

**Wojciech Rybicki**

Wyższa Szkoła Oficerska Wojsk Lądowych  
im. gen. Tadeusza Kościuszki we Wrocławiu

# MODELOWANIE PREFERENCJI A ZAGADNIENIA ZRÓWNOWAŻONEGO (TRWAŁEGO) ROZWOJU\*

The time of which a man exists cannot affect the value of his happiness from universal point...  
the interests of posterity must concern a utilitarian as much as those of his contemporaries.

*H. Sidgwick (1874)*

[...] mocny, etyczny wymóg jednakowego traktowania wszystkich pokoleń, sam w sobie racjonalny, stoi w sprzeczności z równie mocnym, intuicyjnym przekonaniem, że niemoralne jest oczekiwanie nadmiernie wysokiej stopy oszczędności wobec jednego pokolenia czy wobec wszystkich kolejnych pokoleń.

*K.J. Arrow (1995)*

## Wstęp

Poszukiwanie „właściwych” metod porównań i wyceny strumieni konsumpcji, oszczędności i obciążeń (w czasie) stanowi jeden z odwiecznych tematów zainteresowań ekonomistów. Ogólniej: chodzi o porównywanie użyteczności sekwencji stanów w projektach wieloletowych oraz o sposoby egzekwowania (różnie rozumianej) sprawiedliwości międzypokoleniowej. O fundamentalnych wątpliwościach w tej subtelnej kwestii mogą świadczyć m.in. zacytowane jako motta niniejszego artykułu dwie opinie wybitnych uczonych, filozofa i ekonomisty, uwypuklające różne aspekty problematyki. O braku jednoznacznych rozstrzygnięć (na gruncie formalnym) będzie mowa w dalszym ciągu opracowania.

---

\* Prezentowane wyniki badań, zrealizowane w ramach tematu nr WZ/009/DzS, zostały sfinansowane ze środków własnych Wyższej Szkoły Oficerskiej Wojsk Lądowych im. gen. Tadeusza Kościuszki.

Metodyka ewaluacji korzyści i kosztów, wynikających z przedsięwzięć podejmowanych obecnie, materializowanych zaś w odległej przyszłości wiąże się wyborem formuł dyskutowania takich dalekookresowych programów. W artykule przytacza się niektóre próby (oraz ujawniane, przy tej okazji, sprzeczności) aksjomatyzacji preferencji w zbiorach ciągów, mających na celu uwzględnienie postulatów typu efektywności, sprawiedliwości i trwałości. Widoczny jest konflikt postulatów typu sprawiedliwości (bezstronności, anonimowości etc.) z postulatami z rodziny efektywności (różne wersje monotoniczności itp.). Pojawiają się kwestie zupełności porządków oraz ich konstruktywnego definiowania. Większość twierdzeń ma charakter negatywny („brak”, „niemożność”), a podstawowe wyniki pozytywne są formułowane w postaci twierdzeń o istnieniu. Niektóre z przytoczonych ustaleń są zaskakujące.

Kluczową rolę pełni kwestia istnienia i kształtu funkcyjnego reprezentacji (numerycznej) preferencji – funkcjonałów dyskutowających, pytań o ich zgodność dynamiczną, „odwracanie” preferencji (z upływem czasu) oraz tzw. malejącą niecierpliwość. Zjawiska te dobrze opisuje się tzw. hiperbolicznymi funkcjami dyskutowającymi. Nie stanowią one jednak „panaceum” wyjaśniającego wszelkie odstępstwa realnych procesów od kanonicznych norm racjonalności. W zakończeniu przytoczono niehiperboliczne modele opisu tych zjawisk, które pojawiły się niedawno w literaturze przedmiotu. Rozważa się też możliwość użycia nowego wzorca wyceny w czasie – dyskutowania log-normalnego (proponycja ta jednak nie jest poparta obserwacjami empirycznymi); dokładniejsze studium tego przypadku przygotowuje się w artykule Rybickiego [2014].

Znamienny jest brak klarownych powiązań „efektów pikoekonomicznych” (kwantyfikacja wzorców behawioralno-psychologicznych) z „rekomendacjami makroekonomicznymi” dotyczącymi kształtowania społecznych (międzypokoleniowych) stóp dyskutowych – w obydwu klasach zagadnień pojawiają się, pozornie jednobrzmiące, sugestie formalnego modelowania, podczas gdy problemy te dotyczą absolutnie odmiennych „światów”. W związku z tym szczególną rangę zyskują zadania agregacji funkcjonałów dyskutowających. Propozycje takich agregacji sformułowano w ostatnim dziesięcioleciu [Reinschmidt 2002; Gollier 2007; Nocetti i in. 2008]. Zagregowane społeczne stopy dyskutowe okazują się niższe niż indywidualne (a czynniki dyskutowujące również wolniej maleją). Pokazano też, że agregaty wykładniczych funkcji dyskutowających (stacjonarnych – w sensie parametru „niecierpliwości”) są funkcjami hiperbolicznymi (których istotą jest brak stacjonarności, czyli „malejąca niecierpliwość” [Weitzman 1998; Weitzman 2001; Reinschmidt 2002]). Podstawowym celem pracy jest zasygnalizowanie (nieodosobnionego) poglądu autora o „ukonstytuowaniu się” w interdyscyplinar-

nym obszarze badawczym teorii ekonomii, psychologii, biologii, socjologii i matematyki nowego, samodzielnego bytu naukowego, w którym splatają się rozliczne nurty tych dyscyplin. Bardzo selektywny wybór „faktów naukowych” (ustaleń formalnych i empirycznych, głównie z ostatniego półwiecza) ma służyć poparciu sformułowanej tezy. Artykuł ma więc charakter przeglądowny – „z przesłaniem”. Niezwykle ważną – konstrukcyjnie i merytorycznie – rolę wyznaczono tu dosyć wszechstronnej bibliografii. Nie wszystkie występujące w spisie literatury pozycje „aktywnie wspierają” prowadzone poniżej wywody. Artykuł nie jest notą bibliograficzną sensu stricto, załączona literatura stanowi jednak „tło dokumentacyjne”, które można polecić zainteresowanemu uzupełnieniem informacji Czytelnikowi. Nie pretenduje ona – w żadnej mierze – do kompletności. Dość obszerną bibliografię przedmiotu zawierają prace [Rybicki 2009, 2010b, 2011, 2012]. Artykuł został przygotowany w „konwencji mieszanej”: przeważają wywody o charakterze eseistycznym, są też fragmenty sformalizowane oraz komentarze do twierdzeń.

## **1. Dylematy modelowania sprawiedliwości międzypokoleniowej, realizacji postulatów typu „sustainability” i dyskontowania**

Refleksja nad „samopodtrzymywaniem” jako pryncypialnym wymogiem stawianym procesom rozwoju uświadamia konieczność „reformalizacji” niektórych pojęć (rewizji istoty relacji „efektywność – sprawiedliwość”) i ich „wkomponowania” w całą mechanikę rozwoju.

Nie do przyjęcia jest „dyktat” współczesnych, przyznających im (poprzez „podparcie się” odpowiednią filozofią i techniką wyceny) przywileje w sferze konsumpcji oraz krótkookresowej ekspansywnej polityki eksploatacji zasobów, tolerując lekceważenie skutków takiej strategii dla jakości życia w przyszłości oraz zagrożenia bezpieczeństwa egzystencji w ogóle. Nie do zaakceptowania jest także odwrócenie proporcji – poświęcenia jakości życia i złożenia na barki współczesnych całokształtu kosztów inwestycji „adresowanych dla potomnych” (i przez nich głównie konsumowanych) [Czerwiński 1992]. Obydwie skrajności łatwo dyskwalifikuje wielookresowy rachunek korzyści i kosztów, w połączeniu z szacowaniem ryzyka zagrożeń oraz „pozostałego czasu życia ekonomii”.

Powyższe dylematy są przedmiotem intensywnych badań od około 60 lat – zajmują się nimi teoretycy ekonomii, matematycy oraz przedstawiciele szeroko rozumianych badań operacyjnych w dwóch komplementarnych płaszczyznach:

a) Modelowania preferencji w przestrzeniach nieskończonych ciągów wielkości ekonomicznych o różnej naturze i wykładni, które uwzględniałyby – formali-

zując i rozstrzygając kwestie egzystencjalne – aprioryczne postulaty etyczno-pragmatyczne. Można by było określić ją jako „warstwę aksjomatyczno-formalną”. W tym kontekście termin „modelowanie preferencji” brzmi szczególnie trafnie, zawiera bowiem esencję dialektyki procesu: „odzwierciedlanie-abstrahowanie”.

b) W drugiej („operacyjnej”) warstwie próbuje się owe problemy sprowadzić do usankcjonowania matematyczno-ekonomicznych technik dyskontowania strumieni kosztów i korzyści. Formalne ustalenia z „pierwszej warstwy” przekładają się na metodykę wyceny: konstruowane funkcjonały pełnią rolę kryteriów dla porównywania programów, indukując preporządki w odpowiednich przestrzeniach (ciągów, funkcji).

Pewne wskazówki płyną nie tylko z empirii i obserwacji zjawisk oraz procesów ekonomicznych, ale z obserwacji natury psychologicznej, i to w odniesieniu zarówno do „racjonalnie zachowujących się” podmiotów z gatunku *homo oeconomicus*, jak i do instynktownych zachowań przedstawicieli innych gatunków świata fauny. W obydwu kategoriach odnotowano permanentne „pogwałcanie normatywnych kanonów racjonalności” – szczególnie wyraziście manifestowało się zjawisko niekonsekwencji (odwracania!) preferencji wraz z upływem czasu. Spostrzeżenia te zaowocowały zmianami w narzędziach kwantyfikacji procesów – dostosowania ich do realiów. Rozliczne, nieklasyczne metody dyskontowania prowadzą się przede wszystkim do zarzucenia formuł wykładniczych (tradycyjnych, „logicznych”, „kupieckich” – w najlepszym tego słowa znaczeniu – reguł kalkulacyjnych) – całkowicie nieadekwatnych do ideologii „*sustainability*” oraz sfalsyfikowanych empirycznie (jak wspomniano wyżej). Najbardziej spektakularnym efektem jest „rozsadzanie paradygmatu stacjonarnej niecierpliwości” związanej ze stałością stopy dyskontowej. Od kilku dziesięcioleci są podejmowane próby modyfikacji samuelsonowskiego dyskontowania wykładniczego – w kierunku spowolnienia zbieżności do zera czynnika dyskontującego.

Warte podkreślenia są interdyscyplinarne konotacje problematyki poszukiwania „właściwej” (kompromisowej) metodyki dyskontowania i modelowania preferencji w przestrzeniach ścieżek rozwoju: oprócz poszukiwania (formalnych, cząstkowych) „kompromisowych” rozstrzygnięć fundamentalnej kwestii „*equity vs efficiency*” mieści się w nich wspomniane zagadnienie optymalizacji społecznej stopy dyskontowej, problemy agregacji „stóp indywidualnych”, pojawiają się związki (naturalne!) z teorią wzrostu, teoriami oszczędzania (cyklu życia oraz permanentnego dochodu), kontrowersjami wokół teorematu Ricardo-Barro, „krótkowzrocznością” preferencji – powszechnego fenomenu psychologii ekonomicznej (ekonomii behawioralnej), konfliktów i gier międzypokoleniowych, subtelnych kwestii dotyczących „handlu czasem”.

Za cenę utraty (formalnej) dynamicznej koherencji preferencji uzyskuje się większą zgodność z obserwowanymi zachowaniami podmiotów w skali „mikro”, zaś „grube ogony” funkcji dyskontujących (np. hiperbolicznych) przyczyniają się do zmniejszenia stopnia „dyskryminacji” wskaźników dobrobytu odległych w czasie przyszłych pokoleń. Zgoda na niezgodność dynamiczną w modelowaniu procesów decyzyjnych jest ceną, którą warto zapłacić za „ochronę” przed „pułapkami dyskontowania” pojawiającymi się przy rachunku korzyści i strat w tzw. bardzo długim okresie, o porażającej wręcz skali (nieodwracalnych) konsekwencji. Jest to niewielka cena aspiracji do strategicznego zarządzania w sferze „sustainability”. Czy można jednak mówić o niezgodności (czasowej) formuł dyskontowych różnych od eksponencjalnej? Defekty natury formalnej, np. strata tzw. efektu stopera (jeden z przejawów odwracania preferencji [Bleichrodt i in. 2008]), stają się paradoksalnie atutami w zakresie adekwatności samego odzwierciedlenia rzeczywistych przebiegów owych (mentalnych) procesów, w których rzeczonyj zgodności po prostu nie ma. Trudno więc nawet mówić o „cenie za niezgodność”.

