się nie zmienił, w przeciwnym przypadku wymiar ten wzrósł. Wyniki przedstawia tabela 2.

Tabela 2

Zestawienie wartości wymiaru zanurzenia i wymiaru korelacyjnego dla szeregów czasowych utworzonych z notowań wybranych spółek oraz wymiaru korelacyjnego dla „potasowanych” szeregów

| Wymiar zanurzenia | Wymiar korelacyjny |               |               |               |               |               |               |                |                |
|-------------------|--------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|----------------|----------------|
|                   | 2                  | 3             | 4             | 5             | 6             | 7             | 8             | 9              | 10             |
| BPIIPBK           | 2,3211             | 3,0122        | 3,9956        | 5,1233        | 6,4562        | 6,9912        | 8,2321        | 9,4539         | 10,0021        |
| <b>BPIIPBK</b>    | <b>2,3209</b>      | <b>3,0123</b> | <b>3,9956</b> | <b>5,1234</b> | <b>6,4561</b> | <b>6,9912</b> | <b>8,2321</b> | <b>9,4531</b>  | <b>10,0009</b> |
| BZWBK             | 2,1121             | 2,9128        | 3,5403        | 4,1229        | 4,9456        | 5,3432        | 5,5432        | 5,8913         | 6,2345         |
| <b>BZWBK</b>      | <b>3,7621</b>      | <b>4,1977</b> | <b>5,3211</b> | <b>5,7564</b> | <b>6,4353</b> | <b>6,7644</b> | <b>6,9888</b> | <b>7,2312</b>  | <b>7,7893</b>  |
| DĘBICA            | 2,1495             | 2,9913        | 3,9127        | 5,8765        | 6,0012        | 6,8054        | 8,1227        | 9,7854         | 10,1977        |
| <b>DĘBICA</b>     | <b>2,2495</b>      | <b>2,9813</b> | <b>3,9113</b> | <b>5,8764</b> | <b>6,0022</b> | <b>6,8054</b> | <b>8,2021</b> | <b>9,8734</b>  | <b>10,2327</b> |
| ELEKTRIM          | 2,4325             | 3,1121        | 4,0129        | 5,2345        | 6,2101        | 7,1231        | 8,2121        | 9,2324         | 9,8761         |
| <b>ELEKTRIM</b>   | <b>2,6743</b>      | <b>3,6354</b> | <b>4,3546</b> | <b>5,5387</b> | <b>6,2422</b> | <b>7,3243</b> | <b>8,6238</b> | <b>9,7311</b>  | <b>9,8345</b>  |
| INGBSK            | 2,0981             | 3,4532        | 4,2318        | 5,1349        | 6,4301        | 6,8976        | 8,2003        | 9,6754         | 10,3221        |
| <b>INGBSK</b>     | <b>2,7311</b>      | <b>3,4564</b> | <b>4,8463</b> | <b>5,6411</b> | <b>6,4431</b> | <b>6,7419</b> | <b>8,2431</b> | <b>9,7431</b>  | <b>10,7837</b> |
| JUTRZENKA         | 1,9879             | 3,0012        | 4,1131        | 4,5421        | 4,7311        | 4,9612        | 5,2231        | 5,6742         | 5,8712         |
| <b>JUTRZENKA</b>  | <b>2,7841</b>      | <b>3,7532</b> | <b>4,1341</b> | <b>4,3221</b> | <b>4,2741</b> | <b>4,7896</b> | <b>5,9083</b> | <b>5,9289</b>  | <b>5,6832</b>  |
| KABLE             | 1,9981             | 3,1112        | 4,3232        | 5,1975        | 6,1211        | 7,2398        | 7,9954        | 8,7891         | 9,1234         |