Na zakończenie tego fragmentu zostaną przytoczone niektóre spostrzeżenia związane z konfrontacją wartości dyskontowania „dalekiej przyszłości” według formuł wykładniczych oraz hiperbolicznych, a także przykłady odwracania preferencji.

Harvey [1995] uzasadnia (na gruncie aksjomatycznym) stosowanie hiperbolicznych funkcji dyskontujących w postaci  $h(t) = \frac{b}{b+t}$ , które przypisują znaczenie większe przyszłym wielkościom niż geometryczne  $g(t) = d^t$ . Spektakularny przykład numeryczny, który podał Harvey, dotyczy sytuacji, kiedy stopa dyskontowa wynosi 10% (w skali roku). Zdyskontowana w sposób klasyczny wartość (dzisiejsza) wyniku, równego nominalnie dzisiejszemu, po okresie 100 lat jest 14 000 razy mniejsza od nominału. Dyskontowanie hiperboliczne o identycznej stopie początkowej (następnie – „programowo” malejącej) prowadzi do wyceny jedynie 11 razy „mniej ważnej” za 100 lat niż obecna.

O'Donoghue i Rabin [1999] podają następujący przykład. Decydenci stojący na początku lutego przed wyborem wykonania nieprzyjemnego zadania, które ma im zająć 7 godzin (np. wypełnienie PIT-u) w dniu 15 kwietnia albo takiego samego typu zadania przez 8 godzin w dniu 30 kwietnia, będą w większości preferowali pierwszy wariant. Postawieni wobec tej alternatywy tuż przed 15 kwietnia na ogół zmieniają swoje preferencje. Zakładając, milcząco, ciągłość (w czasie) owego „mentalnego” eksperymentu, dochodzi się do wniosku o istnieniu takiej chwili, w której podmiot decyzyjny jest indyferentny w stosunku do przedstawionych wariantów – hiperbole ich dyskonta się przecinają.

Dasgupta i Maskin [2005] podają przykład „dyskontowania instynktowego”. Kos decyduje się „zawisnąć” nad krzakami malin w oczekiwaniu na moment, kiedy dojrzeją. W międzyczasie maliny mogą jednak paść łupem stada wron, które „nie wybrzydząc” zjedzą wszystkie owoce. Kos musi przeprowadzić na bieżąco rachunek kosztów i korzyści, dyskontując wartość (kaloryczną) owoców  $V$  w stosunku do zagrożenia przylotem wron: jego „naturalną” stopą dyskontową może być tzw. stopa hazardowa dla „procesu nalotów wron”, czyli (w chwili  $t$ ) prawdopodobieństwo warunkowe przybycia wron w przedziale  $\Delta t$  czasowym  $(t, t + \Delta t)$  podzielone przez długość przedziału  $\Delta t$ . Tylko dla poissonowskiego procesu „odwiedzin przez wrony” ta stopa jest stała, co „upoważniałoby kosa” do dyskontowania wykładniczego wartości  $V$ , wyceniającego wartość obecną jako  $e^{-rt}V$ . Bardziej realistyczne wydaje się jednak rozważanie zmiennej (zależnej od czasu) stopy  $r(t)$ . Jej malenie może, po części, wiązać się z kosztami alternatywnymi (zmęczenie organizmu). Tak więc instynkt może w pewnej chwili zmusić (niewykształconego w zakresie teorii dyskontowania) kosa do odlotu.

Na jeszcze inny aspekt wyceny strumieni wielkości w czasie zwraca uwagę Asheim [1996]. Załóżmy, że kolejne pokolenia „biorą sobie do serca” ogólne wytyczne trwałości rozwoju, zarządzają kapitałem oraz zasobami naturalnymi zgodnie z subiektywnymi preferencjami, które z kolei „rekomendują” pewien stopień altruizmu w stosunku do potomnych. Okazuje się, że – wbrew intencjom decydentów – ów altruizm może nie wystarczyć do zagwarantowania przyszłym pokoleniom bezpieczeństwa ekonomicznego. Załóżmy, że subiektywny dobrobyt generacji  $t$  (czyli  $w_t$ ) zależy od poziomu jego własnej „użyteczności statusu” ( $u_t$ ) oraz – w pewnym stopniu – od subiektywnego (odczucia) dobrobytu przez jej bezpośrednich potomków:

$$w_t = u_t + bw_{t+1} \quad 0 < b < 1 \quad (1)$$

łatwo zauważyć, że powyższa rekurencja prowadzi do określenia *explicite* poziomu dobrobytu:

$$w_t = \sum_{s=t}^{\infty} b^{s-t} u_s. \quad (2)$$

Jest to formuła zdyskontowanej utylitarystycznej wyceny (o której będzie mowa w następnym punkcie), która ewidentnie zaniża znaczenie użyteczności (statusu) przyszłych pokoleń w stosunku do obecnego.

## 2. P. Samuelson, T.C. Koopmans i R. Strotz

Celowe wydaje się krótkie odniesienie się do wydarzeń naukowych o kapitalnym dla rozwoju badań w omawianym obszarze znaczeniu i ich wybitnych animatorów. Bez wątpienia rolę takich „kamieni milowych” odegrały w XX w. prace: Samuelsona [1937], Koopmansa [1960] oraz Strotza [1955]. Pierwsze dwie z nich wyznaczyły paradygmat filozofii wyceny i rangowania projektów wielookresowych, a trzecia podważyła ten paradygmat. Dały początek wielowątkowej teorii – w obiegowym słownictwie przedmiotu używa się terminu „dyskontowy paradygmat Samuelsona”, a badania w zakresie ewaluacji i dyskontowania strumieni rozdziela cezura lat 1955-60: na „erę przed Koopmansem i Strotzem oraz po nich”.

Rozważmy przestrzeń  $X$  nieskończonych ciągów elementów z pewnego wypukłego podzbioru  $C$  przestrzeni  $R^n$  ( $C$  może być dowolną, ośrodkową, spójną przestrzenią topologiczną, co umożliwi wiele interpretacji natury badanych strumieni  $X$  [Bleichrodt i in. 2008]):

$$X = \{x : x = (x_t; t \in T, x_t \in C)\} . \quad (3)$$

Niech dana będzie funkcja („użyteczności chwilowej”)  $u: C \rightarrow R$  rosnąca i wklęsła. Symbolem  $U$  oznaczmy zbiór wszystkich rzeczywistych ciągów  $u = (u_t)$ , gdzie  $u_t = u(x_t)$  (dla pewnego  $t \in T$ ):

$$U = \{u : u = (u_t; t \in T)\} . \quad (4)$$

Na oznaczenie „czasu” przyjęto symbol  $T$ . W omawianym przypadku  $T = N$  lub  $T = N_+$ , (w wersji ciągłej, do której będziemy się incydentalnie odwoływać  $T = \langle 0, \infty \rangle$  lub  $T = \langle 0, T \rangle$ ).

Ogólna postać (separowalnego addytywnie) funkcjonału wyceny (dyskontującego) jest następująca:

$$U(x) = \sum_{t \in T} d(t) u(x_t) , \quad (5)$$

gdzie  $d$  jest dowolną funkcją rzeczywistą („czasu”  $t$ ), a szereg po prawej stronie równości jest bezwzględnie zbieżny. Od pojawienia się pracy Samuelsona [1937] rangę kanonu dyskontowania (strumieni z  $X$ ) zyskała formuła tzw. zdyskontowanego utylitarystycznego (DU) funkcjonału:

$$U(x) = \sum_{t \in T} d^t \cdot u_t , \text{ gdzie } 0 < d < 1. \quad (6)$$

Jest on dobrze określony co najmniej dla ograniczonych funkcji użyteczności. W tak zwanej wersji ciągłej sumę zastępuje całka odpowiadająca ciągłemu oprocentowaniu (złożonemu):

$$U(x) = \int_T e^{-\delta t} u(x_t) dt, \quad 0 < \delta < 1. \quad (6a)$$

W obydwu przypadkach z definicji stosunek  $\frac{d(t+1)}{d(t)}$  (lub  $\frac{d'(t)}{d(t)}$ ) jest stały, stała jest stopa dyskontowa, stała (stacjonarna) tzw. stopa niecierpliwości. Zgodność („logiczna” i „analityczna”) powyższej procedury ewaluacyjnej wyraża się niezależnością „siły” dyskontowania od początku przedziału dyskontowania. Nie zależy od czasu oczekiwania na rozpoczęcie procesu dyskontowania. Zależy jedynie „addytywno-muptykatywnie” od długości przedziału dyskontowania:

$$d^t \cdot d^s = d^{t+s}; \quad e^{-\delta t} \cdot e^{-\delta s} = e^{-\delta(t+s)}. \quad (7)$$

Przypomnijmy, że funkcje wykładnicze są jedynymi funkcjami o tej własności (w rodzinach ciągów oraz funkcji ciągłych).

Niezależnie od regularności analitycznej i „zdroworozsądkowej” techniki kalkulacyjnej dyskontowanie DU nie miało „pierwotnego umocowania” w filozofii rangowania strumieni użyteczności. Lukę tę wypełniła znamienna praca Koopmansa [1960], w której podano aksjomatyzację preferencji w przestrzeni ciągów „użyteczności chwilowych”, implikującą własności „stacjonarno-wykładnicze” dyskonta.

Aksjomaty Koopmansa dotyczyły własności relacji preporządku w przestrzeni liczbowych ciągów (nieskończonych) i odzwierciedlały intuicyjne postulaty: tzw. separowalności wszystkich okresów oraz stacjonarności (pojęcia te będą uściślone poniżej). Pierwszy z nich jest utrzymany w duchu aksjomatu niezależności [von Neuman-Morgenstern 1944], stanowiącego fundament ich aksjomatyki oczekiwanej użyteczności oraz jego odpowiednika w „subiektywnym” wariacie Savage’a [1954] – „*sure things principle*”. Drugi oznacza niezależność relacji między dwoma dowolnymi ciągami od ich początkowych odcinków, jeśli są one – na tych segmentach – identyczne.

Bleichrodt i in. [2008] uściślili i uprościli aksjomatykę Koopmansa oraz uogólnili jego twierdzenie o istnieniu (takich) preferencji i ich reprezentacji DU (uściślenie dotyczyło doprecyzowania dziedziny relacji oraz kwestii ograniczoneści funkcji użyteczności „brzegowych”). Poniżej zrelacjonujemy w syntetycznej formie tę (zmodyfikowaną) konstrukcję. Nie ma oczywiście sensu w każdym wzmiankowanym przypadku referować detali koncepcji autorów. Wyjątek od



reguły czynimy w tym artykule trzykrotnie – dla pomysłów (i wyników) o szczególnym znaczeniu dla omawianej tematyki.

Rozważa się przestrzeń  $X$  programów (konsumpcji) wprowadzoną już w poprzednim punkcie, we wzorze:  $x \in X \Leftrightarrow x = (x_1, x_2, \dots)$ ,  $x_k \in C$ . Dla zadanej w  $X$  relacji  $\succcurlyeq$ , preporządku liniowego (relacja przechodnia i zupełna), jej część asymetryczną oznacza się tradycyjnie symbolem  $\succ$ , symetryczną – symbolem  $\sim$ , dziedzinę – symbolem  $F$ .

Mówi się, że w  $F$  jest określona zdyskontowana użyteczność, jeśli istnieją: funkcja (użyteczności)  $u : C \rightarrow R$  oraz czynnik dyskontujący  $\rho \in (0, 1)$  takie, że każdy program  $x \in F$  jest wyceniany według wzoru:

$$DU(x) = \sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t-1} u(x_t), \quad (6b)$$

szeregi powyższe są sumowane, a wartości ich sum (dla ustalonych  $x$ ) nazywa się zdyskontowanymi użytecznościami (DU) strumieni  $x$ ; strumienie o większej wartości DU są – z definicji – przedkładane nad strumienie o mniejszej DU.

Przyjmuje się następujące umowy co do oznaczeń. Dla strumienia  $x = (x_1, x_2, \dots)$  oraz (jednookresowej) konsumpcji  $\alpha \in C$   $\alpha x = (\alpha, x_1, x_2, \dots)$  (konsekwentnie:  $\alpha\beta x = (\alpha, \beta, x_1, x_2, \dots)$ ). Preferencje (indukowane przez relację „globalną”) w zbiorze konsumpcji  $C$  są – z definicji – zgodne z preferencjami w całej dziedzinie:  $\alpha \succcurlyeq \beta \Leftrightarrow (\alpha, \alpha, \dots) \succcurlyeq (\beta, \beta, \dots)$ . Preferencje nazywają się monotoniczne, jeśli z zachodzenia relacji  $x_t \succcurlyeq y_t$  ( $\forall t \in 1, 2, \dots$ ) wynika zachodzenie relacji  $x \succcurlyeq y$ . Jeśli ponadto dla pewnego  $t$  jest  $x_t \succ y_t$ , to także  $x \succ y$ . Preporządek  $\succcurlyeq$  jest „wrażliwy na preferencje terażniejsze” (w pierwszym okresie), jeżeli istnieją także  $\alpha, \beta \in C$  oraz  $x \in X$ , że  $\alpha x \succ \beta x$ . Dzięki temu eliminuje się trywialny przypadek – indyferencji (wzajemnej) wszystkich programów z  $F$  oraz całkowite pominięcie wagi pierwszego okresu. Uściślenie wspomnianego wcześniej aksjomatu niezależności (separowalności) wyraża się równoważnością:

$$\alpha\beta x \succcurlyeq \gamma\delta x \Leftrightarrow \alpha\beta y \succcurlyeq \gamma\delta y, \quad (8)$$

dla wszystkich programów  $x, y$  oraz „konsumpcji brzegowych”  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ . Warunek ten wyraża niezależność skutków modyfikacji ciągów na dwóch pierwszych miejscach od całej przyszłej konsumpcji. Tę separowalność można przenieść na dowolne segmenty strumieni.

Jeśli wszystkie okresy są separowalne, to preferencje spełniają warunek łącznej niezależności. Z kolei warunek stacjonarności preferencji formalizuje poniższa równoważność:

$$\alpha x \succ \alpha y \Leftrightarrow x \succ y \quad (9)$$

dla wszystkich programów  $x, y \in F$  oraz wszystkich  $\alpha \in C$ .

W konsekwencji dla określenia preferencji między programami wystarczy rozważać podprogramy zaczynające się od pierwszych wyrazów, które są różne – w wyjściowych ciągach. Program nazywa się  $T$ -prawie stały, jeśli istnieje indeks  $T \in N_+$  taki, że  $x = (x_1, x_2, \dots, x_T, \alpha, \alpha, \dots)$ . Dla ustalonego  $T$  zbiór takich programów oznacza się symbolem  $X_T$ : łatwo zauważyć zbiór  $X_T$  wyznaczony jest  $T+1$ -wymiarowy produkt zbiorów  $C$  (utworzony z wektorów w postaci  $(x_1, \dots, x_T, \alpha)$ ). „Skończoną – prawie ciągłość” relacji  $\mu$  definiuje się jako koniunkcję warunków ciągłości każdego jej zawężenia do zbioru  $X_T$  (godne podkreślenia jest sprowadzenie rozważań natury topologicznej do „przypadków skończenie wymiarowych”).

A oto pozostałe definicje pomocne przy sformułowaniu aksjomatyki Koppmansa oraz twierdzenia o reprezentacji DU. Program  $x \in F$  spełnia warunek „równoważności ze stałą”, jeśli istnieje równoważny z nim program stały  $x \sim (\alpha, \alpha, \alpha, \dots)$ . Program  $x \in F$  jest „odporny na zachowanie w odległej przyszłości” (tail-robust), jeśli dla wszystkich wyników  $\beta \in C$  zachodzi implikacja:

$$x \succ \beta \ (x \prec \beta) \Leftrightarrow \exists T \in N_+ \ x_T \beta \succ \beta \ (x_T \beta \prec \beta) \ \forall t > T. \quad (10)$$

Twierdzenie ([Bleichrodt i in. 2008] „Preference Axiomatization for Discounted Utility”).

Niech relacja  $\mu$  będzie określona na dziedzinie  $F$  zawierającej wszystkie prawie stałe programy. Następujące stwierdzenia są równoważne:

- i. na  $F$  jest określona zdyskontowana użyteczność, przy czym funkcja użyteczności  $u$  jest ciągła i nie jest stała,
- ii. relacja  $\mu$  spełnia poniższe warunki:
  - a)  $\mu$  jest preporządkiem wrażliwym na preferencje terazniejsze, skończenie prawie ciągłym,
  - b)  $\mu$  spełnia warunki równoważności ze stałą oraz odporności na odległą przeszłość,
  - c)  $\mu$  ma własność separowalności dwóch początkowych okresów i stacjonarności.

Twierdzenie Koopmansa usankcjonowało paradygmat DU od strony formalnej. Niemniej jednak w tej samej pracy Koopmans [1960] sformułował dwa fundamentalne pytania dotyczące istnienia tzw. etycznych preferencji i ich reprezentacji. Zaczniemy od dwóch definicji.

A. Relacja preferencji  $\succsim$  określona w dodatnim stożku:

$$L_t^\infty = \{x = (x_0, x_1, \dots) : x_t \geq 0, \forall t \in N, \sup x_t < \infty\} \quad (11)$$

nazywa się (skończenie) międzypokoleniowo bezstronną (symetryczną, niezmienniczą, anonimową), jeśli dla każdej permutacji  $\pi_f : L_+^\infty \rightarrow L_+^\infty$ , niezmienniczej dla prawie wszystkich współrzędnych („pokoleń”) i dla wszystkich  $x, y \in L_+^\infty$ :

$$x \succsim y \Leftrightarrow \pi_f(x) \succsim \pi_f(y). \quad (12)$$

B. Relacja preferencji  $\mu$  w przestrzeni dodatnich, ograniczonych ciągów ( $L_+^\infty$ ) nazywa się słabo monotoniczna (Pareto-efektywna, PA), jeśli zachodzi implikacja:

$$(\forall t \in N \ x_t > y_t) \Leftrightarrow x \succ y. \quad (13)$$

Relacja spełniająca powyższe dwa postulaty (lub ich modyfikacje w kierunku „zwarianowania” Pareto-efektywności) nazywa się relacją międzypokoleniowego, społecznego dobrobytu (używa się także syntetycznej nazwy: „preferencje etyczne” – terminologię tę utrwalił G. Asheim [1996]).

Dwa pytania Koopmansa brzmiały: czy istnieją (w  $L_+^\infty$ ) preferencje etyczne, a jeśli tak, to czy mają rzeczywistą reprezentację, czyli („agregujący historię”) funkcjonal wyceny, nazywany też międzypokoleniowym funkcjonalem dobrobytu społecznego. Postawienie tych kwestii przyczyniło się do intensyfikacji badań teoretycznych, wpisujących się w ogólniejszy nurt tematyki sprawiedliwości międzypokoleniowej oraz trwałości rozwoju (niektórzy autorzy utożsamiają te subdyscypliny [Fiedor 2007]). Bardzo szerokie spektrum tej tematyki obejmowało ogólne, filozoficzno-etyczne polemiki dotyczące samej istoty, interpretacji i „operacjonalizacji” kategorii sprawiedliwości – w kontekście społecznej sprawiedliwości dystrybtywnej [Rybicki 2009, 2010a], ale także wolności wyboru [Sen 1988] oraz „imperatywu zasłony niewiedzy” Kanta-Rawlsa [1970], mającej gwarantować „sterylny” warunki realizacji procesów wyboru, decyzji i podziału, nieskażone świadomością podmiotu o jego położeniu (pozycji w społeczeństwie, w czasie). Pomimo iż filozoficzna koncepcja „totalnej anonimowości dla sprawiedliwości” nie była wolna od pewnych wad natury lo-

giczno-formalnej, jej konsekwencja kwantytatywna (czyli tzw. kryterium „lexyminu”, też krytykowane – paradoksalnie – za „asymetrię” w traktowaniu jednostek czy pokoleń) zyskała wielu zwolenników, a w zmodyfikowanych wersjach weszła do kanonu metod ewaluacji strumieni użyteczności [Sakai 2003; Basu, Mitra 2003; Alcantud, Garcia-Sanz 2010]. Propozycję implementacji tej zasady do zagadnień teorii wzrostu gospodarczego podał m.in. Solow [1974] w pracy przedstawionej w trakcie słynnego sympozjum poświęconego teorii wzrostu w warunkach ograniczonych zasobów, co było niezwykle radykalne. W cytowanej wyżej pracy z 1996 r. G. Asheim stwierdził: „with resource constraints it seems right for Solow (1974) to be >plus Rawlsian que le Rawls<”. „Jego” preferencje etyczne w zbiorze użyteczności ścieżek wzrostu porządkowały je pod kątem porównań wartości użyteczności najsłabszych generacji ( $\inf_{t \geq 1} u_t$ ). W klasycznym modelu wzrostu (z ograniczonymi zasobami) Dasgupty-Heala-Solowa („DHS”: synteza prac [Dasgupta, Heal 1974] oraz [Solow 1974] ze wspomnianego sympozjum z 1974 r.) kryterium to prowadzi do całkowicie egalitarnych, stagnacyjnych (constans) ścieżek wzrostu [Asheim 1996]. Całe ostatnie półwiecze obfitowało w badania nad możliwościami formalnego pogodzenia – przeciwnych w gruncie rzeczy – postulatów Koopmansa. W następnym punkcie naszkicowano dwie propozycje modelowe w tym zakresie.

Ogólnie rzecz biorąc, ustalenia teoretyczne były ambiwalentne. Od pracy Diamonda [1965], w której autor podał negatywną odpowiedź na pytania Koopmansa, w przypadku jeśli żąda się ciągłości preferencji w metryce jednostajnej, we wszystkich pracach „balansowano” pomiędzy różnymi odcieniami założeń bezstronności (m.in. rozważano niezmienniczość preporządków względem różnych podklas przestrzeni wszystkich permutacji indeksów [Lauwers, Liedekerke 1997; Basu, Mitra 2002; Banerjee 2008; Alcantud, Garcia-Sanz 2010] oraz efektywności (a’la Pareto), rezygnowano też z postulatów o charakterze topologicznym [Basu, Mitra 2003]), co prowadziło do rozmaitych wyników. Wszystkie miały charakter cząstkowy i warunkowy, większość – negatywny lub niekonstruktywny. Kwestie te zostały ostatnio wyjaśnione na gruncie pogłębionej analizy formalnej [Lauwers 2010; Żylicz 2001], o czym będzie mowa dalej.