| <b>KABLE</b>      | <b>2,8431</b>      | <b>4,7382</b> | <b>5,3290</b> | <b>6,9023</b> | <b>8,7232</b> | <b>9,9412</b> | <b>9,9983</b> | <b>10,3842</b> | <b>10,4242</b> |
| KREDYTB           | 2,4343             | 3,1004        | 3,8761        | 5,1233        | 6,1234        | 6,9777        | 8,2911        | 9,4121         | 10,9872        |
| <b>KREDYTB</b>    | <b>2,4657</b>      | <b>3,6421</b> | <b>3,7226</b> | <b>5,8432</b> | <b>6,1327</b> | <b>6,9292</b> | <b>8,8782</b> | <b>9,4842</b>  | <b>10,9822</b> |
| MILLENIUM         | 2,3211             | 2,9211        | 4,1012        | 4,9989        | 6,0023        | 7,0011        | 8,2003        | 9,3524         | 9,8881         |
| <b>MILLENIUM</b>  | <b>2,4138</b>      | <b>2,1331</b> | <b>4,8341</b> | <b>5,3121</b> | <b>6,1111</b> | <b>7,4831</b> | <b>8,1417</b> | <b>9,8119</b>  | <b>9,1334</b>  |
| OPTIMUS           | 2,1006             | 3,2807        | 4,1342        | 5,3251        | 5,7892        | 7,3232        | 8,1231        | 9,2342         | 10,3452        |
| <b>OPTIMUS</b>    | <b>2,1326</b>      | <b>3,2832</b> | <b>4,2322</b> | <b>5,3321</b> | <b>5,9282</b> | <b>7,3203</b> | <b>8,7311</b> | <b>9,1991</b>  | <b>10,2311</b> |
| RAFAKO            | 1,8923             | 2,6789        | 4,0003        | 5,1231        | 6,2123        | 7,2349        | 8,2398        | 9,4312         | 10,0123        |
| <b>RAFAKO</b>     | <b>1,1381</b>      | <b>2,8191</b> | <b>4,1391</b> | <b>5,1189</b> | <b>6,2931</b> | <b>7,1881</b> | <b>8,1312</b> | <b>9,8932</b>  | <b>10,9101</b> |
| SWARZĘDZ          | 2,0342             | 3,0042        | 4,5621        | 5,3219        | 6,3214        | 7,3209        | 8,0021        | 9,3456         | 10,3241        |
| <b>SWARZĘDZ</b>   | <b>2,1289</b>      | <b>3,2341</b> | <b>4,3213</b> | <b>5,2132</b> | <b>6,8422</b> | <b>7,8242</b> | <b>8,2394</b> | <b>10,2430</b> | <b>10,4928</b> |
| VISTULA           | 2,0321             | 3,7845        | 4,8933        | 6,0012        | 6,7634        | 7,0965        | 8,9340        | 10,0334        | 11,0093        |
| <b>VISTULA</b>    | <b>2,3111</b>      | <b>3,6888</b> | <b>4,7863</b> | <b>6,7909</b> | <b>6,8787</b> | <b>7,9876</b> | <b>9,8765</b> | <b>10,7654</b> | <b>11,6754</b> |
| WIG               | 1,7543             | 3,5432        | 4,1232        | 4,3242        | 4,6784        | 5,3452        | 5,7832        | 5,9001         | 6,1002         |
| <b>WIG</b>        | <b>3,4932</b>      | <b>5,8242</b> | <b>6,1112</b> | <b>6,2452</b> | <b>7,4432</b> | <b>8,3452</b> | <b>8,7832</b> | <b>8,9301</b>  | <b>8,9922</b>  |
| ŻYWIEC            | 2,3201             | 2,5647        | 3,0021        | 3,3321        | 3,7865        | 4,0123        | 4,2341        | 4,5643         | 4,8001         |
| <b>ŻYWIEC</b>     | <b>2,4111</b>      | <b>2,4217</b> | <b>3,7021</b> | <b>3,5422</b> | <b>3,3992</b> | <b>4,9213</b> | <b>4,9322</b> | <b>4,8632</b>  | <b>4,9282</b>  |