Czasem drobne modyfikacje założeń prowadziły do przeciwnych konkluzji (np. [Alcantud, Garcia-Sanz 2010]), czasem „sprytny” ich dobór zapewniał istnienie międzypokoleniowej relacji społecznego dobrobytu, wykluczając jednocześnie możliwość rzeczywistej („jednowymiarowej”) reprezentacji tych etycznych preferencji (por. np. [Basu, Mitra 2003]). Dość obszerną bibliografię kierunków rozwoju i postępów badań w tym obszarze zawierają prace [Rybicki

2009, 2010b, 2011]. G. Chichilnisky zamieściła w pracy [Chichilnisky 1997] krytyczny przegląd „jednowymiarowych” kryteriów (czasem przybierają one postać sekwencyjnych procedur porównywania określonych wskaźników), generujących preporządki w przestrzeniach ciągów (por. także [Rybicki 2011; Asheim 2010]). Konstrukcja takich kryteriów również odzwierciedla aspekty sprawiedliwości, niecierpliwości i uprzywilejowania określonych generacji. Tu podstawową osią kontrowersji – zarówno w planie filozoficznym, jak i formalno-matematycznym – jest kwestia interpretacji obiektywizmu. Utylitarystyczne, pozornie „obiektywne” kryterium Ramseya – sumowania szeregów użyteczności bez wag (zerowa stopa dyskontowa) oraz jego mutacja – skumulowanych odległości od błogostanu („bliss”) [Asheim 1996], zdecydowanie krzywdzą pierwsze pokolenie:

$$\sum_{t=1}^{\infty} u_t; \quad \sum_{t=1}^{\infty} (b - u_t). \quad (14)$$

W podobnej „ideologii” jest skonstruowane kryterium zaspokojenia podstawowych potrzeb, autorstwa Chichilnisky [1977], które rekomenduje porównywanie liczebności sum częściowych szeregów użyteczności, przekraczających po raz pierwszy ustalony poziom. Wszelkie kryteria są obarczone pewnymi defektami: czy to w sferze racjonalności, czy też formalnej (sumowalność szeregów użyteczności), czy też z powodu dyskryminacji (w wycenie) znaczenia pokoleń współczesnych albo przyszłych. W świetle uwag poczynionych wcześniej, odnoszących się do niekonstruktywnego charakteru ustaleń „o istnieniu” etycznych preferencji, warto przypomnieć koncepcję von Weizseckera [1965] tzw. kryterium doganiania (*over-taking, catch-up-criterion*): wyżej są wyceniane strumienie, których prawie wszystkie (skończone) sumy częściowe są większe. Kryterium to generuje, oczywiście, preporządek częściowy i wydaje się być „wymyślone ad hoc”. W 1970 r. Brock podał aksjomatyczne umocowanie tej techniki. Idea rozszerzania subrelacji na wstępujących rodzinach skończonych podciągów przestrzeni wszystkich ciągów (w najprostszym przypadku: rzeczywistych, dodatnich i ograniczonych) była kilkakrotnie podejmowana (por. np. [Lauwers 1995; Asheim i in. 2010b; Sakai 2010]). Jest to chyba jedyna metodyka oferująca konstruktywne rozwiązania tej klasy zadań (por. [Sakai 2010]).

Z tak zwanych wyników pozytywnych na uwagę zasługują ustalenia zawarte w pracy Banerjee, Mitra [2007] (por. także [Asheim i in. 2010a]). Autorzy tej pracy rozpatrują „swój” warunek niecierpliwości dla programu  $x$  (a’la Koopmans). Wyraża on („z grubsza”) wyższą wycenę strumieni, konsumpcji, w których para wyrazów o własności „większe  $x_i$  występuje wcześniej niż mniejsze  $x_j$ ” przesądza

o przewadze nad strumieniem, w którym ta para pojawia się w odwrotnej kolejności. Ponadto (również wzorując się na wspomianej już idei Von Neumanna-Morgensterna, Savage'a oraz Koopmansa) zakładają niezależność preferencji indukowanych „na fragmencie strumienia” od dopełniczych przebiegów (o ile są one identyczne). Przywołani autorzy otrzymują mocne, ciekawe wnioski:

1) jeśli relacja  $\succsim$  jest paretowska, to zbiór strumieni spełniających warunek niecierpliwości jest mocy continuum,

2) jeśli relacja  $\succsim$  jest paretowska na zbiorze  $X = \langle 0; 1 \rangle^N$  z metryką Czebyszewa ( $d$ ), to zbiór ten jest gęstym podzbiorem przestrzeni metrycznej  $(X, d)$ .

Słowami: w przestrzeni ciągów ograniczonych jest „bardzo dużo” programów, w których przedkłada się wcześniejszą realizację większej wartości nad późniejszą. Jeśli rozpatrzmy tylko ciągi o wyrazach z odcinka  $\langle 0; 1 \rangle$ , to zbiór ten „wypełnia” prawie całą przestrzeń. Są to mocne argumenty (dla racjonalnych „paretowskich”) podmiotów, między innymi dla agitacji za paradygmatem DU. Jednak dopełnienia zbiorów, o których mowa w twierdzeniu, też mogą być mocy continuum oraz gęste.

Spory „kłopot” sprawiło odkrycie Strotza [1955], którego istotą jest zaniegowanie – na gruncie empirii – „ideologii” DU, wraz z wykazaniem niezgodności dynamicznej rzeczywistych preferencji, oraz pionierskie ustalenia w zakresie dyskontowania hiperbolicznego. W tym miejscu ograniczymy się jedynie do przytoczenia jednego z oryginalnych kontrprzykładów R. Strotza.

Na początku roku kalendarzowego wielu ludzi planuje zachować określone środki finansowe na okolice Bożego Narodzenia. Jednak w miarę upływu czasu (w lecie) pojawia się okazja wydania części z nich na wakacje i wielu z nich decyduje o zmianie przeznaczenia tych pieniędzy. Następnie rozpoczyna się rok szkolny i znów ludzie zmieniają (co najmniej modyfikują) pierwotne preferencje i wydają część pieniędzy na wyposażenie szkolne („wyprawka” oraz odzież). Tak więc stają się bardziej niecierpliwi niż w styczniu. Stopa niecierpliwości (stopa dyskonta) „kurczy się”, gdy czas do realizacji jest większy (w rozpatrywanym przypadku musimy „podążać za czasem wstecz”), jej zmienność skutkuje odwracaniem zwrotu preferencji, co z kolei znajduje wyraz w hiperbolicznej (odwrotnie proporcjonalnej do czasu) funkcji dyskontującej [Dasgupta, Maskin 2005; Strotz 1955].

W jeszcze większą „konfuzję” może wprowadzić argumentacja prowadzona na gruncie teorii wzrostu. Asheim [1996] przedstawił fundamentalną – zarazem klarowną – krytykę metodyki dyskonta geometrycznego w kontekście modelu DHS. Poniżej przytoczono cytaty z pracy Asheima i Mitry [2010], w którym autorzy „streszczają” owo uzasadnienie: „When applied to some models of economic growth, DU leads to seemingly unappealing consequences. In particular, in model of capital accumulation and resource depletion first analyzed by

Dasgupta and Heal [1974] and Solow [1974] (...) the application of DU forces consumption to approach zero as time goes to infinity, even though sustainable streams with constant or increasing consumption are feasible. Moreover, this result holds for any discount factor  $\delta$  smaller than one; even when  $\delta$  is close to one so the discounting is small (...) when applied to DHS model, the use of DU undermines the livelihood in the far future also when each generation is given almost the same weight as its predecessor”.

### 3. Etyczne preferencje w przestrzeniach ciągów i ich reprezentacje – wybrane modele i dyskusja

Nie tylko modyfikacje, stopniowanie „siły” warunków sprawiedliwości oraz efektywności, ale także ustalanie zbiorów wartości chwilowych użyteczności doprowadziły w ostatnim dwudziestolecu do sformułowania licznych ustaleń (często ambiwalentnych, jak już wspomniano), odnoszących się do kwestii istnienia i (ewentualnej) reprezentacji liczbowej etycznych preferencji. Można mówić o „naukowej batalii” o osiągnięcie formalno-metodologicznego kompromisu w poszukiwaniu „słusznej, dalekowzroczej” wyceny rzeczy i procesów – na kształt „iustum pretium” św. Tomasza z Akwinu, we współczesnym, międzypokoleniowym „kostiumie ekonomiczno-matematycznym”. Poniżej zasygnalizowano niektóre sprzeczności w godzeniu podstawowych postulatów, próby „ominięcia” tych sprzeczności, a także stwierdzenia (odwołujące się do podstaw matematyki) wyjaśniające istotę kłopotów z „trade-off” między „efficiency” a „equity”.

Svensson [1980] wykazał istnienie w zbiorze ciągów rzeczywistych z odpowiednio zdefiniowaną metryką (por. także [Rybicki 2010a; Żylicz 2001] relacji preferencji etycznych, ciągłych w „jego” metryce, a Bossert i in. [2007] wzmocnili jego wynik (dodając postulat spełniania zasady transferów Pigou-Daltona lub „sprawiedliwości Hammonda” [Hammond 1976]). Przywołane twierdzenia miały tezy stricte egzystencjalne oraz niekonstruktywne dowody: w kluczowych punktach korzysta się z twierdzenia E. Szpilrajna [1930] o istnieniu rozszerzenia (pre)porządków częściowych do liniowych (zupełnych), które z kolei bezpośrednio zależy od aksjomatu wyboru (ewentualnie lematu Zorna). Analogiczna – w przypadkach „pozytywnych rozstrzygnięć” – jest idea rozumowań prowadzonych w bardzo ważnych pracach [Basu, Mitra 2003; Banerjee 2006], w których nie rozważa się topologii w  $X$ . Bardzo ciekawe są w tym kontekście mocno sceptyczne ustalenia z artykułu Zame [2007]. Wykazano tam, że:

a) każda relacja preferencji etycznych (spełniających warunek PA) jest „bardzo niezupełna”: prawie wszystkie (w sensie miary zewnętrznej) pary strumieni użyteczności są indyferentne,

b) jeśli nawet zrezygnujemy z wymogu zupełności i warunku PA, to okazuje się, że dla każdej przeciwwrotnej relacji (w zbiorze strumieni użyteczności) prawie wszystkie pary są nieporównywalne,

c) żadna relacja preferencji etycznych nie jest mierzalna (jako podzbiór kwadratu kartezjańskiego  $Y^N \times Y^N$ ); w konsekwencji istnienie takich (powszechnie akceptowalnych – z perspektywy budowy modeli teorioeconomicznych) relacji jest niezależne od tzw. aksjomatu zależnego wyboru (fundamentalnego dla aksjomatyki Zermelo-Fraenkla); wreszcie jeśli taka relacja istnieje, to nie może być *explicite* zdefiniowana.

Postawiono też problem związku istnienia preferencji etycznych z tzw. zbiorami Ramseya [Lauwers 2010; Fleurbaey, Michel 2003]. W pracy z 2010 r. L. Lauwers scharakteryzował te związki. Podstawowa teza tej pracy (w nieco „zbeletryzowanej” wersji) brzmi: skończenie permutacyjne bezstronne i paretowska relacja preporządku w zbiorze nieskończonych ciągów zero-jedynkowych albo jest niezupełna, albo jest „obiektem niekonstruktywnym” (co pociąga za sobą niemożność podania jej – *explicite* – opisu). Autor wykazuje też związki między istnieniem etycznych preferencji a ultrafiltrami [Luwers 2010; Kulpa 2009] oraz zbiorami nieramseyowskimi [Ramsey 1928; Mathias 1977].

W cytowanej wyżej pracy Lauwers trawestuje opinię H. Weila o niekonstruktywnych tezach w matematyce: „the world is informed about a treasure (a finite anonymous and Paretian ordering) and about the fact, that – with certainty – no one will ever disclose its location”!

W licznych pracach widać wyraźnie współzależności wspomnianych na wstępie odcieni założeń. Tak zwany słaby aksjomat Pareta (Weak Pareto Axiom – WPA) w wersji [Basu, Mitra 2003] ma następującą postać:

a) dla dowolnych strumieni  $x, y \in X$ , jeśli istnieje taki wskaźnik  $j \in N$ , że  $x_j > y_j$  oraz dla wszystkich  $k \neq j$ ,  $x_k \geq y_k$ , wówczas  $W(x) > W(y)$ ,

b) dla dowolnych  $x, y \in X$ , jeśli wszystkie współrzędne pierwszego strumienia są ostro większe od odpowiednich wyrazów w drugim strumieniu, ( $x \gg y$ ), to  $W(x) > W(y)$  ( $W$  oznacza międzypokoleniowy funkcjonal społeczny dobrobytu, czyli rzeczywistą reprezentację badanych preferencji, Social Welfare Functional – SWF). Alcantud i Garcia-Sanz [2010] pokazują, że jeśli zbiór wartości użyteczności chwilowych jest podzbiorem zbioru liczb naturalnych, to istnieje zarówno relacja spełniająca WPA oraz bardzo słabą formą anonimowości (niezmienniczość ewaluacji  $W$  względem permutacji dwuelementowych zbiorów wskaźników, przy pozostałych – odpowiednio – równych), jak i jej reprezentacja. Zastąpienie WAP jego mocniejszą wersją – „zwyczajnej” ścisłej monotoniczności  $W$  względem porządku Pareto (Pareto Axiom, PA), a przeciwdziedzi-



ny  $u$  dowolnym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych  $\mathbf{R}$  prowadzi do wyniku negatywnego – nieistnienia reprezentacji (funkcjonału SWF). Z kolei nawet ograniczenie zbioru wartości wyrazów ciągu do zbioru dwupunktowego  $\{0, 1\}$  nie „ratuje” tezy o istnieniu, podczas gdy zastąpienie PA przez WPA pozwala ją utrzymać przy dowolnym zbiorze wartości wyrazów ciągu (np.  $[0, 1]$ ). Nieco wcześniej Lauwers [1997] rozważał możliwość „godzenia” PA (w jego terminologii – strong *sensitivity*) z tzw. ścisłą neutralnością (bardzo mocna wersja bezstronności: niezmienniczości preferencji względem zbioru wszystkich permutacji indeksów, czyli wszystkich wzajemnie jednoznacznych odwzorowań całego zbioru liczb naturalnych  $N$  na siebie). Otrzymał – oczywiście – wynik negatywny, nawet dla najmniejszego, nietrywialnego zbioru wartości użyteczności  $\{0; 1\}$ .

Ważną rolę w relacjonowanym nurcie badań odgrywają definicje sprawiedliwości w ujęciu P. Hammonda. Tak zwany oryginalny postulat HE (Hammond Equity) sformułowany w pracy Hammonda [1976] został następnie – w pracach Lauwersa z lat dziewięćdziesiątych oraz Asheima i in. [2001] – zmodyfikowany pod kątem zastosowania w kontekście międzypokoleniowym (a także: większej czytelności).

A. Warunek (Lauwersa): „słabej wersji niesubstytucyjności” – Weak Non Substitutibility (WNS, por. także [Asheim i in. 2010b; Lauwers 1998]).

Dla każdych czterech wartości (wyrazów strumienia użyteczności)  $x, y, z, v$  zachodzi implikacja: jeśli  $v > z$ , to strumień (program) w postaci  $(x, z, z, z, \dots)$  nie jest preferowany nad (żaden) program  $(y, v, v, v, \dots)$ .

B. Warunek (Hammonda) – „sprawiedliwości wobec przyszłości” (Hammond Equity for Future, HEF [Asheim i in. 2010b; Alcantud, Garcia-Sanz 2010; Asheim, Mitra 2010]).

Dla dowolnych czterech wyrazów  $x, y, z, v \in Y$  (zbiór wartości funkcji użyteczności): jeśli  $x > y > v > z$ , to strumień (program) w postaci  $(x, z, z, \dots)$  nie jest preferowany nad (żaden) program  $(y, v, v, v, \dots)$ .

Należy podkreślić przyjmowane, implicite, założenie o tym, że „indykatory dobrobytu” (użyteczności) poszczególnych pokoleń można mierzyć przynajmniej w skali porządkowej raz, że ich poziomy można (sensownie!) porównywać w planie horyzontalnym – między generacjami. Warunek HEF wiąże się z porównywaniem „poświęcenia” jednego pokolenia z jednolitym zyskiem dla każdego z nieskończonego zbioru pokoleń, które są w gorszej sytuacji: jeśli poświęcenie przez obecne pokolenie (będące w lepszej sytuacji niż przyszłe) skutkuje zwiększeniem użyteczności wszystkich potomnych, to taki transfer jest (co najmniej słabo) preferowany (w stosunku do status quo). Asheim i in. [2010] podkreślają, w związku z tym, że „filozofia” HEF znajduje oparcie zarówno z pozycji egalitaryzmu, jak i utylitaryzmu. Pierwszy znaczący wynik na ścieżce

poszukiwań reprezentacji numerycznej (SWF) dla takiej wersji (formalnej) sprawiedliwości był jednak negatywny. Banerjee [2006] wykazał niemożliwość takiej reprezentacji dla ciągów o wyrazach z przedziału  $Y = \langle 0; 1 \rangle$  (nawet po zastąpieniu silnego wymogu efektywności PA przez słabą dominację (WPA)).

Z kolei Alcantud i Garcia-Sanz [2010], zastępując zbiór wartości  $Y$  zbiorem wszystkich liczb naturalnych, otrzymali wynik pozytywny – dla nieco „zaostrożonej” wersji HEF i silnego porządku Pareto. Godne podkreślenia jest także to, że ich twierdzenie ma charakter konstruktywny: podany jest algorytm konstrukcji SWF dla HEF<sup>+</sup> („ich zaostrożenia” HEF).

Jedną z najciekawszych propozycji ostatniego dwudziestolecia była koncepcja (i konstrukcja) [Chichilnisky 1996] tzw. trwałych (*sustainable*) preferencji. G. Chichilnisky sformułowała dwa postulaty natury etycznej: preferencje (i kryteria) nie powinny dyskryminować ani przyszłości, ani terażniejszości. W jej terminologii oznacza to wykluczenie (w procedurach ewaluacji i porównań strumieni) tzw. dyktatury terażniejszości oraz dyktatury przyszłości: „No Dictatorial Role of the Present” (NDP), „No Dictatorial Role of the Future” (NDF). Oto krótki zarys tej koncepcji – z pominięciem szczegółów technicznych. Punktem wyjścia jest przestrzeń wszystkich „osiągalnych” (*feasible*) „ścieżek konsumpcji”  $F$ , gdzie:

$$F \subset \{x : x = (x_g), g = 1, 2, \dots, x_g \in \mathbf{R}^n\}. \quad (15)$$

Konsumpcja dóbr jest tu rozumiana bardzo ogólnie, m.in. jako eksploatacja odnawialnych (nieodnawialnych) zasobów, wykorzystywanie kapitału (poddanego stałym procesom akumulacji oraz deprecjacji). Zakłada się istnienie rzeczywistej reprezentacji (użyteczności) kwantyfikującej status quo każdego pokolenia – jest to funkcja  $u: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ , taka, że zbiory jej wartości na elementach z  $F$  są ograniczone, a użyteczności poszczególnych pokoleń są porównywalne:

$$(\alpha) \sup(u_g(x_g))_{x_g \in \mathbf{R}^n} \leq 1.$$

Przebieg strumieni użyteczności jest oznaczona symbolem  $\Omega$ .

$$(\beta) \Omega = \{\alpha : \alpha = (\alpha_g), \alpha_g = u_g(x_g) \text{ } g = 1, 2, \dots; x \in F\} \subset \mathbf{L}^\infty.$$

„Poszukiwane” kryterium (funkcjonał SWF) powinien być rosnącą (w sensie WPA) funkcją:

$$(\gamma) W : \mathbf{L}^\infty \rightarrow \mathbf{R}^+.$$

Przyjmijmy następującą konwencję. Jest to para definicji:

( $\delta$ ) Teraźniejszą przestrzeni  $F$  nazywa się zbiór wszystkich „ $K$ -obcięć” strumieni z  $\Omega$ , czyli ciągów powstałych z elementów  $\Omega$  przez zastąpienie (w każdym z nich) wyrazów o indeksach wyższych od  $K$  zerami (pierwsze  $K$  wyrazów się nie zmienia);  $K \in N_+$ .

( $\varepsilon$ ) Przyszłością (przestrzeni  $F$ ) nazywa się zbiór wszystkich „ $K$ -ogonów” strumieni z  $\Omega$ , czyli ciągów, w których początkowe  $K$  wyrazów zastąpiono zerami, pozostawiając pozostałe bez zmian.

Teraźniejszość  $\Omega$  będzie oznaczana symbolem  $P(\Omega)$ , a przyszłość – symbolem  $F(\Omega)$ . Elementy  $P(\Omega)$  będą oznaczane symbolami  $\alpha^K, \beta^K$ ; elementy  $F(\Omega)$  – symbolami  $\gamma^K, \delta^K$ .

DEFINICJA 1 [Chichilnisky 1996]

( $\varphi$ ) Kryterium  $W$  ustanawia dyktaturę terażniejszości (DP), jeśli jest „wrażliwe” tylko na  $P(\Omega)$ . Formalnie: dla dowolnych dwóch strumieni użyteczności  $\alpha$  i  $\beta$ .

(DP)  $W(\alpha) > W(\beta) \Leftrightarrow \exists N = N(\alpha, \beta)$  takie, że jeśli  $K > N$ , to  $W(\alpha^K, \gamma_K) > W(\beta^K, \delta_K)$  „dla każdej pary  $\gamma, \delta$  – strumieni z  $\Omega$ ”, gdzie ciąg  $(\alpha^K, \gamma^K)$  powstaje przez „zestawienie  $K$ -obcięcia elementu  $\alpha$  z  $K$ -ogonem elementu  $\beta$ , co „wypełnia ich segmenty złożone z zer”.

( $\chi$ ) Kryterium  $W$  ustanawia dyktaturę przyszłości (DF), jeśli nie zależy od elementów z  $P(\Omega)$ , jest „wrażliwe” tylko na  $F(\Omega)$ . Formalnie: dla dowolnych dwóch strumieni  $\alpha, \beta \in \Omega$ .

(DF)  $W(\alpha) > W(\beta) \Leftrightarrow \exists N = N(\alpha, \beta)$ , takie, że jeśli  $K > N$ , to  $W(\gamma^K, \alpha_K) > W(\delta^K, \beta_K)$  dla każdej pary  $\gamma, \delta$  – strumieni z  $\Omega$ .

AKSJOMATY CHICHILNISKY (ACH)

Preferencje w  $\Omega$  są indukowane przez SWF (kryterium  $W$ ), która nie może mieć własności DP ani DF.

DEFINICJA 2 [Chichilnisky 1996]

Preferencje:

( $\kappa$ ) które spełniają ACH,

( $\lambda$ ) których reprezentacja rzeczywista  $W : \Omega \rightarrow R$  jest funkcją rosnącą – „słabo paretowską” (spełnia WAP), nazywa się preferencjami trwałego (zrównoważonego) rozwoju (*sustainable preferences*, SP).

TWIERDZENIE [Chichilnisky 1996]

Istnieje relacja SP na przestrzeni  $F$  i jest ona reprezentowana przez kryterium  $W_{SP}^{CH}$  określone wzorem:

$$W_{SP}^{CH}(u) = \sum_{g=1}^{\infty} \lambda_g u_g + \Phi(u), \quad (16)$$

gdzie  $\lambda_g > 0$ ,  $\forall_g \in N_+$ ,  $\sum_{g=1}^{\infty} \lambda_g < \infty$ , a uogólniona granica  $\Phi(u) = \lim_g(u_g)$  jest rozszerzeniem do  $l_\infty$  (via twierdzenie Hahna-Banacha) funkcjonału „zwykłej granicy”.

KRYTERIUM CHICHILNISKY (ważonej sumy DU oraz GL użyteczności przyszłych pokoleń)

Rodzina kryteriów – funkcjonałów dyskontujących, zdefiniowanych wzorami:

$$W_{SP}^{CH}(\alpha; u) = \alpha \sum_{g=0}^{\infty} \frac{u_g}{(1+r)^g} + (1-\alpha) \lim_g(u_g); \alpha \in \langle 0; 1 \rangle \quad (17)$$

indukuje w  $\Omega$  preferencje trwałego rozwoju.

Komentarze:

1) „Filozofię dyskontowania” zawartą w propozycji G. Chichilnisky można (umownie) określić jako „zdyskontowany samuelsonowski utylitaryzm z szumem przyszłości”.

2) Arbitralność doboru wag ( $\alpha$ ) ma swoje zalety („elastyczność”) oraz wady tkwiące w każdym przypadku dopuszczającym arbitralność.

3) Alternatywne podejście, uwzględniające sprawiedliwość typu HEF, zaprezentowali w latach 2001, 2009, 2010, 2012 Asheim i inni. Syntezę ich koncepcji stanowią idee rekurencyjnych funkcjonałów dobrobytu społecznego [Asheim 2010b] oraz „zrównoważonego dyskontowania utylitarystycznego”, skwantyfikowane w formułach tzw. SDU SWF podanych w pracy [Asheim, Banerjee 2010], w której podano także (konstruktywny) dowód istnienia takich relacji i ich reprezentacji – spełniają one m.in. obydwie postulaty Chichilnisky (NDP, NDF) oraz postulat HEF.