Na podstawie otrzymanych wyników można wnioskować, że w szeregach czasowych utworzonych z cen akcji BZWBK, Kable i indeksu WIG istnieje pewna deterministyczna struktura (wartość wymiaru korelacyjnego dla szeregu „potasowanego” nieznacznie wzrosła). Niestety dwa szeregi czasowe (Jutrzenka, Żywiec), które w pierwszej metodzie wskazywały na istnienie struktury deterministycznej, po utworzeniu losowych permutacji szeregu i porównaniu wymiarów korelacyjnych szeregu „potasowanego” z wymiarem szeregu oryginalnego wykazały losowy charakter.

W kolejnym kroku badań wykorzystano twierdzenie Brocka o resztach i dopasowano obserwowane szeregi do modelu autoregresji rzędu drugiego, a następnie wyznaczono szeregi reszt i obliczono ich wymiar korelacyjny. Otrzymane wyniki przedstawia tabela 3.

Tabela 3

Zestawienie wartości wymiaru zanurzenia i wymiaru korelacyjnego dla szeregów czasowych utworzonych z notowań wybranych spółek oraz wymiaru korelacyjnego szeregu reszt

| Wymiar zanurzenia | Wymiar korelacyjny |               |               |                |                |                |                |                |                |
|-------------------|--------------------|---------------|---------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
|                   | 2                  | 3             | 4             | 5              | 6              | 7              | 8              | 9              | 10             |
| 1                 | 2                  | 3             | 4             | 5              | 6              | 7              | 8              | 9              | 10             |
| BPIIPBK           | 2,3211             | 3,0122        | 3,9956        | 5,1233         | 6,4562         | 6,9912         | 8,2321         | 9,4539         | 10,0021        |
| <b>BPIIPBK</b>    | <b>5,2132</b>      | <b>7,1398</b> | <b>8,3189</b> | <b>11,8132</b> | <b>13,4501</b> | <b>14,7842</b> | <b>16,2348</b> | <b>19,3231</b> | <b>21,0009</b> |
| BZWBK             | 2,1121             | 2,9128        | 3,5403        | 4,1229         | 4,9456         | 5,3432         | 5,5432         | 5,8913         | 6,2345         |
| <b>BZWBK</b>      | <b>2,7843</b>      | <b>2,1638</b> | <b>3,3722</b> | <b>4,2884</b>  | <b>4,7198</b>  | <b>5,7138</b>  | <b>5,0189</b>  | <b>5,5089</b>  | <b>6,8117</b>  |
| DĘBICA            | 2,1495             | 2,9913        | 3,9127        | 5,8765         | 6,0012         | 6,8054         | 8,1227         | 9,7854         | 10,1977        |
| <b>DĘBICA</b>     | <b>5,7389</b>      | <b>7,2739</b> | <b>9,7128</b> | <b>14,7452</b> | <b>16,0459</b> | <b>17,8205</b> | <b>23,2182</b> | <b>25,7823</b> | <b>29,8237</b> |
| ELEKTRIM          | 2,4325             | 3,1121        | 4,0129        | 5,2345         | 6,2101         | 7,1231         | 8,2121         | 9,2324         | 9,8761         |
| <b>ELEKTRIM</b>   | <b>3,8239</b>      | <b>4,3646</b> | <b>5,9871</b> | <b>6,7584</b>  | <b>7,2422</b>  | <b>8,3243</b>  | <b>9,6238</b>  | <b>10,7311</b> | <b>11,8345</b> |
| INGBSK            | 2,0981             | 3,4532        | 4,2318        | 5,1349         | 6,4301         | 6,8976         | 8,2003         | 9,6754         | 10,3221        |
| <b>INGBSK</b>     | <b>4,7311</b>      | <b>6,4564</b> | <b>7,8463</b> | <b>9,6411</b>  | <b>12,4431</b> | <b>13,7419</b> | <b>15,2431</b> | <b>17,7431</b> | <b>18,7837</b> |
| JUTRZENKA         | 1,9879             | 3,0012        | 4,1131        | 4,5421         | 4,7311         | 4,9612         | 5,2231         | 5,6742         | 5,8712         |
| <b>JUTRZENKA</b>  | <b>2,1231</b>      | <b>3,7002</b> | <b>4,7655</b> | <b>4,8969</b>  | <b>5,0076</b>  | <b>5,0268</b>  | <b>5,3788</b>  | <b>5,8996</b>  | <b>6,0907</b>  |
| KABLE             | 1,9981             | 3,1112        | 4,3232        | 5,1975         | 6,1211         | 7,2398         | 7,9954         | 8,7891         | 9,1234         |
| <b>KABLE</b>      | <b>5,8431</b>      | <b>6,7382</b> | <b>8,3290</b> | <b>8,9023</b>  | <b>9,7232</b>  | <b>10,9412</b> | <b>10,9983</b> | <b>11,3842</b> | <b>12,4242</b> |
| KREDYTB           | 2,4343             | 3,1004        | 3,8761        | 5,1233         | 6,1234         | 6,9777         | 8,2911         | 9,4121         | 10,9872        |
| <b>KREDYTB</b>    | <b>4,4657</b>      | <b>5,6421</b> | <b>5,7226</b> | <b>7,8432</b>  | <b>8,1327</b>  | <b>8,9292</b>  | <b>10,8782</b> | <b>11,4842</b> | <b>12,9822</b> |
| MILLENIU          | 2,3211             | 2,9211        | 4,1012        | 4,9989         | 6,0023         | 7,0011         | 8,2003         | 9,3524         | 9,8881         |
| <b>MILLENIU</b>   | <b>3,4138</b>      | <b>3,1331</b> | <b>5,8341</b> | <b>5,3121</b>  | <b>7,1111</b>  | <b>8,4831</b>  | <b>9,1417</b>  | <b>10,8119</b> | <b>11,1334</b> |