W nurt ten wpisuje się także wzmiankowana wyżej praca [Alcantud, Garcia-Sanz 2010], która również zawiera algorytm wyceny. Konstrukcję kryterium dobrobytu (w kontekście sprawiedliwości międzypokoleniowej) podał też w pracy z 2010 r. T. Sakai. Jedną z najnowszych prac z omawianego nurtu jest artykuł

z 2012 r. autorstwa Asheima i Zuber [2012], w którym zastosowano bardzo interesującą, „egalitaryzującą” modyfikację koncepcji RDEU (*rank depend expected utility, anticipated utility*) J. Quiggina i M. Yaari’ego z lat osiemdziesiątych ubiegłego wieku [Quiggin 1982; Yaari 1987] – „ważenia” użyteczności kardynalnej (stanowiącej jądro całkowego funkcjonu oczekiwanej użyteczności) czynnikiem funkcyjnym, „deformującym” jej wartości w zależności od względnej ich wartości (pozycji, rang). „Rangowanie” Asheima-Zuber wyraża się w przyporządkowaniu „klasycznych” (geometrycznych) wag dyskontowych wyrazom uporządkowanego w rosnącej kolejności wycenionego ciągu użyteczności, a nie w jego „oryginalnym” porządku (w czasie). Zasadą autorów jest m.in. uogólnienie, na przestrzeń nieskończonych ciągów, metodyki konstrukcji funkcji dobrobytu społecznego J. Weymarka oraz U. Eberta z lat 1981 oraz 1988, odpowiednio [Weymark 1981; Ebert 1988], a’la Gini. Indukowane preporządki są częściowe, bo nie każdy ciąg nieskończony (użyteczności) daje się efektywnie przestawić do wymaganej przez ich kryterium postaci.

#### **4. Dyskontowanie: paradygmat P. Samuelsona v. rzeczywistość psychologii i ekonomia przetrwania**

„Pęknięcie” w spójnej i eleganckiej metodyce DU, dostrzeżone przez R. Strotza (także przez psychologów i biologów [Herrnstein 1961; Ainslie 1974]) spowodowało nie tylko intensyfikację badań w sferze cyzelowania własności preporządków w przestrzeniach ciągów użyteczności, ale przede wszystkim – w obrębie weryfikacji poczynionych spostrzeżeń niezgodności dynamicznej zachowań podmiotów i identyfikacji jej źródeł – poszerzenia spektrum. Głównym „konkurentem filozofii geometryczno-wykładniczej” (funkcji dyskontującej) okazało się tzw. dyskontowanie hiperboliczne. Idea tej formalizacji (popartej dokumentacją empiryczną) wyraża się w odwrotnej proporcjonalności wartości dyskonta i długości opóźnienia (czyli dystansu czasowego dzielącego „teraźniejszość” – aktualny moment wyceny od momentu wystąpienia ewaluowanego zdarzenia).

Poniżej przytoczono wybrane koncepcje formalne o „rodowodzie” ekonomicznym oraz psychologicznym (uwzględniające element niezgodności czasowej). W nurcie ekonomicznym za pionierskie (a zarazem mające znamiona uniwersalizmu) można uznać prace E. Phelps’a i R. Pollaka z 1968 r. oraz F. Kydlanda i J. Prescott’a z 1977 r. Z kolei w badaniach „zakotwiczonych” w psychologii i biologii eksponowano (i próbowano wyjaśniać) tzw. anomalie (niekonsekwencje, sprzeczności rozmaitej natury) wyboru międzyokresowego [Rachlin, Green 1972; Ainslie

1974; Thaler 1981; Mazur 1987; Prelec 2004]. Phelps i Pollak [1968] sięgają do modelowania teoriogrowego (gier powtarzalnych) i proponują stosować tzw. quasi-geometryczną (quasi-hiperboliczną) regułę dyskontowania. Czynnikiem dyskontującym  $d(t)$  występujący w ogólnej addytywnej reprezentacji funkcjonału dyskontującego ma postać:

$$d(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t = 0 \\ \beta\delta^t & \text{dla } t \in N_+; \delta > 0; \beta \in \langle 0; 1 \rangle. \end{cases} \quad (18)$$

Warto zwrócić uwagę na dwa aspekty podanej reguły. Po pierwsze: jednorokresowy czynnik dyskontujący (miara „niecierpliwości”) dla pierwszego okresu, który zaczyna się w chwili  $t = 0$ , a kończy w  $t = 1$ , jest równy  $\beta\delta$ , a dla pozostałych –  $\delta$ . Od drugiego okresu (włącznie) ta stopa jest stała, większa niż w pierwszym. Drugim jest niezgodność czasowa – występuje brak tzw. efektu stopera charakterystycznego dla stacjonarnego dyskontowania: dyskonto okresu  $\langle t, t + 1 \rangle$  w chwili zerowej jest „u Samuelsona” takie samo, jak wówczas, gdy w chwili  $t$  „cofnie się czas do zera” i dyskontuje ten okres (jako pierwszy). Teraz „ponowne włączenie stopera” w chwili  $t$  zmienia (wyjściową) ewaluację niecierpliwości z  $\delta$  na  $\beta\delta$ .

Niektóre „paradoksy behawioralne” znacznie wcześniej zostały zaobserwowane w kontekście teorii wyboru w warunkach ryzyka oraz niepewności (prace z lat pięćdziesiątych i sześćdziesiątych XX w., spostrzeżenia Alaisa, Ellsberga i in.). Odnotowane odstępstwa do normatywów teorii oczekiwanej użyteczności oraz konstruktywne próby jej sanacji od końca lat siedemdziesiątych [Kahneman, Tversky 1979; Quiggin 1982; Machina 1982; Yaari 1987] inspirowały ideę poszukiwania niezgodności (w mniejszym stopniu metodę ich kwantyfikacji). Propagatorami „nowego” dyskontowania byli Loewenstein, Prelec [1992] oraz Laibson [1997].

Uogólniona hiperboliczna funkcja dyskontująca jest funkcją zależną od trzech parametrów dodatnich  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\mu$ :

$$d(t) = (1 + \mu t)^{-\frac{\gamma}{\delta}}, \quad (19)$$

a jej uproszczony wariant (autorstwa Laibsona z 1997 r.):

$$d(t) = (1 + \mu t)^{-\gamma} \quad (20)$$

już tylko od dwóch.

Ważną rolę odegrały prace Ch. Harveya z 1986 i 1995 r. oraz artykuły Fishburna i Rubinsteina z 1981 r., a także Fishburna z Ewardsem z 1997 r. W pracach tych podjęto (skuteczną) próbę wyprowadzenia ogólnych hiperbolicznych reguł kalkulatoryjnych z „postulatów pierwotnych” (aksjomatów) sformułowanych „pod adresem” preferencji w zbiorach tzw. konsekwencji, czyli par („wynik”, „czas”):

$$(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \{(x_1, t_1), (x_2, t_2), \dots\}. \quad (21)$$

Przytoczymy kilka przykładowych postulatów z pracy Harveya [1995] i ich analityczne konsekwencje dla funkcji  $d(t)$ . Punktem wyjścia jest wyrażenie „postawy podmiotu względem czasu” przez ogólne własności funkcji  $d(t)$  – z równoczesną charakteryzacją tych postaw w języku preferencji w zbiorze dwuwymiarowych strumieni  $(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ . I tak: preferencje podmiotu wyrażają jego „niechęć względem upływu czasu” (są „timing averse”), gdy funkcja dyskontująca jest malejąca; „skłonność” (jest „timing pron”), gdy  $d(t)$  rośnie oraz jest neutralny, gdy jest stała (w innej terminologii neutralność jest nazywana cierpliwością, a „skłonność” wiąże się z międzypokoleniowym altruizmem [Rybicki 2009, 2010b]. Awersja (podmiotów) względem opóźnień jest definiowana w języku relacji zachodzących między wyrazami strumieni warunkiem:  $(x, s) \succ (x, t)$  dla dowolnego wyniku  $x$  oraz chwil  $s < t$ . Własność stacjonarności preferencji określa się implikacją:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \sim (\mathbf{y}, \mathbf{t}) \Leftrightarrow \forall h > 0 (\mathbf{x}, \mathbf{t} + h) \sim (\mathbf{y}, \mathbf{t} + h), \quad (22)$$

gdzie symbol  $\mathbf{t}' + h$  oznacza ciąg równości  $t'_n = t_n + h \quad \forall n \in N$ .

A oto tzw. bezwzględna malejąca awersja względem czasu:

$$(x, s) \sim (y, t) \Leftrightarrow (x, s + h) \prec (y, t + h) \quad \forall h > 0, \quad (23)$$

jeśli  $s < t$  oraz  $0 < x < y$ .

Logarytm (malejącej) funkcji dyskontującej  $g(t) = \ln d(t)$  musi być wówczas funkcją ściśle wypukłą. Harvey [1995] udowodnił, że jest to warunek konieczny i wystarczający, skąd wynika, że dyskontowanie wykładnicze tego postulatu nie spełnia, czyli dyskonta stacjonarnego nie znamionuje malejąca awersja względem czasu.

Ważną rolę w konstrukcjach Ch. Harveya spełniają postulaty tzw. względnej czasowej neutralności, rozciągłości („stretching”) oraz „proporcjonalności – w stosunku do czasów opóźnień” (timing proportional preferences, TPP [Harvey 1986, 1995]). Stanowią one istotny segment aksjomatycznego umocowania formalnego stworzonego przez niego dla uzasadnienia „filozofii dyskon-

towania” hiperbolicznego. Oto pierwszy z nich, nazwany przez Ch. Harveya własnością „relative timing constant” (RTC preferences):

$$\begin{aligned} & \exists b > 0 : (x, s) \sim (y, t) \Rightarrow \\ & \forall m > 0 (x, s + m(b + s)) \sim (y, t + m(b + t)). \end{aligned} \quad (\text{RTC}) \quad (24)$$

Występujące powyżej relacje indyferencji odnoszą się do „chwilowych” (liczbowych) par, tzw. konsekwencji (wynik, czas realizacji). We wcześniejszej pracy (z 1986 r.) cytowanego autora jest wprowadzone pojęcie rozciągłości (nieco inaczej formalizujące ideę RTC) – przygotowujące grunt pod koncepcję TPP: podmiot przedkładający wypłatę  $x$  w chwili  $s$  nad wypłatę  $y$  w chwili  $t$  dokona takiego samego wyboru dla okresów, odpowiednio,  $D(s + 1) - 1$  oraz  $D(t + 1) - 1$ , gdzie  $D$  oznacza opóźnienie:

$$(x, s) > (x, t) \Rightarrow (x, D(s + 1) - 1) > (y, D(t + 1) - 1). \quad (25)$$

Istotę owych preferencji wyjaśnia w swoim artykule sam Harvey, a przybliża ją, na sugestywnym przykładzie, praca Cieślak [2003].

„Odmiennie niż w przypadku aksjomatu stacjonarności, rozciągłość jest wrażliwa na przesunięcie w czasie. Wyobraźmy sobie osobę, która woli 100 j.p. (jednostek pieniężnych) dziś od 110 j.p. jutro. Rozciągłość oznacza, że preferencje te nie zmieniają się w sytuacji wyboru między 100 j.p. za 10 dni, a 110 j.p. za 21 dni (parametr  $d = 11$ ). Jednak ta sama osoba, postawiona przed alternatywą 100 j.p. za 10 dni lub 100 j.p. za 11 dni, może zmienić swe upodobania na korzyść wypłaty wyższej i późniejszej”. Upraszczając wywody pracy Harveya, można przytoczyć jedną z jej konkluzji: w addytywnej reprezentacji funkcjonu wyceny, wagi mają postać funkcyjną  $d(t) = \left(\frac{b}{b+t}\right)^r$ ;  $t > 0$  dla pewnych wartości parametrów  $b > 0$  oraz  $-\infty < t < \infty$ , wtedy i tylko wtedy, gdy preferencje mają własność RTC. Dalsze specyfikacje  $d(t)$  otrzymuje się jako konsekwencję postulatu TPP. Symbolicznie:

$$\begin{aligned} & \forall x, y > 0 \quad \forall s_0, t_0 \\ & (x, s_0) \sim (y, t_0); \quad \Delta s > 0, \Delta t > 0, \quad \frac{\Delta t}{\Delta s} = \frac{y}{x} \\ & \Rightarrow (x, s_0 + \Delta s) \sim (y, t_0 + \Delta t). \end{aligned} \quad (\text{TPP}) \quad (26)$$



Harvey [1995] wykazał, że tak właśnie sformułowanemu postulatowi czynią zadość reprezentacje preferencji neutralnych czasowo oraz preferencje o „powolnie malejącej awersji do czasu”, w których funkcjonal dyskонтujący określają wagi hiperboliczne:

$$d(t) = \frac{b}{b+t} \quad (27)$$

(jest to jednoparametryczna rodzina funkcji charakteryzująca się malejącą stopą niecierpliwości – czasowej).

## Podsumowanie

Koncepcja dyskонтowania hiperbolicznego „zadomowiła się” w ostatnim dwudziestoleciu w obszarze badawczym wyceny programów dalekookresowych, zyskując status najnowszej klasyki przedmiotu. Różnorodność potencjalnych kontekstów rzeczywistych przerasta jednak możliwości deskryptywne tej kategorii funkcji. Poniżej zasygnalizowano niektóre alternatywne propozycje ujęcia zagadnień dyskонтowania. Ważnym „tropem” jest podążanie za analogiami z dziedziny teorii podejmowania decyzji w warunkach ryzyka (i niepewności). Najogólniej rzecz sprowadza się do „wyznaczenia osi czasu roli osi stanów” [Prelec, Loewenstein 1989; Quiggin, Horowitz 1995; Fishburn, Edwards 1997]. Przykładem tego zabiegu jest reinterpretacja paradoksu Petersburgskiego przedstawiona w pracy Fishburna i Edwardsa z 1997 r. Prawdopodobieństwa realizacji wypłat (poprzedzonych seriami porażek) można traktować jako wagi dyskонтowe. Klasyczny paradygmat oczekiwanej użyteczności (expected utility – EU) ma naturalny odpowiednik w „wersji dynamicznej” (deterministycznej) – „równie klasyczny” paradygmat DU. Można to symbolicznie zapisać w postaci podwójnej równości:

$$EU = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot u(2^k) = DU. \quad (28)$$

Niektóre koncepcje eksploatacji tej analogii zreferowano w cytowanych pracach. W tym miejscu ograniczymy się do przedstawienia kilku niesformalizowanych spostrzeżeń oddających główne idee tego ujęcia. Rodzaje i siła dyskонтowania odpowiadają rodzajom postaw (podmiotów) w stosunku do ryzyka. W nomenklaturze teorii wyboru międzyokresowego i relacji międzypokoleniowych kategoria awersji do ryzyka została zastąpiona pojęciem niecierpliwości i rozważa

się kwestie zmian tego czynnika (w czasie: stałość, malenie, wzrost, tempo malenia [Bleichrodt i in. 2008; Prelec 2004; Price 2004]). Te (lokalne, w czasie) własności preferencji w przestrzeni strumieni można wyrażać miarami zależącymi od własności funkcji dyskontujących. W pierwszej kolejności wchodzi tu porównywanie stopnia wypukłości i wskaźniki wzorowane na „logarytmicznej wypukłości (wkłęsłości)” miar awersji do ryzyka Arrowa-Prata. Już „zwykła” wypukłość” malejącej funkcji dyskontującej  $f(t)$  informuje o silniejszym dyskontowaniu w okresach bliższych „teraźniejszości” niż w dalszej przyszłości. Inną możliwością jest badanie zachowania chwilowych stóp dyskontowych w postaci  $-\frac{f'(t)}{f(t)}$  (czas ciągły) i po-

równywanie tempa malenia tych funkcji (pojawiają się tu klasy równoważności funkcji o tym samym stopniu niestacjonarności); podobnie można wykorzystać porównywanie stopnia wypukłości logarytmów funkcji dyskonta. Prelec [2004] wprowadza tzw. funkcję niecierpliwości mającą postać (dla czasu ciągłego):

$$g(t) = \begin{cases} \frac{f'(t)}{f'(0)} & t > 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases} \quad (29)$$

i zauważa zależność  $g(t) \leq f(t)$ , przy czym równość tych funkcji ma miejsce tylko w przypadku stacjonarnej (wykładniczej) formuły dyskontowej  $f$ .

Bleichrodt i in. [2008] definiują dwa wskaźniki niecierpliwości (o charakterze absolutnym oraz relatywnym, odpowiednio). Są to „miary różniczkowe”:

$$\gamma(t) = -\frac{[\ln \varphi(t)]''}{[\ln \varphi(t)]'} \quad (30)$$

oraz:

$$\delta(t) = t \cdot \gamma(t) . \quad (31)$$

Typologia dyskontowania zaproponowana przez tych autorów opiera się na własnościach tych miar i prowadzi do rozważenia, innych niż hiperboliczne, funkcji dyskonta (por. [Bleichrodt i in. 2008]).

Pogłębioną analizę uwarunkowań decydujących od: wielkości wypłaty, miary probabilistycznej (prawdopodobieństwa subiektywnego podmiotów) oraz parametru czasowego przeprowadza Read [2001]. Podstawową konkluzją jego artykułu jest supozycja o tzw. subaddytywnym mechanizmie dyskontowania: dyskontowanie wielkości „rozłożony na raty” (wielokrotnie – w danym okresie) prowadzi do większej wartości dyskonta niż w przypadku aktów jednorazowych

(w skali całego tego okresu). Sama idea (ilustrowana przykładami) jest pokrewna koncepcji nieaddytywnych miar probabilistycznych, sięgającej G. Choqueta, rozwiniętej w kontekście „statycznej” teorii podejmowania decyzji w warunkach niepewności, przede wszystkim przez D. Schmeidlera [1987]. Istotne dla tej filozofii dyskontowania okazuje się subtelne rozróżnienie zaakcentowane przez Reada [2001] – między opóźnieniem („bezwzględny” – delay) a długością okresu dyskontowania (interval). Okazuje się, że obydwie „konkurencyjne” formuły (wykładnicza oraz hiperboliczna) mają wspólną cechę – „dyskontują addytywnie”.

W przygotowywanej pracy [Rybicki 2014] proponuje się rozważenie „nowego benchmarku” dla funkcji dyskontujących: proporcjonalnych do gęstości rozkładów logarytmiczno-normalnych. Charakteryzują się one wolniejszym tempem malenia niż wykładnicze, czyli w mniejszym stopniu „dyskryminują przyszłość”. Należą do szerszej rodziny funkcji podwykładniczych, które są funkcjami o tzw. grubych (ciężkich) „ogonach” (heavy-tailed). Z kolei maleją one szybciej niż funkcje hiperboliczne. Mają własność malejącej niecierpliwości, można efektywnie obliczyć odpowiednie miary (a także ich dyskretne odpowiedniki) i badać asymptotykę. Ich „pośrednie” usytuowanie (pomiędzy „skrajnościami”) nasuwa podejrzenie, że mogą one charakteryzować preferencje, w jakimś sensie „podstacjonarne”, w zbiorach programów (klasę dotychczas niebadaną i niezidentyfikowaną empirycznie).

Wydaje się, że powyższy – pobieżny – przegląd podstawowych aspektów problematyki porównań i wyceny strumieni wielkości ekonomicznych w czasie może dać pewien pogląd na całokształt tych zagadnień, uwypuklając ich „wielobarwność” i znaczenie zarówno teoretyczno-modelowe, jak i w sferze *Praxis*.

## Bibliografia

- Ainslie G., 1974: Impulse Control in Pigeons. „Journal of Experimental Analysis of Behavior”, 21, 485-489.
- Allais M., 1952: Fondaments d’une théorie des choix comportant un risqué et critique des postulats et axiomes de l’école Américaine. International Conference on Risk. Centre National de La Recherche Scientifique, May, Colleges International XL, Paris.
- Alcantud J., Garcia-Sanz M., 2010: Paretian Evaluation of Infinite Utility Streams: An Egalitarian Criterion. „Economic Letters”, No. 106, 209-211.
- Arrow K.J., 1999: Discounting, Morality, and Gaming. W: Discounting and Intergenerational Equity. P.R., Portney, J.P. Weyant (eds.). Resources for the Future. Washington, DC.
- Asheim G., 1996: Ethical Preferences in the Presence of Resource Constraints. „Nordic Journal of Political Economy”, No. 23, 55-67.

- Asheim i in., 2001: Justifying Sustainability. „Journal of Environ. Econom. Management”, No. 41, 252-268.
- Asheim G. i in., 2010: Generalized Time-invariant Overtaking. „Journal of Mathem. Economics”, No. 46, 519-533.
- Asheim G. i in., 2010: Sustainable Recursive Social Welfare Functions. „Econ. Theory”, No. 16, 183-219.
- Asheim G., Banerjee K., 2010: Fixed-step Anonymous Overtaking and Catching Up. „International Journal of Economic Theory”, No. 6, 149-165.
- Asheim G., Mitra T., 2010: Sustainability and Discounted Utilitarianism in Models of Economic Growth. „Math. Soc. Sciences”, No. 59, 148-169.
- Asheim G., Zuber S., 2012: Justifying Social Discounting: The Rank-discounted Utilitarian Approach. „Journal of Economic Theory”, No. 147, 1572-1601.
- Banerjee K., 2006: On the Equity-efficiency Trade-off in Aggregating Utility Streams. „Economic Letters”, No. 93, 63-67.
- Banerjee K., Mitra T., 2007: On the Impatience Implications of Paretian Social Welfare Functions. „Journal of Math. Economics”, Vol. 43, 236-248.
- Basu K., Mitra T., 2002: Aggregating Infinite Utility Streams with Inter-Generational Equity. MIT Department of Economics Working Paper, No. 02-19.
- Basu K., Mitra T., 2003: Aggregating Infinite Streams with Intergenerational Equity: The Impossibility Being Paretian. „Econometrica”, No. 32, 1557-1563.
- Berbeka K., 2008: Problemy stosowania międzypokoleniowej stopy dyskontowej. „Ekonomista”, 233-242.
- Bleichrod H., Rohde K., Wakker P., 2009: Non-hyperbolic Time Inconsistency. „Game and Economic Behavior”, No. 66, 27-38.
- Bleichrodt H. i in., 2008: Koopmans' Constant Discounting for Inter-temporal Choice: A Simplification and a Generalization. „Journal of Mathematical Psychology”, No. 52, 341-347.
- Bossert W. i in., 2007: Utilitarianism for Infinite Utility Streams: A New Welfare Criterion and Its Axiomatic Characterization. „Journal of Economic Theory”, No. 135(1), 579-589.
- Brock W., 1970: An Axiomatic Basis for the Ramsey-Weizsäcker Overtaking Criterion. „Econometrica”, No. 38, 927-929.
- Chichilnisky G., 1977: Economic Development and Efficiency Criteria in the Satisfaction of Basic Needs. „Applied Math. Modelling”, No. 1(6), 290-297.
- Chichilnisky G., 1997: What Is Sustainable Development. „Land Economics”, No. 74(4), 467-491.
- Chichilnisky G., 1996: An Axiomatic Approach to Sustainable Development. „Social Choice and Welfare”, No. 13, 231-257.
- Cieślak A., 2003: Behawioralna ekonomia finansowa. Modyfikacja paradygmatów funkcjonujących w nowoczesnej teorii finansów. Materiały i Studia NBP, z. 165, Warszawa, październik.