cd. tabeli 3

| 1        | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7       | 8       | 9       | 10      |
|----------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|
| OPTIMUS  | 2,1006 | 3,2807 | 4,1342 | 5,3251 | 5,7892 | 7,3232  | 8,1231  | 9,2342  | 10,3452 |
| OPTIMUS  | 6,1326 | 7,2832 | 8,2322 | 9,3321 | 9,9282 | 11,3203 | 12,7311 | 13,1991 | 14,2311 |
| RAFAKO   | 1,8923 | 2,6789 | 4,0003 | 5,1231 | 6,2123 | 7,2349  | 8,2398  | 9,4312  | 10,0123 |
| RAFAKO   | 3,1381 | 4,8191 | 6,1391 | 7,1189 | 8,2931 | 9,1881  | 10,1312 | 11,8932 | 12,9101 |
| SWARZĘDZ | 2,0342 | 3,0042 | 4,5621 | 5,3219 | 6,3214 | 7,3209  | 8,0021  | 9,3456  | 10,3241 |
| SWARZĘDZ | 4,1289 | 5,2341 | 6,3213 | 7,2132 | 8,8422 | 9,8242  | 10,2394 | 12,2430 | 13,4928 |
| VISTULA  | 2,0321 | 3,7845 | 4,8933 | 6,0012 | 6,7634 | 7,0965  | 8,9340  | 10,0334 | 11,0093 |
| VISTULA  | 3,3111 | 4,6888 | 5,7863 | 6,7909 | 7,8787 | 9,9876  | 10,8765 | 11,7654 | 12,6754 |
| WIG      | 1,7543 | 3,5432 | 4,1232 | 4,3242 | 4,6784 | 5,3452  | 5,7832  | 5,9001  | 6,1002  |
| WIG      | 2,3562 | 3,8969 | 4,0009 | 5,7552 | 5,4354 | 5,6543  | 6,2865  | 6,7751  | 6,9897  |
| ŻYWIEC   | 2,3201 | 2,5647 | 3,0021 | 3,3321 | 3,7865 | 4,0123  | 4,2341  | 4,5643  | 4,8001  |
| ŻYWIEC   | 2,4111 | 2,4217 | 3,7021 | 3,5422 | 3,3992 | 4,9213  | 4,9322  | 4,8632  | 4,9282  |

Analiza otrzymanych rezultatów wykazała, że dla niektórych spółek wymiar korelacyjny szeregu obserwacji jest wyraźnie bliski wymiarowi korelacyjnemu szeregu reszt. Dzieje się tak w przypadku spółek BZWBK, Jutrzenka, Żywiec i indeksu WIG. Przemawia to za istnieniem jakiejś struktury w badanych danych, czyli nie są one czysto losowe. Nie można jednak stwierdzić, że są one deterministyczne.

## Podsumowanie

Na podstawie przeprowadzonych badań widać wyraźnie, że formułowanie wniosków o istnieniu bądź nieistnieniu w szeregach finansowych deterministycznych, chaotycznych struktur jest bardzo trudne. Możliwość istnienia pewnej nieliniowej, deterministycznej struktury należy traktować z ostrożnością, gdyż długość rozpatrywanych szeregów obserwacji może być za mała. Informacje taką należy przyjąć jako wstęp do dalszych badań z zastosowaniem innych metod odróżniania deterministycznych szeregów czasowych od losowych (np. test BDS, Analiza R/S itd.). Być może potwierdzą one istnienie chaosu na giełdzie lub mu zaprzeczą.

## Literatura

1. Brock W.A.: *Distinguishing Random and Deterministic Systems: Abridged Version*. „Journal of Economic Theory” 1986, No. 40, s. 168-195.
2. Frank M., Stengos T.: *Some Evidence Concerning Macroeconomic Chaos*. „Journal of Monetary Economics” 1988a, Vol. 22, s. 423-438.
3. Grassberger P., Procaccia I.: *Characterization of Strange Attractors*. „Phys. Rev. Lett.” 1983, Vol. 50, s. 346-349.
4. Grassberger P., Procaccia I.: *Measuring the Strangeness of Strange Attractors*. „Physica D” 1983a.
5. Kim H.S, Eykholt R., Salas J.D.: *Nonlinear Dynamics, Delay Time, and Embedding Windows*. „Physica D” 1999, 127.
6. Scheinkman J.A., LeBaron B.: *Nonlinear Dynamics and Stock Returns*. „The Journal of Business” 1989a, Vol. 62, No. 3, s. 311-337.
7. Schuster H.G.: *Chaos deterministyczny*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1995.
8. Takens F.: *Detecting Strange Attractors in Turbulence. Lecture Notes in Mathematics*. Red. D.A. Rand, L.S. Young. Springer, Berlin 1981.
9. Zawadzki H.: *Chaotyczne systemy dynamiczne*. AE, Katowice 1996.

## THE METHODS USED IN DISTINGUISHING RANDOM AND DETERMINISTIC SYSTEMS

### Summary

In this paper we discuss some recent techniques used in distinguishing between probabilistic and deterministic behavior in stock price: the correlation dimension, Brock's residual theorem, the „shuffle diagnostic”. Our data set has been composed of daily data obtained from GPW in Warsaw.