- Cowen T., 1997: Discounting and Restitution. *Philosophy and Public Affairs*, Spring, No. 26, 2, 168-185.
- Czerwiński Z., 1992: Jak porównać jutrzejszy dobrobyt z dzisiejszą biedą czyli o optymalnej intensywności inwestowania. W: *Dylematy ekonomiczne*. PWE, Warszawa.
- Dasgupta P., Heal G.M., 1974: The Optimal Depletion of Exhaustible Resources. „*Review of Economic Studies*”, No. 38 (Symposium), 331-339.
- Dasgupta P., Maskin E., 2005: Uncertainty and Hyperbolic Discounting. „*The American Economic Review*”, No. 95(4), 1290-1299.
- Diamond P., 1965: The Evaluation of Infinite Utility Streams. „*Econometrica*”, No. 33, 170-177.
- Ebert U., 1988: Measurement of Inequality: An Attempt at Unification and Generalization. „*Soc. Choice and Welfare*”, No. 5, 147-169.
- Ellsberg D., 1961: Risk, Ambiguity and Savage Axiom. „*Quarterly Journal of Economics*”, Vol. 75, 643-669.
- Fiedor B., 2007: Wzrost zrównoważony w ekonomii głównego nurtu i w ujęciu ekonomii środowiska. W: *Zrównoważony rozwój w teorii ekonomii i w praktyce*. A. Graczyk (red.). *Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej im. Oskara Langego we Wrocławiu* nr 1190, 40-64.
- Fishburn P., Rubinstein A., 1982: Time Preferences. „*Internat. Economics Review*”, Vol. 23, 677-694.
- Fishburn P., Edwards W., 1997: Discount Neutral Utility Models for Denumerable Time Streams. „*Theory and Decision*”, No. 43, 136-167.
- Fleurbaey M., Michel P., 2003: Intertemporal Equity and Extensions of the Ramsey Criterion. „*Journal of Math. Economics*”, Vol. 39, 777-802.
- Gollier R., Zeckhauser R., 2005: Aggregation of Heterogeneous Preferences. „*Journal of Political Economy*”, No. 113(4), 878-896.
- Gollier Ch., 2008: Discounting with Fat-tailed Economic Growth. „*Journal of Risk and Uncertainty*”, No. 37, 171-186.
- Gollier C., 2010: Ecological Discounting. „*Journal of Economic Theory*”, No. 145, 812-829.
- Hammond P.J., 1976: Equity, Arrow's Conditions and Rawls's Difference Principle. „*Econometrica*”, No. 44, 793-804.
- Harvey Ch., 1995: Proportional Discounting of Future Costs and Benefits. „*Mathematics of Operation Research*”, No. 20, 381-399.
- Harvey Ch., 1986: Value Functions for Infinite Period Planning. „*Management Science*”, No. 32, 1123-1139.
- Herrnstein R., 1961: Relative and Absolute Strength of Response as a Function of Frequency of Reinforcements. „*Journal of Exper. and Behav.*”, No. 4, 267-272.
- Jech T., 1978: *Set Theory*. Academic Press, New York.
- Kahneman D., Tversky A., 1979: Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk. „*Econometrica*”, Vol. 47, No. 2, 363-391.
- Kirby K.N., Herrnstein R.J., 1995: Preference Reversals Due to Myopic Discounting of Delayed Reward. „*Psychological Science*”, No. 6(2), 83-89.

- Koopmans T.C., 1960: Stationary Ordinal Utility and Impatience. „Econometrica”, No. 28, 287-309.
- Krusell P., Smith A., 2003: Consumption – Savings Decisions with Quasi-geometric Discounting. „Econometrica”, No. 71, 365-375.
- Kulpa W., 2009: Topologia a ekonomia. Wydawnictwo Kardynała Stefana Wyszyńskiego, Warszawa.
- Kydland F., Prescott E., 1977: Rules Rather than Discretion: The Inconsistency of Optimal Plans. „Journal of Political Economy”, No. 85(3), 473-491.
- Laibson D., 1997: Golden Eggs and Hyperbolic Discounting. „Quarterly Journal of Economics”, No. 62, 443-479.
- Lauwers L., 1995: Time – Neutrality and Linearity. „Journal of Mathematical Economics”, No. 24, 342-351.
- Lauwers L., Liedekerke L.V., 1997: Sacrificing the Patrol: Utilitarianism, Future Generations and Infinity. „Economics and Philosophy”, No. 13, 159-174.
- Lauwers L., 1998: Intertemporal Objective Functions. Strong Pareto versus Anonymity. „Math. Social Sciences”, Vol. 35, 37-55.
- Lauwers L., 2010: Ordering Infinite Utility Streams Comes of the Cost of a non-Ramsey Set. „Journal of Mathematical Economics”, No. 46, 32-37.
- Loewenstein G., Prelec D., 1992: Anomalies in Intertemporal Choice: Evidence and an Interpretation. „Quarterly Journal of Economics”, No. 107, 573-597.
- Machina M., 1983: Expected Utility Analysis without Independence Axiom. „Econometrica”, No. 50, 227-323.
- Mathematical Social Sciences 2010, No. 59 (Special Issue on Sustainability).
- Mathias A., 1977: Happy Families. „Annals of Pure and Applied Logic”, No. 12, 59-111.
- Mazur J., 1987: An Adjusting Procedure for Studying Delayed Reinforcement. W: M. Commins, J. Mazur, J. Nevin, H. Rachlin (eds.). „Quantitative Analyses of Behaviour”, No. 5, 55-73.
- Neumann J. von, Morgenstern O., 1944: Theory of Games and Economic Behavior. „Princeton Univ. Press”, Princeton, NJ.
- Nocetti D. i in., 2008: Properties of the Social Discount Rate in a Benthamite Framework with Heterogeneous Degrees of Impatience. „Management Science”, No. 54(10), 1882-1886.
- O’Donoghue T., Rabin M., 1999: Doing It Now or Later. „The American Economic Review”, No. 89(1), 103-124.
- Phelps E., Pollak R.A., 1968: On Second-Best National Saving and Game-Equilibrium Growth. „Review of Economic Studies”, No. 35(2).
- Pitman E., 1980: Sub-exponential Distribution Functions. „Journal of Australian Math. Society” (Series A), No. 29, 337-347.
- Portney P.R., Weyant J.P. (eds.), 1999: Discounting and Intergenerational Equity. „Resources for the Future” Washington, DC.

- Prelec D., 2004: Decreasing Impatience: A Criterion for Non-stationary Time Preference and „Hyperbolic” Discounting. „Scand. Journal of Economics”, No. 106, 511-532.
- Prelec D., Loewenstein G., 1991: Decision-making over Time and under Uncertainty: A Common Approach. „Management Science”, No. 37, 770-786.
- Price C., 2004: Hyperbole, Hypocrisy and Discounting that Slowly Fades Away. „Scandinavian Forest Economics”, No. 40, 343-59.
- Price C., 2005: How Sustainable Is Discounting? W: S. Kant, R.A. Berry (eds): Economics, Natural Resources, and Sustainability: Economics of Sustainable Forest Management. Kluwer, Dordrecht, 106-35.
- Quiggin J., 1982: A Theory of Anticipated Utility. „Journal of Econ. Behavior and Organ.”, No. 3, 323-344.
- Quiggin J., Horowitz J., 1995: Time and Risk. „Journal of Risk and Uncertainty”, No. 10, 37-55.
- Rachlin H., Green L., 1972: Commitment, Choice and Self-Control. „Journal of Experimental Analysis and Behavior”, No. 17, 15-22.
- Ramsey F., 1928b: On a Problem of Formal Logic. „Proceedings of the London Mathematical Society”, Series 2, 30.4, 339-384.
- Ramsey F.P., 1928: A Mathematical Theory of Saving. „Economics Journal”, No. 38, 543-559.
- Rawls J., 1970: The Theory of Justice. Oxford University Press, Oxford.
- Read D., 2001: Is Time-Discounting Hyperbolic or Subadditive? „Journal of Risk and Uncertainty”, No. 23, 5-32.
- Reinschmidt K., 2002: Aggregate Social Discount Rate Derived from Individual Discount Rates. „Management Science”, No. 48(2), 307-312.
- Robson A., 2001: The Biological Basis of Economic Behavior. „Journal of Econ. Literature”, No. 39, 11-23.
- Roemer J., Suzumura K., 2007: Intergenerational Equity and Sustainability. Palgrave Macmillan, Houndmills-Basingstoke-Hampshire.
- Rybicki W., 2009: Sprawiedliwość międzypokoleniowa i sekwencyjne modelowanie preferencji. W: B. Fiedor, Z. Hockuba (red.): Nauki ekonomiczne wobec wyzwań współczesności. PTE, Warszawa, 175-187.
- Rybicki W., 2010a: O realokacji dóbr i sprawiedliwości międzypokoleniowej. W: M. Kulesza, W. Ostasiewicz (red.): Pragmata Tes Oikonomias. AJD, Częstochowa, Vol. IV, 110-132.
- Rybicki W., 2010b: O sprawiedliwości międzypokoleniowej (nota bibliograficzna). W: J. Pocięcha (red.): Aktualne zagadnienia modelowania i prognozowania zjawisk społeczno-gospodarczych. Studia i Prace Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie nr 10, 141-155.
- Rybicki W., 2011: Sprawiedliwość międzypokoleniowa i „kłopoty z dyskontowaniem przyszłości”. W: Modelowanie i prognozowanie gospodarki narodowej. Prace i materiały Wydziału Zarządzania Uniwersytetu Gdańskiego, z. 4/8, 151-165.

- Rybicki W., 2012: Discounting and Ideas of Intergenerational Equity and Sustainability. „Operations Research and Decisions”, No. 22(1), 63-84.
- Rybicki W., 2014: O preferencjach etycznych i wolno malejących funkcjach dyskontujących. Artykuł przygotowywany do druku w kwartalniku „Ekonomista”.
- Sakai T., 2010: Intergenerational Equity and Explicit Construction of Welfare Criteria. „Social Choice and Welfare”, No. 35, 393-414.
- Samuelson P., 1937: A Note on Measurement of Utility. „Review of Economic Studies”, IV, 2, 155-161.
- Savage L., 1954: The Foundations of Statistics. J. Wiley&Sons, New York.
- Sen A.K., 1988: Freedom of Choice. Concept and Contents. „Eur. Econ. Review”, Vol. 32, 269-294.
- Schmeidler D., 1987: Subjective Probability and Expected Utility without Additivity. „Econometrica”, No. 57, 571-587.
- Sidgwick H., 1907: The Methods of Ethics. Macmillan, London (7th edition).
- Sikora R.J., Barry B., 1978: Obligations to Future Generations. Temple, Philadelphia.
- Solow R.M., 1974: Intergenerational Equity and Exhaustible Resources. „The Review of Economic Studies”, Symposium, 29-45.
- Special Issue on Discounting Dilemmas. „Journal of Risk and Uncertainty”, Vol. 37, No. 2/3.
- Strotz R.M., 1955: Myopia and Inconsistency in Dynamic Utility Maximization. „Rev. Econ. Studies”, No. 23, 165-180.
- Svensson L., 1980: Equity among Generations. „Econometrica”, No. 48, 1251-1256.
- Szpilrajn E. (Marczewski E.), 1930: Sur l'extension de l'ordre partiel. „Fundamenta Mathematicae”, No. 16, 386-389.
- Thaler R., 1981: Some Empirical Evidence on Dynamic Inconsistency. „Econ. Letters”, No. 8, 201-207.
- Weitzman M., 2007: A Review of the Stern Review of the Economics of Climate Change. „Journal of Econ. Literature”, No. 45, 703-724.
- Weitzman M., 2001: Gamma Discounting. „American Economic Review”, No. 91, 260-271.
- Weitzman M., 1998: Why the Far – Distant Future Should Be Discounted at Its Lowest Possible Rate. „Journal of Environmental Economic and Management”, No. 36, 201-208.
- Weizsäcker von C.C., 1965: Existence of Optimal Programs of Accumulation for an Infinite Time Horizon. „Review of Economic Studies”, No. 32, 85-104.
- Weymark J., 1981: Generalized Gini Inequality Indices. „Mathemat. Social Sciences”, No. 1, 409-430.
- Yaari M., 1987: The Dual Theory of Choice under Risk. „Econometrica”, No. 55, 95-115.
- Zame W.R., 2007: Can Intergenerational Equity Be Operationalized. „Theoretical Economics”, No. 2, 187-202.
- Żylicz T., 2001: Wiara i nauka a sprawiedliwość międzypokoleniowa. W: U progu trzeciego tysiąclecia. A. Białecka, J.J. Jadacki (red.). Wyd. Naukowe Semper, Warszawa.



---

**PREFERENCE'S MODELING AND PROBLEMS  
OF SUSTAINABLE DEVELOPMENT****Summary**

In the paper the selected review of main research directions and basic statements from the area of evaluations and comparisons of long-term project is given as well as – questions concerning an adjustment of discounting functions to the “true” fluctuations of individual preferences (in the passage of time) are asked. The above research is carried out in two (complementary) planes. At first the analyses of preorders in sets of infinite sequences of (instantaneous) utilities are shortly reported. The subject of the second part of the article is an identification of the analytical shapes of the “exact” and “just-intergenerational” discounting functions.